

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра высшей и прикладной математики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_____ /С. Г. Мысливец
«___» _____ 20__ г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

РАЗЛИЧНЫЕ МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ МНОЖЕСТВА ТОЧЕК ПОВЕРХНОСТЬЮ В ИНТЕРЕСАХ КРАНИОПЛАСТИКИ

Направление 01.04.02 Прикладная математика и информатика

Магистерская программа 01.04.02.06 Прикладная математика и
информатика в гуманитарных и социально-экономических науках

Руководитель

доцент, кандидат физико-
математических наук.

В. Р. Куликов

Выпускник

А. М. Кирилин

Нормоконтролер

Т. Н. Шипина

Красноярск 2024

АННОТАЦИЯ

В работе исследуется вопрос подгонки поверхности к множеству точек с точки зрения минимизации расстояния от точек до поверхности. Он возник в рамках поиска новых форм имплантатов для краниопластики. Выделены ключевые части метода решения (аппроксимирующее семейство, ошибка аппроксимации, дискретизация, целевая функция минимизации и алгоритм минимизации целевой функции) и для каждой из них приведены реализации. Проведены эксперименты. Протестированы методы аппроксимации облака точек поверхностью второго порядка. Метод, базирующийся на вычислении приближенного расстояния на основе ряда Тейлора, показал результаты лучше, чем обычный метод наименьших квадратов.

Ключевые слова: краниопластика; подгонка поверхности; расстояние до поверхности; метод наименьших квадратов; метод главных компонент.

ANNOTATION

The paper examines the issue of fitting a surface to a set of points from the point of view of minimizing the distance from the points to the surface. It arose as part of the search for new forms of implants for cranioplasty. The key parts of the solution method (the approximating family, the approximation error, the discretization, the objective minimization function and the algorithm for minimizing the objective function) are highlighted and implementations are given for each of them. Experiments have been conducted. Methods for approximating a point cloud by a second-order surface have been tested. The method based on calculating the approximate distance based on the Taylor series showed better results than the usual least squares method.

Keywords: cranioplasty; surface fitting; distance to the surface; least squares method; principal component method.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1 Формализация	7
2 Комплексные методы	14
2.1 GD-ICP – полигон эллипсоида	14
2.2 (M)ANPMPC – квадрака	22
3 Декомпозиция	28
3.1 Аппроксимирующее семейство	28
3.2 Ошибка аппроксимации	30
3.3 Дискретизация	32
3.4 Целевая функция минимизации	37
3.5 Алгоритмы минимизации	41
4 Вычислительные эксперименты	49
4.1 Тестирование метода ANPMPC – квадрака	49
4.2 Тестирование метода MANPMPC – квадрака	51
4.3 Тестирование метода Левенберг-Марквардт – градиентное рас- стояние – квадрака	51
4.4 Выводы	52
Заключение	53
Список сокращений	53
Список использованных источников	54
Приложение А Вывод алгоритмов получения оптимальных параметров сферы и плоскости.	58
Приложение Б Результаты вычислительных экспериментов	66

ВВЕДЕНИЕ

Краниопластика — это хирургическая операция по исправлению дефектов черепа, вызванных предыдущими травмами или операциями. Для исправления используются титановые имплантаты двух типов: индивидуальные и типовые.

Индивидуальные имплантаты, моделируются и изготавливаются под конкретную зону черепа конкретного человека. Как правило, изготовление происходит с помощью металлической печати на 3D-принтере. Индивидуальное моделирование позволяет изготовить имплантат заранее, до оперативного вмешательства, что, в свою очередь, уменьшает его продолжительность. Так же, индивидуальная форма имплантата позволяет использовать меньшее количество фиксирующих имплантат винтов, снижает количество послеоперационных осложнений и улучшает эстетичность итогового результата [1, 2].

Однако, имеются и недостатки. В частности, высокая стоимость и долгие бюрократические процедуры [3], что затрудняет их обширное использование.

Типовые имплантаты смоделированы как пластины нескольких универсальных типов. Они изготавливаются, как правило, штамповкой. С точки зрения плюсов и минусов типовые имплантаты являются противоположностью индивидуальным. Их унитарность делает их стоимость крайне дешевой и позволяет избежать длительных бюрократических процедур. Однако такие имплантаты необходимо выбирать и подгонять непосредственно во время оперативного вмешательства. Это увеличивает его длительность и трудоемкость, а также не гарантирует такой же эстетичности и легкости восстановления, как при использовании индивидуальных имплантатов [3].

Нейрохирургами КМКБСМП была поставлена задача поиска новых типовых имплантатов для височной зоны, с целью уменьшения длительности оперативного вмешательства. Сейчас ими используются типовые имплантаты в виде квадратных частей трех поверхностей: плоскости и сфер радиуса 100 и 130 мм. Данные о поверхности используемых имплантатов есть на сайте производителя [4]. В нашем случае используются «Пластины сетчатые плоские (100 x 100)» и «Пластины сетчатые сферические» с «R/Н сферы - 100/24, 130/18.5». Соответственно, их поверхности это плоскость, сфера радиуса 100 мм и сфера радиуса

130 мм.

Длительность оперативного вмешательства при использовании типовых имплантатов зависит от длительности двух этапов: 1) выбор наилучшего имплантата из представленных и 2) подгонка выбранного имплантата. Скорость обоих этапов можно улучшить. Предположим, что все черепа разделены на группы по легко определяемому признаку (например черепному указателю [5], как предложили нейрохирурги) и каждой группе соответствует свой имплантат, который подходит височным зонам черепов этой группы лучше, чем любой из используемых сейчас. Тогда ускоряется первый этап, так как не надо перебирать все имплантаты, а только определить признак. Второй этап так же ускоряется, ведь выбранный на первом этапе имплантат подходит для височной зоны лучше, чем используемые. В следствии чего уменьшается необходимая степень подгонки.

Соответственно, для такого ускорения необходимо найти признак, по которому можно разбить черепа на группы и для каждой группы найти имплантаты, подходящие к височным зонам этой группы не хуже чем уже используемые имплантаты.

Для практических исследований, хирургами из КМКБСМП, были предоставлены 40 анонимизированных КТ-снимков голов различных людей в формате DICOM [6] с размеченными височными зонами. Таким образом, прежде всего, нам нужно выделить височные зоны из этих снимков. Метод такого выделения был разработан в [7]. Результатом применения для одного снимка являются два множества точек — правая и левая височные зоны.

Далее, все эти множества точек нужно разделить на группы в соответствии с выбранным признаком. После чего, нужно найти подходящие имплантаты. То есть, имплантаты которые проходят ближе к точкам множеств группы, чем используемые. Иными словами, имплантаты, аппроксимирующие множества точек группы не хуже, чем используемые. Но, поскольку типовые имплантаты представляют из себя часть некоторой поверхности, будет разумным разделить их поиск на

- 1) поиск подходящей поверхности,
- 2) выделение имплантата, как нужной части на этой поверхности.

Перед тем, как начать искать поверхности для всех височных зон или их

групп, разумно сначала найти подходящие поверхности для отдельных височных зон. Это поможет найти семейство поверхностей, которое подходит для аппроксимации височных зон, и позволит отработать процесс на более простой задаче. Если найденное семейство поверхностей подтвердит свою пригодность для аппроксимации, это значительно упростит выбор поверхности на этапе работы с группами височных зон.

Таким образом, решение поставленной задачи состоит из 4 шагов.

- 1) Выделение височных зон.
- 2) Поиск поверхностей для множеств точек.
- 3) Поиск поверхностей для групп множеств точек.
- 4) Выделение имплантатов из групповых поверхностей.

Как уже говорилось, первый шаг, выделение височных зон, уже рассматривался в [7]. В этой работе мы рассмотрим шаг второй, поиск поверхностей для множеств точек. Иначе говоря, мы будем искать поверхности, которые проходят максимально близко к заданному множеству точек. Однако, существующие работы связаны либо с моделированием индивидуальных имплантатов, не приспособленных к промышленному производству [8, 9], либо с подгонкой специализированных поверхностей, или кривых на подобии эллипса [10]. Это не дает желаемой гибкости в решении задачи. Так же, для более сложных поверхностей, типа квадрики, не рассмотрена проблема подгонки в смысле уменьшения расстояния от точек до поверхности.

Мы же хотим подгонять поверхность к множеству точек именно в смысле уменьшения расстояния от точек до поверхности. В рамках этого, будет разумно попробовать разные подходы и сравнить их эффективность, для чего необходимо выделить ключевые компоненты общего метода подгонки.

Таким образом, можно сформулировать цель и задачи данной работы.

Цель: Разработка и сравнение методов отыскания поверхности, которая аппроксимирует заданное множество точек не хуже, чем поверхности используемых имплантатов.

Задачи:

- 1) Формализовать поиск аппроксимирующих поверхностей для отдельных височных зон.
- 2) Разложить общий метод поиска аппроксимирующих поверхностей на

ключевые компоненты.

3) Разработать варианты реализации ключевых компонент.

4) Реализовать разработанные варианты в виде комплекса алгоритмов и программ.

5) Провести вычислительные эксперименты для комбинаций ключевых компонент.

Основные результаты работы и отдельные её вопросы докладывались и обсуждались на следующих мероприятиях.

– Научные семинары кафедры ВиПМ.

– XVIII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспектив Свободный – 2022», Красноярск.

– IV Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Системы управления, информационные технологии и математическое моделирование», Омск (Диплом I степени). Статья по результатам принята к публикации в материалах конференции.

– XXI Международная конференция имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование», Республика Узбекистан, Карши (Диплом победителя).

– V Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Системы управления, информационные технологии и математическое моделирование», Омск.

– XXII Международная конференция имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование», Томск (Диплом победителя).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты работы

- 1) Формализован поиск аппроксимирующих поверхностей для отдельных височных зон.
- 2) Общий метод поиска аппроксимирующих поверхностей разложен на ключевые компоненты: аппроксимирующее семейство, ошибку аппроксимации, дискретизацию, целевую функцию минимизации и алгоритм минимизации.
- 3) Разработаны варианты реализации ключевых компонент.
- 4) Разработанные варианты реализованы в виде комплекса алгоритмов и программ.
- 5) Проведены вычислительные эксперименты на 80 множествах точек. По результатам экспериментов видно, что наилучшие результаты показывает метод «Левенберг-Марквардт – градиентное расстояние – квадрика».

Апробация

Основные результаты работы и отдельные её вопросы докладывались и обсуждались на следующих мероприятиях.

- Научные семинары кафедры ВиПМ.
- XVIII Международная конференция студентов, аспирантов и молодых ученых «Перспектив Свободный – 2022», Красноярск.
- IV Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Системы управления, информационные технологии и математическое моделирование», Омск (Диплом I степени). Статья по результатам принята к публикации в материалах конференции.
- XXI Международная конференция имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование», Республика Узбекистан, Карши (Диплом победителя).
- V Всероссийская научно-практическая конференция с международным участием «Системы управления, информационные технологии и математическое моделирование», Омск.
- XXII Международная конференция имени А.Ф. Терпугова «Информационные технологии и математическое моделирование», Томск (Диплом победителя).

Список сокращений

ANPMPC — Approximation by a Nine-dimensional Plane using a Minimal Principal Component, 14

GD — Gradient Descent, или градиентный спуск, 14

GD-ICP — Gradient Descent – Iterative Closest Points, или градиентный спуск – итеративная ближайшая точка, 14

ICP — Iterative Closest Points, или итеративная ближайшая точка, 14

MANPMPC — Modified Approximation by a Nine-dimensional Plane using a Minimal Principal Component, 14

RSS — residual sum of squares (сумма квадратов остатков), 38

ЦФМ — целевая функция минимизации, 17

Список использованных источников

1. Comparison of manually shaped and computer shaped titanium mesh for repairing large frontotemporoparietal skull defects after traumatic brain injury / JM. Luo, B. Liu, ZY. Xie и др. // *Neurosurgery Focus*. – 2012. – Т. 33, № 1. – С. 1–5.
2. Outcomes of cranioplasty with preformed titanium versus freehand molded polymethylmethacrylate implants / J. Höhne, K. Werzmirzowsky, C. Ott и др. // *Journal of Neurological Surgery*. – 2018. – Т. 79, № 3. – С. 200–205.
3. Мишинов, С.В. Краниопластика: обзор методик и новые технологии в создании имплантатов. Современное состояние проблемы / С.В. Мишинов // *Политравма*. – 2018. – № 4. – С. 82–89.
4. Каталог минипластин и инструментов, применяемых для черепно-челюстно-лицевого остеосинтеза : Официальный сайт Конмет. – http://conmet.ru/rk_minpl.html. – (дата обращения: 22.05.2024).
5. Прохоров, А.М. Большая Советская Энциклопедия. 3-е изд. Т. 29. / А.М. Прохоров. – Москва: Советская энциклопедия, 1978. – 640 с.
6. Структура стандарта DICOM : официальный сайт стандарта DICOM. – <https://www.dicomstandard.org/current>. – (дата обращения: 22.05.2022).
7. Кирилин, А. М. МОДЕЛИРОВАНИЕ ТИТАНОВЫХ СЕТЧАТЫХ ИМПЛАНТАТОВ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ И КРИВИЗНЫ ДЛЯ КРАНИОПЛАСТИКИ В СООТВЕТСТВИИ С ЧЕРЕПНЫМ УКАЗАТЕЛЕМ: специальность 01.03.02 “Прикладная математика и информатика”: магистерская работа / Кирилин Артём Максимович; Сибирский федеральный университет. – Красноярск, 2022. – 43 с.
8. Low-cost customized cranioplasty using a 3D digital printing model: a case report / A. Peña, J. Peña-Brambila, J. Torre и др. // *3D Printing in Medicine*. – 2018. – 04. – Т. 4.
9. Importance of Three-Dimensional Modeling in Cranioplasty / H. Aydin, I. Kaya, N. Aydin и др. // *Journal of Craniofacial Surgery*. – 2019. – 05. – Т. Publish Ahead of Print. – С. 1.
10. Robust Ellipse Fitting Using Hierarchical Gaussian Mixture Models /

M. Zhao, X. Jia, L. Fan и др. // IEEE Transactions on Image Processing. – 2021. – 03. – Т. PP. – С. 1.

11. Edlund, Ove. Some Notes on Least Squares, QR-factorization, SVD and Fitting / Ove Edlund // Department of Engineering Sciences and Mathematics. – 2013.

12. Каретин, А.Н. МНК для аппроксимации данных окружностью. – http://mykaralw.narod.ru/articles/mnk_circle.pdf. – 2010. – (дата обращения: 22.05.2024).

13. Кирилин, А. М. Моделирование титановых сетчатых имплантатов оптимальной формы и кривизны для краниопластики в соответствии с черепным указателем / А. М. Кирилин, Д. В. Семенова // Системы управления, информационные технологии и математическое моделирование : Материалы IV Всероссийской научно-практической конференции с международным участием. В 2-х томах, Омск, 19 мая 2022 года / Отв. редактор В.Н. Задорожный. Том I. – 2022. – С. 173–178.

14. Вержбицкий, В.М. Основы численных методов : Учебник для вузов / В.М. Вержбицкий. – Москва: Высшая школа, 2002. – 840 с.

15. Madsen, K. Methods for Non-Linear Least Squares Problems (2nd ed.) / K. Madsen, H. Nielsen, O. Tingleff. – 2004. – С. 60.

16. Chen, Y. Object Modeling by Registration of Multiple Range Images / Y. Chen, G. Medioni // Image Vision Comput. – 1992. – 01. – Т. 10. – С. 145–155.

17. Кирилин, А. М. Аппроксимация множества вокселей поверхностью второго порядка, полученной с помощью главных компонент / А. М. Кирилин, В. Р. Куликов // Системы управления, информационные технологии и математическое моделирование : Материалы V Всероссийской научно-практической конференции с международным участием, Омск, 25–26 апреля 2023 года / Отв. редактор В.А. Бадрызлов. – 2023. – С. 403–409.

18. Кирилин, А. М. Об одном методе аппроксимации височной зоны черепа поверхностью второго порядка / А. М. Кирилин, Д. В. Семенова, В. Р. Куликов // Информационные технологии и математическое моделирование (ИТММ-2023) : Материалы XXII Международной конференции имени А.Ф. Терпугова, Томск, 04–09 декабря 2023 года. – 2023. – С. 285–290.

19. Ильин, В.А. Линейная алгебра Учеб. Для вузов — 4-е изд / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. – Москва: Наука. Физматлит, 1999. – 296 с. – ISBN 5-02-015230-7.
20. K., Pearson. On lines and planes of closest fit to systems of points in space / Pearson K. // The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science. – 1901. – № 2. – С. 559–572.
21. Айвазян, С. А. Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности / С. А. Айвазян, В. М. Бухштабер; под редакцией С. А. Айвазян. – Москва : Финансы и статистика, 1989. – 607 с. – ISBN 5-279-00054-X.
22. Snyder, J. M. Interval analysis for computer graphics / J. M. Snyder // ACM SIGGRAPH Computer Graphics. – 1992. – Т. 26. – С. 121–130.
23. Метод `least_squares` : пакет SciPy : официальная документация. – https://docs.scipy.org/doc/scipy/reference/generated/scipy.optimize.least_squares.html#scipy.optimize.least_squares. – (дата обращения: 22.05.2024).
24. Пакет SymPy : официальная документация. – <https://docs.sympy.org/>. – (дата обращения: 22.05.2024).

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра высшей и прикладной математики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой

 /С. Г. Мысливец

«21»  2024 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

РАЗЛИЧНЫЕ МЕТОДЫ АППРОКСИМАЦИИ МНОЖЕСТВА ТОЧЕК ПОВЕРХНОСТЬЮ В ИНТЕРЕСАХ КРАНИОПЛАСТИКИ

Направление 01.04.02 Прикладная математика и информатика
Магистерская программа 01.04.02.06 Прикладная математика и
информатика в гуманитарных и социально-экономических науках

Руководитель


21.06.24

доцент, кандидат физико-
математических наук.

В. Р. Куликов

Выпускник


21.06.24

А. М. Кирилин

Нормоконтролер


21.06.24

Т. Н. Шипина

Красноярск 2024