УДК 517.9

Новые классы решений уравнения минимальных поверхностей

Сергей И. Сенашов
Ольга Н. Черепанова*
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 18.01.2010, окончательный вариант 25.02.2010, принята к печати 10.04.2010

Построены новые классы точных решений уравнения минимальных поверхностей с помощью гомотопии решений.

Ключевые слова: минимальные поверхности, гомотопия, контактные преобразования, точные решения.

Поверхность, заданную уравнением $z = u(x, y)$, назовем минимальной поверхностью, если она удовлетворяет уравнению Эйлера–Лагранжа

$$(1 + u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_x^2)u_{yy} = 0. \tag{1}$$

Уравнение (1) выведено в 1768 г., и с тех пор его исследованию и решению посвящено множество работ. Его изучали Ж.Лагранж, Л.Эйлер, Г.Монж, С.Пуассон, С.Ли и другие известные математики. Уравнение (1) часто возникает при исследовании и решении задач механики жидкости, теории пластичности, в архитектуре и т.п. В этой статье мы будем строить новые точные решения этого уравнения.

Предваряя наши результаты, сделаем обзор сведений об уравнении (1), которые нам потребуются в дальнейшем.

1. Некоторые точные решения уравнения (1)

Точных решений уравнения (1) существует сравнительно немного. Перечислим наиболее известные из них.

Геликоид. Геликоиды образуют самое большое семейство известных решений уравнения (1). Наиболее простой из них описывается уравнением

$$z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}. \tag{2}$$

Он представляет собой единственную гармоническую функцию, и это единственная из всех минимальных поверхностей — линейчатая поверхность.

Катеноид. Его уравнение имеет вид

$$z = \operatorname{Arch}\sqrt{x^2 + y^2}. \tag{3}$$

*e-mail: cheronik@mail.ru
© Siberian Federal University. All rights reserved

Это единственная из всех минимальных повехностей поверхность вращения.

Поверхность Шерка (Х.Шерк, 1834). Эта поверхность задается уравнением

$$z = \ln \frac{\cos y}{\cos x} \tag{4}$$

и является единственной поверхностью вида $z = f(x) + g(y)$.

Поверхность Эннепера (А.Эннепер, 1864). Это представитель параметрических поверхностей. Ее уравнение задается формулами

$$\begin{cases} x = u + uv^2 - u^3/3, \\ y = v + +vu^2 - v^3/3, \\ z = u^2 - v^2. \end{cases} \tag{5}$$

Поверхность относится к классу афинно-минимальных поверхностей.

2. Группа непрерывных преобразований, допускаемая уравнением (1)

Эта группа пятипараметрическая и порождается следующими преобразованиями:

$$\begin{aligned} &T_1: \quad x' = x + a_1, \qquad T_2: \quad y' = y + a_2, \\ &T_3: \quad x' = x \exp a_3, \quad y' = y \exp a_3, \qquad f' = f \exp a_3, \\ &T_4: \quad x' = x \cos a_4 + y \sin a_4, \quad y' = -\sin a_4 + y \cos a_4, \\ &T_5: \quad f' = f + a_5. \end{aligned}$$

Замечание. Здесь указаны только те переменные, которые преобразуются, остальные переменные преобразуются тождественно.

Эти преобразования суть три трансляции, гомотетия и вращение в плоскости xy.

Они порождают пятимерную алгебру Ли L_5, базис которой имеет вид

$$\begin{gathered} X_1 = \partial_x, \quad X_2 = \partial_y, \quad X_3 = x\partial_x + y\partial_y + f\partial_f, \\ X_4 = y\partial_x - x\partial_y, \quad X_5 = \partial_f. \end{gathered}$$

3. Законы сохранения уравнения (1)

Поскольку уравнение (1) может быть выведено с помощью вариационного принципа и получается минимизацией функционала

$$S = \iint\limits_{\Omega} \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2} dxdy, \tag{6}$$

где Ω — область определения функции $z = f(x, y)$, то по теореме Нетер каждому из непрерывных преобразований $T_1, \ldots, T_5$ можно поставить в соответствие закон сохрания.

Уравнение (1) имеет пять законов сохранения:

$$
\begin{aligned}
X_1: &\quad \partial_x\left(L - f_x\frac{\partial L}{\partial f_x}\right) + \partial_y\left(-f_x\frac{\partial L}{\partial f_y}\right) = 0,\\
X_2: &\quad \partial_x\left(-f_x\frac{\partial L}{\partial f_x}\right) + \partial_y\left(L - f_y\frac{\partial L}{\partial f_y}\right) = 0,\\
X_3: &\quad \partial_x\left(Lx + (f - xf_x - yf_y)\frac{\partial L}{\partial f_x}\right) + \partial_y\left(Ly - (f - xf_x - yf_y)\frac{\partial L}{\partial f_y}\right) = 0,\\
X_4: &\quad \partial_x\left(Ly + (yf_x - xf_y)\frac{\partial L}{\partial f_x}\right) + \partial_y\left(-Lx + (yf_x - xf_y)\frac{\partial L}{\partial f_y}\right) = 0,\\
X_5: &\quad \partial_x\left(\frac{f_x}{L}\right) + \partial_y\left(\frac{f_y}{L}\right) = 0,
\end{aligned}
$$

где $L = \sqrt{1 + f_x^2 + f_y^2}$.

Эти законы сохранения использованы в [1] и цитируемой там литературе для получения важных следствий в теории минимальных поверхностей.

4. Линеаризация уравнения минимальных поверхностей

Рассмотрим поверхность вида

$$z = u(x, y). \tag{7}$$

Это уравнение описывает минимальную поверхность, если $u(x, y)$ удовлетворяет уравнению второго порядка

$$(1 + u_x^2)u_{yy} - 2u_x u_y u_{xy} + (1 + u_y^2)u_{xx} = 0. \tag{8}$$

С помощью контактного преобразования Лежандра

$$u_x = \xi, \quad u_y = \eta, \quad w_\xi = x, \quad w_\eta = y, \quad u(x, y) = x\xi + y\eta - w(\xi, \eta) \tag{9}$$

уравнение (8) сводится к линейному уравнению

$$(1 + \xi^2)w_{\xi\xi} + 2\xi\eta w_{\xi\eta} + (1 + \eta^2)u_{\eta\eta} = 0 \tag{10}$$

при условии, что якобиан преобразования

$$J = u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 \neq 0. \tag{11}$$

Нетрудно проверить, что поверхности

$$u(x, y) = x \operatorname{tg} y, \tag{12}$$

$$u(x) = \ln\frac{\cos x}{\cos y}, \tag{13}$$

$$u(x, y) = \operatorname{arcch}(x^2 + y^2) \tag{14}$$

(геликоид, поверхность Шерка, катеноид соответственно) являются решениями уравнения (8) и удовлетворяют условию (11).

Применим контактное преобразование Лежандра (9) к уравнениям (12)–(14). Тогда уравнения (12)–(14) преобразуются к виду

$$w(\xi,\eta) = \eta \operatorname{arctg}\xi, \tag{15}$$

$$w(\xi,\eta) = -\,\xi \operatorname{arctg}\xi + \eta \operatorname{arctg}\eta + \ln\frac{\sqrt{1+\xi^2}}{\sqrt{1+\eta^2}}, \tag{16}$$

$$\begin{aligned} w(\xi,\eta) =& \sqrt{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}} - \\ & - \ln\left(\frac{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}+\sqrt{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}}}{\xi^2+\eta^2}\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Определение 1. *Гомотопией двух функций $g(x)$ и $\varphi(x)$ назовем функцию $F_a(x) : F_a(x) = ag(x) + (1-a)\varphi(x)$, где $0 \leqslant a \leqslant 1$.*

Поскольку функции (15)–(17) удовлетворяют линейному уравнению (10), то их гомотопия также будет являться решением этого уравнения. Тогда

$$w^1_{\text{н}} = a(\eta \operatorname{arctg}\xi) + (1-a)\left[-\xi \operatorname{arctg}\xi + \eta \operatorname{arctg}\eta + \ln\frac{\sqrt{1+\xi^2}}{\sqrt{1+\eta^2}}\right], \tag{18}$$

$$\begin{aligned} w^2_{\text{н}} =& a(\eta \operatorname{arctg}\xi) + (1-a)\left[\sqrt{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}} - \right. \\ & \left. - \ln\left(\frac{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}+\sqrt{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}}}{\xi^2+\eta^2}\right)\right], \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} w^3_{\text{н}} =& a\left[-\xi \operatorname{arctg}\xi + \eta \operatorname{arctg}\eta + \ln\frac{\sqrt{1+\xi^2}}{\sqrt{1+\eta^2}}\right] + +(1-a)\left[\sqrt{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}} - \right. \\ & \left. - \ln\left(\frac{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}+\sqrt{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}}}{\xi^2+\eta^2}\right)\right], \end{aligned} \tag{20}$$

где $w^1_{\text{н}}, w^2_{\text{н}}, w^3_{\text{н}}$ — новые решения уравнения (10), a — вещественный параметр, удовлетворяющий неравенству $0 \leqslant a \leqslant 1$. На рис. 1 – 3 изображены поверхности $w^1_{\text{н}}$, $w^2_{\text{н}}$ и $w^3_{\text{н}}$ при различных значениях a.

Применим теперь к уравнениям (18)–(20) обратное контактное преобразование Лежандра. После проведенных вычислений соотношения (18)–(20) преобразуются соответственно к виду

$$\begin{cases} u(x,y) = \frac{a\xi\eta}{1+\xi^2} - \frac{1}{2}(1-a)\ln\frac{1+\xi^2}{1+\eta^2}, \\ x = \frac{a\eta}{1+\xi^2} + (a-1)\operatorname{arctg}\xi, \\ y = a\operatorname{arctg}\xi + (1-a)\operatorname{arctg}\eta, \end{cases} \tag{21}$$

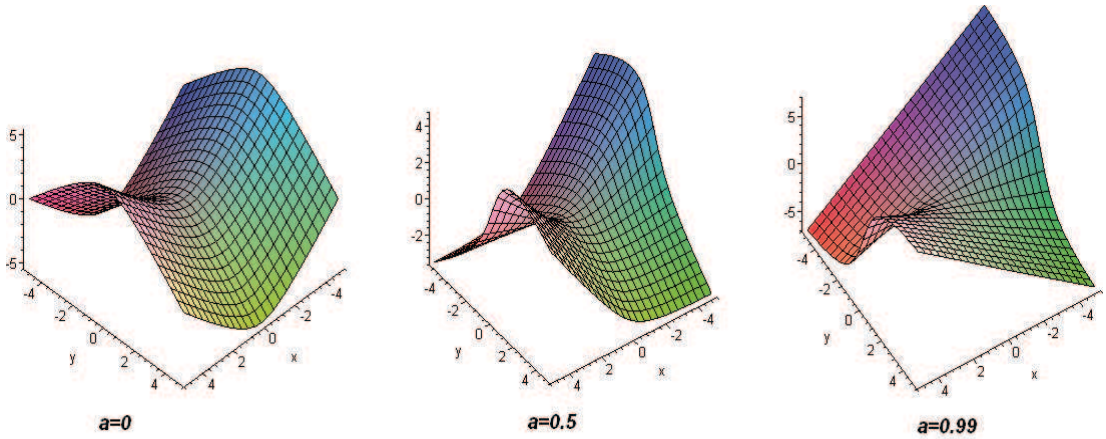

Рис. 1. Поверхность $w_{\text{н}}^1$

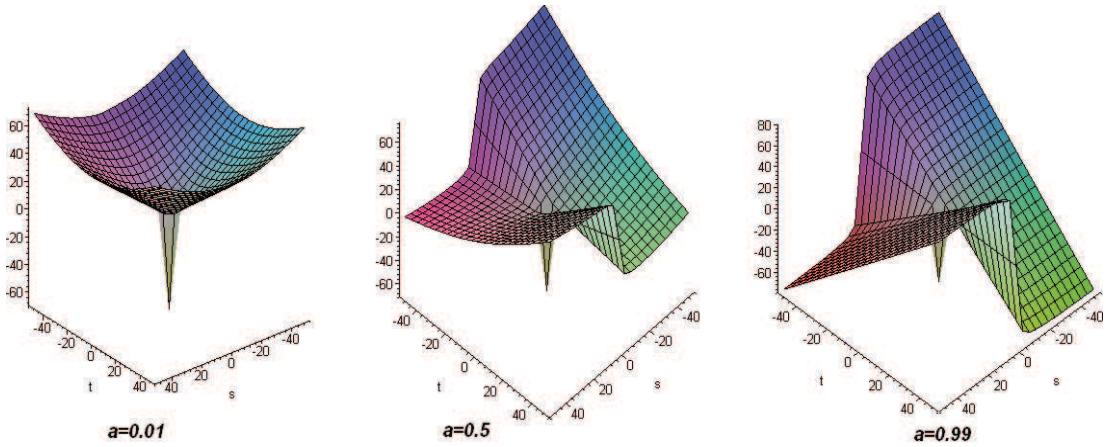

Рис. 2. Поверхность $w_{\text{н}}^2$

$$
\begin{cases}
u(x,y) = \frac{a\xi\eta}{1+\xi^2} + 2(1-a) + \frac{(1-a)(\xi^2+\eta^2)^2}{\sqrt{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}}}\times \\
\times\left[1 - \frac{2}{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}+2\sqrt{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}}}\right] - \\
-(1-a)\left[\sqrt{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}} - \ln\frac{(2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}+2\sqrt{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}})}{\xi^2+\eta^2}\right], \\
x = \frac{a\eta}{1+\xi^2} + (a-1)\frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2} + \frac{(1-a)\xi(\xi^2+\eta^2)}{\sqrt{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}}\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}}\times \\
\times\left[1 - \frac{2}{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}+2\sqrt{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}}}\right], \\
y = a\cdot\operatorname{arctg}\xi + (a-1)\frac{2\eta}{\xi^2+\eta^2} + \frac{(1-a)\eta(\xi^2+\eta^2)}{\sqrt{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}}\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}}\times \\
\times\left[1 - \frac{2}{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}+2\sqrt{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}}}\right],
\end{cases}
\tag{22}
$$

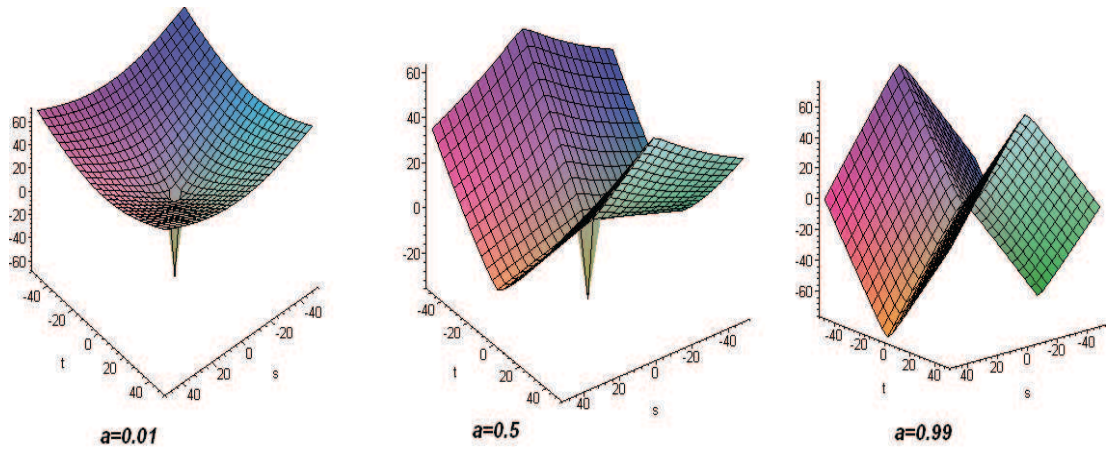

Рис. 3. Поверхность $w^3_{\text{н}}$

$$
\begin{cases}
u = 2(1-a) + \frac{(1-a)(\xi^2+\eta^2)^2}{\sqrt{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}}\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}} \times \\
\times \left[1 - \frac{2}{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}+2\sqrt{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}}}\right] - \\
-a \ln \frac{\sqrt{1+\xi^2}}{\sqrt{1+\eta^2}} - (1-a)\left[\sqrt{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}} - \right. \\
\left. - \ln\left(\frac{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}+\sqrt{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}}}{\xi^2+\eta^2}\right)\right], \\
x = -a \cdot arctg\xi + (1-a)\frac{2\xi}{\xi^2+\eta^2} + \frac{(1-a)\xi(\xi^2+\eta^2)}{\sqrt{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}}\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}} \times \\
\times \left[1 - \frac{2}{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}+2\sqrt{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}}}\right], \\
y = a \cdot arctg\eta + (1-a)\frac{2\eta}{\xi^2+\eta^2} + \frac{(1-a)\eta(\xi^2+\eta^2)}{\sqrt{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}}\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}} \times \\
\times \left[1 - \frac{2}{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}+2\sqrt{2+\sqrt{4+(\xi^2+\eta^2)^2}}}\right].
\end{cases}
\tag{23}
$$

На рис. 4 – 6 изображены поверхности (21)–(23), соответствующие различным значениям параметра a.

Таким образом, получаем, что уравнения (21)–(23) описывают новые классы решений уравнения минимальных поверхностей (4).

5. Расслоение уравнений минимальных поверхностей

Преобразование Лежандра позволяет все решения уравнения (4) разбить на два класса: особые решения, для которых якобиан (11) равен нулю, и неособые решения.

Особые решения удовлетворяют уравнению

$$u_{xx}u_{yy} - u_{xy}^2 = 0, \tag{24}$$

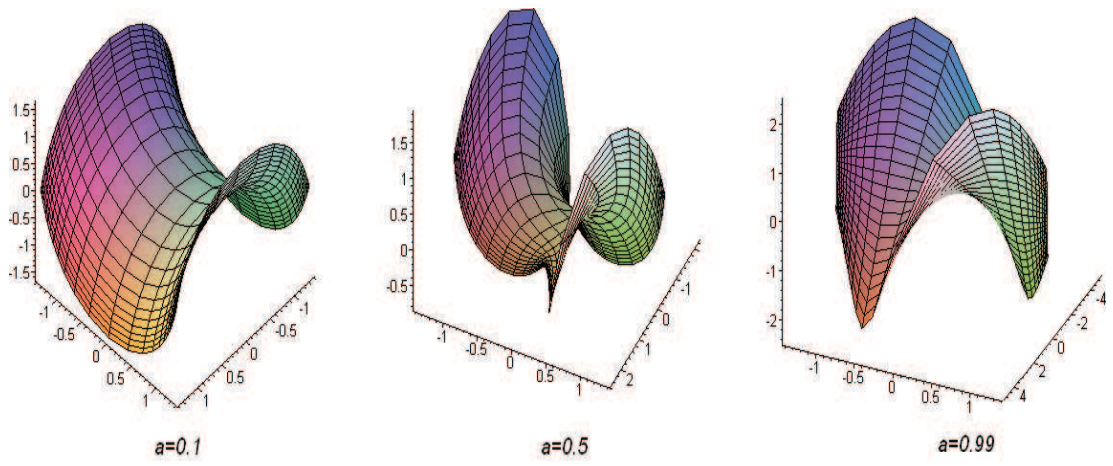

Рис. 4. Поверхность (21)

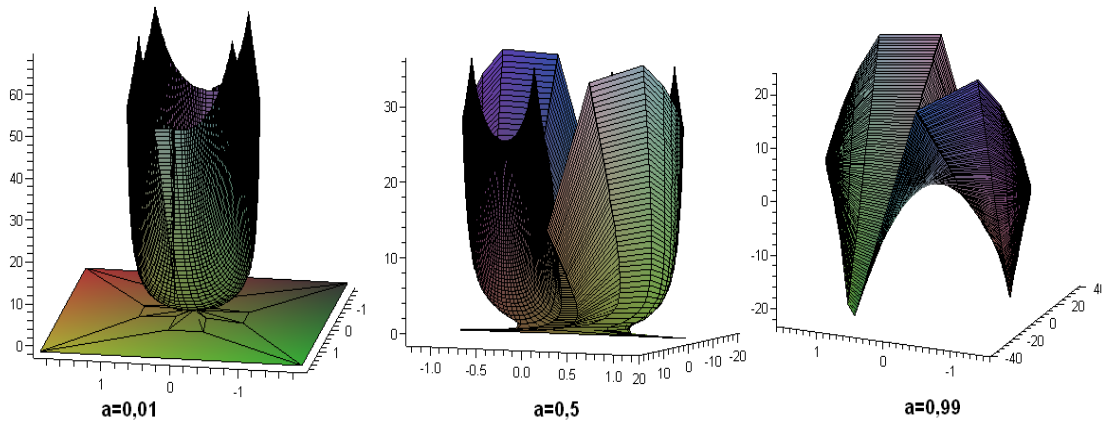

Рис. 5. Поверхность (22)

которое описывает так называемые развертывающиеся поверхности. Этот класс поверхностей достаточно хорошо изучен в дифференциальной геометрии.

Неособые решения. Выше было показано, что из одного неособого решения уравнения (4) можно построить любое другое неособое решение этого же уравнения, используя это решение. Но любое неособое решение уравнения (4) $u(x, y)$ порождает однопараметрическую группу преобразований уравнения (10) вида $w'(\xi, \eta) = a + w(\xi, \eta)$, где $w(\xi, \eta)$ — преобразование Лежандра решения $u(x, y)$.

Поэтому всё множество решений расслаивается на два класса: автоморфную систему, которая описывается уравнением (11), и на разрешающую описываемую уравнением (24).

Работа выполнена в рамках ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России на 2009–2013 гг." (№1121), а также АВЦП "Развитие потенциала высшей школы" (проект 2.1.1/3023).

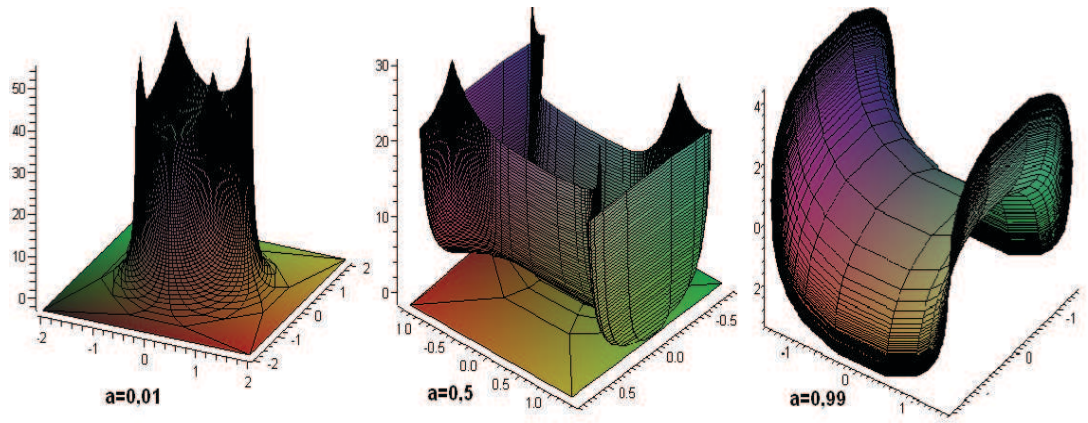

Рис. 6. Поверхность (23)

Список литературы

[1] Р. Осерман, Минимальные поверхности, *УМН*, **22**(1967), №4, 55–134.

[2] С.И. Сенашов, О.Н. Черепанова, Гомотопия решений уравнения минимальных поверхностей, *Вестник СибГАУ*, **2**(2002), №23, 84–90.

The New Solutions Sets of Minimal Surface Equation

Sergey I. Senashov
Olga N. Cherepanova

New classes of exact solutions of minimal surfaces equations are constructed in this work by means of homotopy of solutions.

Keywords: minimal surfaces, homotopy, contact transformations, exact solutions.