

УДК 515.16, 515.171

О вещественных торических многообразиях размерности два

Оксана В.Знаменская*

Алексей В.Щуплев†

Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 10.09.2009, окончательный вариант 15.10.2009, принята к печати 10.11.2009

В статье доказывается, что компактное гладкое ориентируемое вещественное двумерное торическое многообразие гомеоморфно тору.

Ключевые слова: вещественные торические многообразия, компактные поверхности.

Торические многообразия являются обобщениями аффинного и проективного пространств. Как известно, среди комплексных торических многообразий существует только одно одномерное компактное гладкое многообразие, а именно сфера Римана $\mathbb{C}P^1$. Следовательно, из классических поверхностей только сфера попадает в этот класс. Однако конструкция торических многообразий без изменений переносится на вещественный случай [1], причем полученные многообразия обладают тем же характеризующим свойством — на них существует атлас с мономиальными соотношениями соседства. Тем самым естественно возникает вопрос о возможности интерпретации классических поверхностей в виде вещественных торических многообразий.

В статье доказывается, что любое гладкое компактное ориентируемое двумерное вещественное торическое многообразие гомеоморфно двумерному тору. Таким образом, среди сфер с p ручками только тор может быть наделен структурой вещественного многообразия с мономиальными соотношениями соседства.

1. Конструкция торических многообразий

Каждое n -мерное комплексное торическое многообразие X содержит комплексный тор $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ в качестве всюду плотного подмножества. Его дополнение состоит из конечного числа торических гиперповерхностей, в свою очередь являющихся торическими многообразиями. В целом же структура многообразия кодируется веером (рациональным коническим полиэдром) Σ в \mathbb{R}^n .

В статье рассматриваются только гладкие компактные многообразия, которым соответствуют полные веера, образующие покрытие \mathbb{R}^n примитивными симплицальными конусами. Напомним, что конус является симплицальным и примитивным, если все его целочисленные образующие линейно независимы и их множество можно дополнить до базиса целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$ (см. [2]).

*e-mail: OVZnamenskaya@sfu-kras.ru

†e-mail: alex@lan.krasu.ru

© Siberian Federal University. All rights reserved

В работе [1] конструкция торического многообразия как набора карт с указанием соотношений соседства [2, 3] была перенесена на вещественный случай; при заданном веере Σ вещественное торическое многообразие, полученное таким образом, является замыканием множества $(\mathbb{R} \setminus \{0\})^n \subset (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$ в комплексном торическом многообразии \mathbb{X}_Σ .

Существует, однако, и другой подход к определению торического многообразия, основанный на введении однородных координат [4]. Этот подход обобщает реализацию проективного пространства $\mathbb{C}\mathbb{P}_n$ в виде фактор-пространства:

$$(\mathbb{C}^{n+1} \setminus \{0\})/(\mathbb{C} \setminus \{0\}).$$

Торическое многообразие при этом трактуется как множество мономиальных поверхностей аффинного пространства \mathbb{C}^d , проходящих через некоторое объединение координатных плоскостей. А именно, пусть v_1, \dots, v_d — одномерные образующие полного симплицеального примитивного веера $\Sigma \subset \mathbb{R}^n$. Каждой образующей v_i поставим в соответствие координатную переменную $t_i \in \mathbb{C}$ и рассмотрим пространство \mathbb{C}^d векторов $t = (t_1, \dots, t_d)$. В этом пространстве мы рассматриваем множества

$$Z(\Sigma) = \{t \in \mathbb{C}^d : \prod_{v_i \notin \sigma} t_i = 0 \quad \forall \sigma \in \Sigma\},$$

где через σ обозначен n -мерный конус из Σ , и

$$U(\Sigma) = \mathbb{C}^d \setminus Z(\Sigma).$$

Мономиальные поверхности, проходящие через $Z(\Sigma)$, служат орбитами мультипликативного действия некоторой группы G на \mathbb{C}^d . Эта группа является подгруппой $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^d$ и определена следующим образом:

$$G = \{g = (\mu_1, \dots, \mu_d) \in \mathbb{C}^d : \prod_{i=1}^d \mu_i^{\langle m, v_i \rangle} = 1 \quad \forall m \in \mathbb{Z}^n\}.$$

В действительности среди равенств

$$\prod_{i=1}^d \mu_i^{\langle m, v_i \rangle} = 1$$

только n независимых, поэтому G изоморфна $(\mathbb{C} \setminus \{0\})^{d-n}$.

Комплексное торическое многообразие является фактор-пространством

$$\mathbb{X}_\Sigma := U(\Sigma)/G.$$

Конструкция вещественного торического многообразия, ассоциированного с Σ , полностью аналогична, за исключением того, что в определениях $Z(\Sigma)$, $U(\Sigma)$ и G поле комплексных чисел заменяется на поле вещественных. Таким образом, поставленная задача состоит в отыскании полного симплицеального веера в \mathbb{R}^2 , такого, что соответствующее вещественное торическое многообразие ориентируемо.

Занумеруем минимальные образующие v_i , $i = 1, \dots, d$, одномерных конусов веера Σ в \mathbb{R}^2 против направления обхода часовой стрелки и обозначим через $\sigma(v_i, v_j)$ конус, порожденный образующими v_i и v_j . Веер в \mathbb{R}^2 , состоящий из конусов, порожденных парами соседних

образующих, автоматически является полным и симплицальным. Он примитивен [3] тогда и только тогда, когда

$$\Delta_{ij} := v_{i1}v_{j2} - v_{i2}v_{j1} = 1, \quad (1)$$

а соответствующее торическое многообразие будет ориентируемо [1] только в том случае, если для каждой образующей $v_i = (v_{i1}, v_{i2})$

$$\text{число } |v_i| = v_{i1} + v_{i2} \text{ нечетно.} \quad (2)$$

2. Вид веера ориентируемого торического многообразия

Введем следующие вспомогательные векторы в \mathbb{Z}^2 :

$$e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1), e_3 = (-1, 0), e_4 = (0, -1),$$

$$e_5 = (1, 1), e_6 = (-1, 1), e_7 = (-1, -1), e_8 = (1, -1)$$

и сопоставим им полуплоскости

$$\Pi_k = \{v \in \mathbb{R}^2 : \langle v, e_k \rangle > 0\}, \quad k = 1, \dots, 8.$$

Лемма 1. Пусть Σ — веер в \mathbb{R}^2 , удовлетворяющий условиям (1), (2), и вектор e_k лежит во внутренней конуса $\sigma = \sigma(v_i, v_j)$ из Σ . Тогда выполняется одно из условий:

- i) $\sigma \not\subset \Pi_k$;
- ii) σ — координатный квадрант.

Доказательство. Пусть вектор e_k лежит на координатной оси ($k = 1, 2, 3, 4$). Покажем, что в условиях леммы $\sigma \not\subset \Pi_k$. Действительно, если $\sigma \subset \Pi_k$, то произведения $v_{i1}v_{j2}$ и $v_{i2}v_{j1}$ ненулевые и имеют разные знаки, поэтому модуль определителя $\Delta_{ij} = v_{i1}v_{j2} - v_{i2}v_{j1}$ должен быть больше 1. Но это противоречит условию (2).

Рассмотрим теперь случай расположения e_k на биссектрисах координатных квадрантов ($k = 5, \dots, 8$). Очевидно, что если σ — координатный квадрант, то для него выполняются условия (1) и (2). Кроме того, если σ лежит в Π_k , то он содержит e_k и, таким образом, удовлетворяет условиям леммы.

Покажем, что если σ не является координатным квадрантом, то $\sigma \not\subset \Pi_k$. Предположим, что $\sigma \subset \Pi_k$. Тогда возможны три варианта расположения образующих v_i, v_j конуса σ относительно координатного квадранта I_k , содержащего e_k (рис. 1):

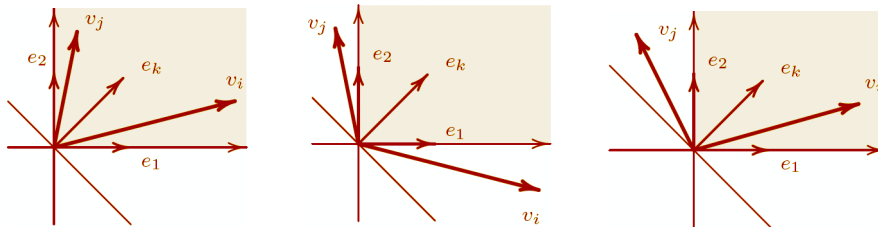


Рис. 1

- a) образующие v_i и v_j лежат в I_k ;
- b) координатный квадрант I_k является подмножеством конуса σ ;

с) одна из образующих конуса σ лежит в I_k , а вторая — нет.

Последний случай расположения сразу исключается предыдущим рассуждением, поскольку σ содержит один из координатных векторов e_k , $k = 1, \dots, 4$ и лежит в соответствующей ему координатной полуплоскости Π_k .

Рассмотрим случаи а) и б). Покажем, что если $\sigma \subset \Pi_k$, то $|\Delta_{ij}| > 1$, что противоречит условию (1). Имеем

$$|\Delta_{ij}| = |v_{i1}v_{j2} - v_{i2}v_{j1}| = ||v_{i1}v_{j2}| - |v_{i2}v_{j1}||. \quad (3)$$

Действительно, в случаях а) и б) знаки обоих множителей в каждом из произведений $v_{i1}v_{j2}$ и $v_{i2}v_{j1}$ одинаковые, поскольку в первом случае образующие лежат в одном квадранте, а во втором — в симметричных относительно начала координат квадрантах. Значит, и сами эти произведения имеют одинаковые знаки, откуда и следует (3).

Отметим, что в условии леммы при $5 \leq k \leq 8$ одна из образующих $\sigma(v_i, v_j)$ лежит во множестве $D_1 = \{(x, y) : |x| > |y|\}$, а вторая — во множестве $D_2 = \{(x, y) : |x| < |y|\}$. Пусть, например, $v_i \in D_1$, тогда его компоненты можно представить в виде:

$$\begin{aligned} |v_{i1}| &= p + |v_{i2}|, \\ |v_{j2}| &= q + |v_{j1}|, \quad \text{где } p, q \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Подставив последние равенства в $|\Delta_{ij}|$, получим, что

$$|\Delta_{ij}| = |pq + |v_{i2}|q + |v_{j1}|p| = pq + |v_{i2}|q + |v_{j1}|p > 1.$$

Таким образом, и в этих случаях $\sigma \not\subset \Pi_k$. \square

Лемма 2. Пусть $\sigma = \sigma(v_i, v_j)$, где $v_i = (v_{i1}, -1)$, $v_j = (v_{j1}, -1)$, тогда σ нельзя подразбить на конусы, удовлетворяющие условиям (1) и (2).

Доказательство. Заметим вначале, что компоненты v_{i1} и v_{j1} обязательно четные, поскольку σ — конус из веера Σ , удовлетворяющего условию (2). Пусть $v_{i1} = 2p$, $v_{j1} = 2q$, $p, q \in \mathbb{Z}$.

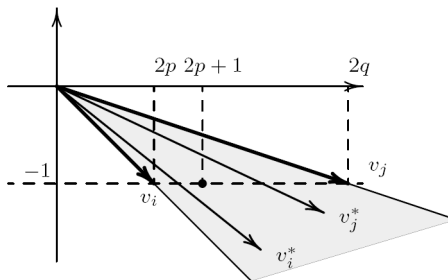


Рис. 2

Предположим, что σ можно подразбить на конусы, каждый из которых удовлетворяет условиям (1) и (2). Вектор $(2p+1, -1)$ лежит в σ и не является образующим, следовательно, он лежит и в некотором примитивном конусе $\sigma^*(v_i^*, v_j^*)$ подразделения σ (см. рис. 2). Это означает, что $(2p+1, -1)$ является линейной комбинацией образующих v_i^* и v_j^* , т.е. найдутся такие $\alpha, \beta \in \mathbb{N}$, что

$$\begin{cases} \alpha v_{i1}^* + \beta v_{j1}^* = 2p + 1, \\ \alpha v_{i2}^* + \beta v_{j2}^* = -1. \end{cases}$$

Поскольку $v_{i2}^* \leq v_{i2} = -1$ и $v_{j2}^* \leq v_{j2} = -1$, второе равенство системы не может быть выполнено. Следовательно, подразбиения конуса σ не существует. \square

Унимодулярное преобразование веера Σ индуцирует мономиальный изоморфизм соответствующих торических многообразий. Покажем, что любой веер Σ с условиями (1) и (2) можно унимодулярным преобразованием привести к вееру *канонического вида*, то есть содержащему положительный квадрант.

Лемма 3. *Существует унимодулярное преобразование A , переводящее фиксированный конус $\sigma(v_i, v_j)$ из Σ со свойствами (1) и (2) в положительный квадрант и сохраняющее ориентированность многообразия.*

Доказательство. Пусть $\sigma(v_i, v_{i+1})$ — произвольный фиксированный конус в Σ . Преобразование

$$\begin{pmatrix} v_{i+1,2} & -v_{i+1,1} \\ -v_{i2} & v_{i1} \end{pmatrix}$$

унимодулярно и $Av_i = e_1$, $Av_{i+1} = e_2$.

Убедимся, что A сохраняет ориентированность многообразия. Для этого достаточно показать, что модуль суммы координат $|v'_j|$ образа $v'_j = A \cdot v_j$ произвольного вектора $v_j \in \Sigma$ имеет ту же четность, что и $|v_j|$. Без ограничения общности предположим, что $v_i = (2n, 2m + 1)$ и $v_{i+1} = (2p + 1, 2q)$, где $m, n, p, q \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$\begin{pmatrix} 2q & -(2p + 1) \\ -(2m + 1) & 2n \end{pmatrix}$$

и образ v'_i при отображении A имеет вид

$$v'_i = A \cdot v_j = \begin{pmatrix} 2(qv_{j1} - pv_{j2}) - v_{j2} \\ 2(nv_{j2} - mv_{j1}) - v_{j1} \end{pmatrix}.$$

Четность соответствующих компонент вектора v'_i совпадает с четностью компонент v_{j1} и v_{j2} .

Таким образом, преобразование A переводит данный веер Σ в веер канонического вида с сохранением условий (1) и (2). \square

Далее без ограничения общности будут рассматриваться веера, приведенные к каноническому виду. Положим $v_1 = e_1$, $v_2 = e_2$.

Предложение 1. *Любой веер Σ канонического вида, удовлетворяющий условиям (1) и (2) содержит лишь четыре двумерных конуса с образующими $e_1, e_2, e_3, v = (a, -1)$ либо $e_1, e_2, e_4, v = (-1, a)$, где число a — четное (рис. 3).*

Доказательство. Очевидно, веер Σ не может содержать только три двумерных конуса. Поскольку Σ полный, в него обязательно входит конус $\sigma(v_i, v_j)$, содержащий e_8 . Пусть вектор $v_j \in \sigma(e_8, e_1)$. В силу леммы 1 исключаются все варианты расположения векторов v_i и v_j относительно векторов e_k , кроме следующих (рис. 4):

- конус $\sigma(v_i, v_j)$ совпадает с квадрантом, порожденным векторами e_1 и e_4 ;
- вектор $v_j = e_1$ и v_i лежит во внутренности конуса с образующими e_3 и e_7 ;
- вектор $v_i = e_3$ и v_j лежит во внутренности конуса с образующими e_8 и e_1 .

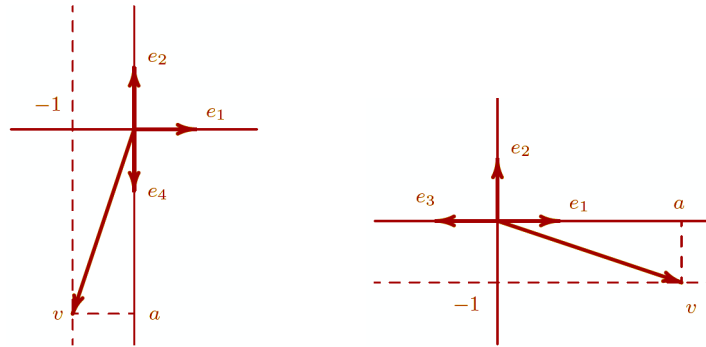


Рис. 3

В случае а) веер Σ содержит конусы $\sigma(e_1, e_2)$ и $\sigma(e_1, v_d)$ с образующей $v_d = e_4$. Ввиду условия (1) на конусы веера заключаем, что $v_3 = (-1, a)$, а $v_{d-1} = (-1, b)$. Заметим, что конус, порожденный векторами $(-1, a)$ и $(-1, b)$, не обладает свойством (1), более того, согласно леммам 1 и 2 он не может быть подразбит на конусы, обладающие этим свойством. Следовательно, полуплоскость Π_3 содержит только одну образующую вида $(-1, a)$ и конусы в Σ в этом случае порождены векторами $e_1, e_2, e_4, v = (-1, a)$, где $a = 2k$.

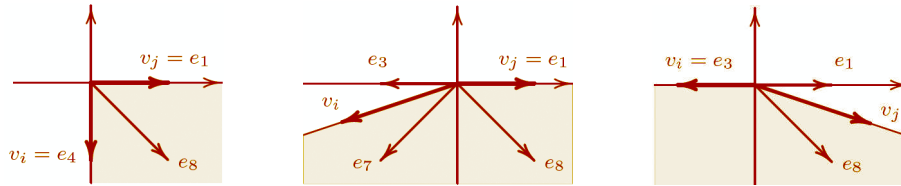


Рис. 4

В случае б) веер Σ содержит конусы $\sigma(e_1, e_2)$ и $\sigma(v_d, e_1)$, $v_d = v_i$. Рассмотрим подразбиение конуса $\sigma(v_2, v_d)$, который сам не является примитивным и потому не содержится в Σ . Согласно лемме 1, примененной к векторам e_3 и v_d , образующие веера Σ не лежат в координатном квадранте, порожденном e_2 и e_3 , а по лемме 2 их не будет и в конусе, образованном векторами e_d и e_3 . Таким образом, Σ имеет всего четыре образующие e_1, e_2, e_d и e_3 , причем из требования (1) следует, что $v_d = (a, -1)$, а из условия (2) — что a четно.

Рассуждая аналогично, в случае с) получим, что Σ также содержит четыре двумерных конуса с образующими $e_1, e_2, e_3, v = (a, -1)$. \square

3. Реализация ориентируемых торических поверхностей в виде тора

Здесь мы докажем основной результат, сформулированный в начале статьи. Напомним его формулировку.

Теорема 1. *Любое гладкое компактное ориентируемое двумерное вещественное торическое многообразие гомеоморфно двумерному тору.*

Доказательство. Заметим, что комплексные торические многообразия, определяемые веерами, удовлетворяющими условиям (1) и (2), согласно предложению 1 являются поверхностями Хирцебруха. Поверхность Хирцебруха представляет собой локально-тривиальное

расслоение, база и слой которого есть сфера Римана $\mathbb{C}\mathbb{P}_1$. Вещественная часть такого расслоения гомеоморфна либо тору, либо бутылке Клейна, которая исключается ввиду ее неориентируемости. \square

Приведем в заключение элементарное доказательство теоремы, опирающееся на представление торического многообразия в виде фактор-пространства.

Согласно предложению 1, веер гладкого компактного ориентируемого вещественного многообразия \mathbb{X} имеет лишь четыре образующих $e_1, e_2, e_3, v = (a, -1)$ либо $e_1, e_2, e_4, v = (-1, a)$, причем a четно. Торические многообразия, соответствующие этим веерам, изоморфны, поскольку веер одного вида преобразуется в веер другого поворотом.

Торическое многообразие \mathbb{X}_a , соответствующее вееру с образующими $e_1, e_2, e_3, v = (a, -1)$, можно определить как фактор $\mathbb{R}^4 \setminus Z$ по действию группы G , где Z — объединение двух плоскостей $t_1 = t_3 = 0$ и $t_2 = t_4 = 0$ в \mathbb{R}^4 , а $g = (\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4) \in G$, если $\mu_1/\mu_3\mu_4^{-a} = \mu_2/\mu_4 = 1$. Обозначая $\lambda_1 = \mu_3$ и $\lambda_2 = \mu_4$, заметим, что G действует на (t_1, t_2, t_3, t_4) по правилу:

$$(\lambda_1\lambda_2^{-a}t_1, \lambda_2t_2, \lambda_1t_3, \lambda_2t_4), \quad (\lambda_1, \lambda_2) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\})^2. \quad (4)$$

Покажем, что множество

$$E = \{t_1^2 + t_3^2 = 1, t_2^2 + t_4^2 = 1, t_3 \geq 0, t_4 \geq 0\},$$

которое представляет собой декартово произведение двух полуокружностей (рис. 5), является экраном, т.е. что его пересекают все орбиты действия группы G .

Действительно, орбита (4) точки (t_1, t_2, t_3, t_4) пересекает E , если система уравнений и неравенств

$$(\lambda_1\lambda_2^{-a}t_1)^2 + (\lambda_1t_3)^2 = 1, \quad \lambda_1t_3 \geq 0, \quad (\lambda_2t_2)^2 + (\lambda_2t_4)^2 = 1, \quad \lambda_2t_4 \geq 0 \quad (5)$$

разрешима относительно вещественных λ_1 и λ_2 . Из второго уравнения и последующей подстановки в первое уравнение получаем

$$\lambda_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{\lambda_2^{-2a}t_1^2 + t_3^2}}, \quad \lambda_2 = \pm \sqrt{\frac{1}{t_2^2 + t_4^2}}. \quad (6)$$

Поскольку (t_1, t_3) и (t_2, t_4) лежат в \mathbb{R}_*^2 , т.е. t_i не обращаются в нуль одновременно, мы видим, что разрешимость указанной системы всегда имеется. Ввиду ограничений $\lambda_1t_3 \geq 0$, $\lambda_2t_4 \geq 0$ выбор знаков перед квадратными корнями однозначно определен, если $t_3 \neq 0$, $t_4 \neq 0$. Это означает, что если орбита пересекает E во внутренней точке, то эта точка единственная.

Исследуем теперь вопрос о том, как орбиты пересекают экран E в граничных точках ∂E . Зафиксируем точку $P = (t_1, t_2, t_3, t_4) \in \partial E$. Для ее координат имеем $t_1^2 + t_3^2 = 1$, $t_2^2 + t_4^2 = 1$. Поэтому на основании (6) можно заключить, что орбита точки P пересекает экран при $\lambda_1 = \pm 1$, $\lambda_2 = \pm 1$, т.е. не более чем в четырех точках; при этом значения $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ соответствуют самой точке P . Но поскольку $P \in \partial E$, хотя бы одна из координат t_3, t_4 равна нулю.

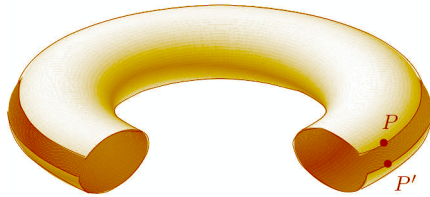


Рис. 5

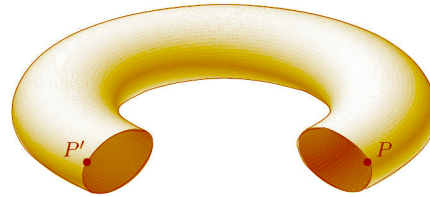


Рис. 6

Рассмотрим два случая

а) Пусть $t_3 = 0$, $t_4 \neq 0$. В этом случае P – точка вида $(\pm 1, t_2, 0, t_4)$. Тогда из неравенства $\lambda_2 t_4 \geq 0$ в (5) следует, что решения (6) составляют значения $\lambda_1 = \pm 1$, $\lambda_2 = 1$. Это означает, что орбита точки P пересекает экран E еще в одной (отличной от P) точке

$$P' = (\lambda_1 \lambda_2^{-a} \cdot (\pm 1), \lambda_2 t_2, \lambda_1 \cdot 0, \lambda_2 t_4) = (\pm 1, t_2, 0, t_4),$$

отличающейся от P лишь знаком в первой координате.

б) Пусть теперь $t_3 \neq 0$, $t_4 = 0$. Рассмотрим, как производится склейка точек множества в этом случае. Так как из неравенства $\lambda_1 t_3 \geq 0$ в (5) следует, что решения (6) составляют значения $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \pm 1$, то среди точек ∂E орбите точки $P = (t_1, \pm 1, t_3, 0)$ принадлежат лишь

$$P' = (\lambda_1 \lambda_2^{-a} t_1, \lambda_2 \cdot (\pm 1), \lambda_1 t_3, \lambda_2 \cdot 0) = ((\pm 1)^{-a} t_1, \pm 1, t_3, 0) = (t_1, \pm 1, t_3, 0).$$

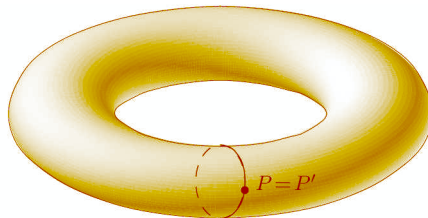


Рис. 7

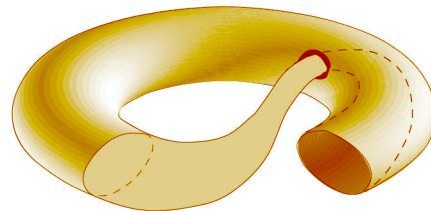


Рис. 8

Таким образом, в гомеоморфном прямоугольнику экране E отождествляются точки противоположных сторон (рис. 5, 6) так, что в результате получается тор, изображенный на рис. 7. Отметим, что в случае б) при нечетном a точки граничных окружностей E отождествляются таким образом, что получается бутылка Клейна (рис. 8).

Работа выполнена при содействии гранта поддержки ведущих научных школ РФ (НШ – 2427.2008.1), грантом Рособразования "Развитие научного потенциала высшей школы" №2.1.1/4620 и гранта СФУ.

Список литературы

- [1] Т.О.Ермолаева, А.К.Цих, Интегрирование рациональных функций по \mathbb{R}^n с помощью торических компактификаций и многомерных вычетов, *Матем. сб.*, **187**(1996), №9, 45-64.
- [2] W.Fulton, Introduction to toric varieties, Princeton Univ. Press, 1993.

- [3] Хованский А.Г. Многогранники Ньютона (разрешение особенностей), *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики (фундаментальные направления)*, М., ВИНТИ, **22**(1985), 207-239.
- [4] Cox D.A., The homogeneous coordinate ring of a toric variety, *J. Algebraic Geom.*, **4**(1995), 17-50.

On Real Toric Varieties of Dimension Two

Oksana V.Znamenskaya
Alexey V.Schuplev

We prove that a compact smooth orientable real two-dimensional toric variety is homeomorphic to a torus.

Keywords: real toric varieties, compact surfaces.