

Министерство науки и высшего образования РФ  
Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«**СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**»  
Институт математики и фундаментальной информатики  
Кафедра алгебры и математической алгебры

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

\_\_\_\_\_ Я. Н. Нужин

« \_\_\_\_ » \_\_\_\_\_ 20\_\_ г.

## **БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА**

01.03.01 – Математика

Коммутативные полуполя Коэна-Гэнли размерности 2 над средним ядром

Руководитель	_____	профессор, доктор физико- математических наук	О. В. Кравцова
Выпускник	_____		И. К. Кузьмин
Нормоконтролер	_____		Т. Н. Шипина

Красноярск 2024

## РЕФЕРАТ

Выпускная квалификационная работа по теме «Коммутативные полуполя Коэна-Гэнли размерности 2 над средним ядром» содержит 25 страниц текста, 3 приложения, 5 использованных источников.

ПОЛУПОЛЕ, РЕГУЛЯРНОЕ МНОЖЕСТВО, ПРАВЫЙ СПЕКТР, ПРАВОУПОРЯДОЧЕННЫЙ МИНИМАЛЬНЫЙ МНОГОЧЛЕН, ПРАВОЦИКЛИЧЕСКИЙ ЭЛЕМЕНТ, АВТОМОРФИЗМ.

Цель работы — решение структурных вопросов В. М. Левчука для полуполей Коэна-Гэнли порядка 81 и некоторых других полуполей порядка  $p^4$ .

В работе решены структурные вопросы В. М. Левчука, а именно:

1. Среднее ядро является единственным максимальным подполем в полуполе Коэна-Гэнли порядка 81, оно имеет порядок 9.

2. Мультипликативная лупа  $Q^*$  полуполя Коэна-Гэнли порядка 81 является однопорожждённой. Более того, это полуполе право- и левоциклическое, право- и левопримитивное.

3. Правый (и левый) спектр полуполя Коэна-Гэнли порядка 81 равен  $\{1, 2, 4, 5, 8, 10, 12, 16, 24, 40, 80\}$ .

4. Коммутативное полуполе Коэна-Гэнли порядка 81 допускает только тождественный автоморфизм.

Результаты обобщены для общего случая порядка  $p^4$ .

## ВВЕДЕНИЕ

Наиболее изученными алгебраическими системами с двумя бинарными операциями являются конечные поля (поля Галуа). Отказ от ассоциативности умножения приводит к появлению конечных полуполей, а дальнейшее ослабление дистрибутивности до односторонней приводит к квазиполям — левым или правым.

Исследования конечных квазиполей и полуполей начались почти столетие назад, в 1905-1906 гг. и были связаны с конечными проективными плоскостями трансляций. Первые примеры неассоциативных полуполей были построены Л. Е. Диксоном, О. Вебленом, Д. Веддерберном. До 1975 года для квазиполей часто использовался термин "системы Веблена — Веддерберна".

На текущий момент известны 28 классов конечных полуполей, см., например, [1]. Среди них скрученные поля Альберта, бинарные полуполя Кнута, полуполя Коултера–Мэтьюза и другие. Список постоянно пополняется конечными и бесконечными сериями примеров. Классификационных результатов пока ещё очень мало, в связи с чем особую важность представляют результаты о структуре этих алгебраических систем. Свойства квазиполей и полуполей применяются и в других областях математики, таких как проективная геометрия, теория кодирования и комбинаторика.

В 2013 году в докладе на научно-исследовательском семинаре кафедры высшей алгебры ММФ МГУ Владимиром Михайловичем Левчуком были предложены следующие вопросы строения конечных квазиполей.

1. Перечислить максимальные подполя, найти их число и возможные порядки.
2. Выявить конечные квазиполя  $Q$  с неоднопорожденной лупой  $Q^*$ .
3. Выявить, какие возможны спектры лупы  $Q^*$  конечного квазиполя  $Q$ .
4. Найти порядок группы автоморфизмов.

Целью данной работы является решение структурных вопросов В. М. Левчука для полуполей Коэна–Гэнли порядка 81 и некоторых других полуполей порядка  $p^4$ . Для выполнения поставленных целей разработан пакет прикладных программ на языке программирования C++, доказаны соответствующие теоретические результаты (теоремы 4.1 и 4.2).

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Lavrauw, M. Finite semifields / M. Lavrauw, O. Polverino // *Current Research Topics in Galois Geometry* / editors L. Storme, J. De Beule. — New York, 2012. — P. 131—160.
2. Кравцова, О. В. Вопросы строения конечных почти-полей / О. В. Кравцова, В. М. Левчук // *Труды Института математики и механики УрО РАН*. — 2019. — Т. 25, № 4. — С. 107—117.
3. Kravtsova, O. V. Minimal polynomials in finite semifields / O. V. Kravtsova // *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*. — 2018. — Vol. 11, № 5. — P. 588—596.
4. Кравцова, О. В. О примитивности и цикличности конечных полуполей / О. В. Кравцова // Конференция «Алгебра и её приложения», посвящённая 70-летию пермской алгебраической школы С. Н. Черникова : тезисы докладов / Пермский государственный исследовательский университет, Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН. — Пермь, 2020. — С. 32—33.
5. Cohen, S. D. Commutative Semifields, Two Dimensional over Their Middle Nuclei / S. D. Cohen, M. J. Ganley // *Journal of algebra*. — 1982. — Vol. 75. — P. 373—385.

Федеральное государственное автономное  
образовательное учреждение высшего образования  
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
Институт математики и фундаментальной информатики  
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

 Я. Н. Нужин

«21» 06 2024 г.

**БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА**

Направление 01.03.01 Математика

**КОММУТАТИВНЫЕ ПОЛУПОЛЯ КОЭНА-ГЭНЛИ РАЗМЕРНОСТИ 2  
НАД СРЕДНИМ ЯДРОМ**

Руководитель

  
21.06.24

профессор, доктор физико-  
математических наук

О. В. Кравцова

Выпускник

  
21.06.24

И. К. Кузьмин

Нормоконтролер

  
21.06.24.

Т. Н. Шипина

Красноярск 2024