Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра теории функций

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
Цих А.К.
«__» __________ 2023г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ О РЕШЁТОЧНЫХ ПУТЯХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Направление 01.04.01 Математика

Магистерская программа 01.04.01.01 Комплексный анализ

Руководитель	профессор, доктор физико-математических наук	Е.К.Лейнартас
Выпускник		А.Е. Зернова
Нормоконтролер		Т.Н. Шипина

Красноярск 2023

АННОТАЦИЯ

Цель работы – изучить теорию формальных рядов нескольких переменных, методы решения разностных уравнений нескольких переменных и применить их в задаче перечисления решёточных путей с ограничениями.

В основе исследований лежит теория формальных рядов и метод ядра.

В результате исследований найдено число путей, не проходящих через заданное конечное множество точек целочисленной решётки, а также получено существенно продвижение в решении задачи нахождения производящей функции для последовательности числа решёточных путей в первом квадранте целочисленной решётки, ограниченной прямой с рациональным уклоном, с различными начальными условиями.

Ключевые слова: разностные уравнения, производящая функция, целочисленная решётка, решёточные пути, начальные условия, прямая с рациональным уклоном, формальные ряды, метод ядра.

ANNOTATION

The purpose of the work is to study the theory of formal series of several variables, methods for solving recursion equations of several variables and apply them to the problem of enumeration of lattice restricted paths.

The research is based on the theory of formal series and the kernel method.

As a result of research, the number of paths that do not pass through a given finite set of points of an integer lattice is found. Also significant progress has been made in solving the problem of finding the generating function for the sequence of the number of lattice paths in the first quadrant of an integer lattice bounded by a straight line with a rational slope, with different initial conditions.

Keywords: difference equations, generating function, integer lattice, lattice paths, initial conditions, straight line with rational slope, formal series, kernel method.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи в комбинаторном анализе требуют значительных вычислительных ресурсов. Если задача имеет решение f_n, зависящее от натурального числа n, то часто её можно свести к решениям нескольких более простых задач, зависящих от натуральных чисел, меньших n. Такие задачи можно решить путём сведения к решению некоторого рекуррентного соотношения (от лат. Recurrere – возвращаться). То есть для определения решения очередной подзадачи необходимо обратиться к решениям, вычисленным ранее. А вычисление решения предшествующей подзадачи требует обращения к вычислениям, выполненным ещё раньше, и так далее. Такой подход часто используется в задачах комбинаторного анализа. Например, в задачах с числами Каталана, Моцкина или в задачах о случайном блуждании точки на целочисленной решётке, в задачах о путях, состоящих из заранее заданного множества шагов, о которых пойдёт речь далее.

Цель работы: изучить методы теории многомерных разностных уравнений и производящих функций и применить их в задаче перечисления решёточных путей с ограничениями.

В главе 1 дана необходимая теоретическая справка. В параграфе 1.1 описана теория разностных уравнений одной и нескольких переменных. В параграфе 1.2 дана теория формальных рядов нескольких переменных в общем [4] и производящих функций одно- и двухиндексных последовательностей в частности [3]. В параграфе 1.3 описан метод ядра [12] и дан пример решения разностного уравнения этим способом.

Глава 2 работы посвящена задачам перечисления решёточных путей с ограничениями. В параграфе 2.1 формулируется общая задача о числе решёточных путей, имеющих некоторые ограничения конечным или бесконечным множеством.

Параграф 2.2 посвящён задаче, когда ограничивающее множество конечно, и точки, через которые не может проходить ни один путь, заранее заданы.

В параграфах 2.3-5 рассмотрена задача с бесконечным «запрещённым множеством», когда пути ограничены осью ординат и некоторой прямой с рациональным уклоном. Рассмотрена задача:

Пусть число q – целое положительное число. Требуется найти производящую функцию для числа $f(x, y)$ путей с началом в точке $(0, 0)$, шагами $(0,1)$ и $(1,0)$, которые оканчиваются в точке с координатами (x, y) и лежат на или выше прямой $qy = x$.

В работе [1] эта задача в более общем виде для прямой $qy = px$ решается как иллюстрация разработанных в ней методов, в частности, предполагается использование интерполяционных формул Эрмита и Лагранжа, а также теоремы обращения Лагранжа.

В магистерской диссертации рассматриваются другие методы, которые для произвольного q позволяют найти решение задачи. Наиболее подробно разобраны случаи, когда $q = 1$ и $q = 2$, а решёточные пути остаются выше или на прямой $y = x$ или $2y = x$.

В параграфе 2.3 Рассматривается метод решения описанной выше задачи с помощью разностного уравнения с постоянными коэффициентами.

Для произвольного q последовательность числа решёточных путей имеет следующее основное рекуррентное соотношение:

$$f_{x+1,y+1} = f_{x+1,y} + f_{x,y+1},$$

с начальными данными $f_{0,k} = f_1(k), f_{k,0} = f_2(k), f_1(0) = f_2(0)$, и

$$f_{x,y} = 0 \qquad \forall (x,y): x > qy.$$

В параграфе 2.4 рассматривается решение этой же задачи, но с помощью решения разностного уравнения с переменными коэффициентами.

Для произвольного q последовательность числа решёточных путей имеет следующее основное рекуррентное соотношение:

$$f_{x+1,y+1} = f_{x+1,y} + f_{x,y+1} - \left(\sum_{j=1}^{q} \chi_0(qy - x + j - 1) \right) \cdot f_{x+1,y},$$

где

$$\chi_0(k) = \begin{cases} 1, k = 0, \\ 0, k \neq 0; \end{cases}$$

с начальными данными $f_{0,k} = f_1(k), f_{k,0} = f_2(k), f_1(0) = f_2(0)$.

Из этого соотношения была получена производящая функция последовательности $f_{x,y}$

$$F(z,w) = \frac{(1-z)F(z,0) + (1-w)F(0,w) - f_{0,0} - \sum_{j=1}^{q} \left(wz^j \right) D_j(z^q w)}{1 - z - w},$$

где

$$F(z,0) = \sum_{x \geq 0} f_{x,0} z^x, \qquad F(0,w) = \sum_{y \geq 0} f_{0,y} w^y,$$

$$D_j(z^q w) = \sum_{k \geq 0} f_{qk+j,k} \cdot (z^q w)^k, j = 1, \dots, q.$$

Функция $F(z,w)$ зависит от начальных данных и функций $D_j(z^q w)$.

В параграфе 2.5 для решения задачи применён метод ядра, и была получена производящая функция

$$F(z,w)=\frac{w-zF(z,0)}{w-z-zw^{q+1}},$$

которая зависит только от одной функции $F(z,0)$.

1 Разностные уравнения и производящие функции

1.1 Разностные уравнения

Разностное уравнение – это уравнение вида

$$F(x, f_x, f_{x+1}, \dots, f_{x+k}) = 0, \qquad x \in \mathbb{Z}_{\geq 0},$$

где k – фиксированное число, называемое порядком разностного уравнения, $x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$, а $f_x, f_{x+1}, \dots, f_{x+k}$ – члены числовой последовательности. Решить такое уравнение означает найти все такие последовательности $\{f_x\}_{x=0}^{\infty}$, которые при подстановке их в данное уравнение обратят его в тождество, и показать, что других нет.

Общим решением разностного уравнения порядка k называется его решение вида $f_x = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_k)$, которое зависит от k произвольных независящих друг от друга постоянных $C_1, C_2, \dots, C_k$. Если же в общем решении произвольным постоянным придать конкретные значения, то мы получим частное решение разностного уравнения.

В работе нам потребуются линейные разностные уравнения конечного порядка с постоянными коэффициентами:

$$f(x+k) + a_{k-1}f(x+k-1) + \dots + a_0 f(x) = g(x), x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, \tag{1.1.1}$$

где $a_i \in \mathbb{C}$, $a_k \neq 0, a_0 \neq 0$ – заданные числа, $g(x)$ – заданная функция целочисленного аргумента.

Решением такого разностного уравнения является сумма некоторого частного решения уравнения (1.1.1) и общего решения соответствующего однородного уравнения

$$f_{n+k} + a_{k-1}f_{n+k-1} + \cdots a_1 f_{n+1} + a_0 f_n = 0\ . \tag{1.1.2}$$

Множество решений линейного однородного разностного уравнения k-го порядка образует линейное пространство размерности k, а любой набор его линейно независимых решений является его базисом.

Признаком линейной независимости набора k решений разностного уравнения является неравенство нулю определителя Казорати

$$\Delta = \begin{vmatrix} f_n^1 & \cdots & f_n^k \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n+k-1}^1 & \cdots & f_{n+k-1}^k \end{vmatrix}.$$

Однородному уравнению соответствует характеристический многочлен

$$P(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0,$$

а его нули определяют вид фундаментальной системы решений данного уравнения. Если известны корни λ_j его характеристического уравнения

$$p(\lambda) = \lambda^k + a_{k-1}\lambda^{k-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0\,,$$

и $a_0 \neq 0$, то всякое решение уравнения представляется в виде

$$x(n) = \sum_j C_j(n)\lambda_j^n, n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}\,, \tag{1.1.3}$$

где $C_j(n)$ – многочлен относительно n, степень которого не превосходит кратности корня λ_j.

В одномерной ситуации формула (1.1.3) даёт полное описание пространства решения уравнения (1.1.2), однако на многомерный случай эта формула не может быть перенесена, поскольку решения однородного уравнения (1.1.2) не исчерпываются элементарными, а в общем случае пространство решений бесконечномерно.

Иной подход к описанию пространства решений разностного уравнения, который используется при переходе к случаю пространства большей размерности, состоит в следующем:

Очевидно, что решение неоднородного уравнения

$$f(x+m)+a_{m-1}f(x+m-1)+\cdots+a_0f(x)=g(x), x\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$$

полностью определяется своими значениями f_x в m начальных точках

$$f(x)=f_x, x=0,1,\dots,m-1, \tag{1.1.4}$$

т. е. имеет место задача Коши:

Найти функцию $\mathrm{f}: \mathbb{Z}_{\geq 0}\to\mathbb{C}$, удовлетворяющую уравнению (1.1.1) и начальным условиям (1.1.4),

которая имеет одно и только одно решение.

Начальные данные позволяют однозначно определить произвольные константы в общем решении (1.1.3) однородного уравнения, всякое решение задачи Коши (1.1.1, 1.1.4) естественным образом представляется в виде суммы общего решения (1.1.3) и частного решения уравнения с ненулевой правой частью.

Приведём некоторые сведения из теории многомерных разностных уравнений. Пусть задано конечное множество точек $\alpha^j=\left(\alpha_1^j,\dots,\alpha_n^i\right)$ с целыми координатами, $j=1,\dots,m$.

Будем рассматривать разностное уравнение вида

$$\sum_{j=1}^{m} a^j f\left(x+\alpha^j\right)=g(x), \qquad x\in X\subset\mathbb{Z}^n, \tag{1.1.5}$$

где $f(x)$ – неизвестная функция, $g(x)$ – задана на множестве X, a^j – коэффициенты уравнения.

Для $n>1$ множество решений разностного уравнения (1.1.5) бесконечномерное.

Например, при $n = 2$ и $\alpha^1 = (1,0), \alpha^2 = (0,0), a_1 = 1, a_2 = -1$ уравнение (1.1.5) примет вид:

$$f(x_1 - 1, x_2) - f(x_1, x_2) = 0, \qquad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{Z}^2_{\geq 0},$$

а его решением является произвольная функция $f(x_1, x_2) = h(x_2)$, не зависящая он переменной x_1.

Для того, чтобы выделить из множества решений уравнения (1.1.5) единственное, задают «начальные» (или «граничные») условия

$$f(x) = h(x), \qquad x \in X_0 \subset \mathbb{Z}^n. \tag{1.1.6}$$

В общем виде можно сформулировать задачу Коши:

Для заданных функций h и g целочисленных аргументов найти функцию f(x), удовлетворяющую уравнению (1.1.5) и условиям (1.1.6).

Существование и единственность решения сформулированной задачи зависит от многих параметров: от множества X_0, от множества X, на котором ищется решение задачи и вида левой части уравнения, на котором заданы начальные условия (1.1.4). Различные варианты подстановки вида (1.1.5), (1.1.6) можно найти в работах [1], [3], [4], [5].

Производящие функции от двух переменных соответствуют двухиндексным последовательностям.

Часто удобнее не находить непосредственно саму последовательность $\{f_x\}_{x=0}^{\infty}$, удовлетворяющую условиям задачи, а вычислить так называемую производящую функцию этой последовательности.

1.2 Формальные ряды

Для того, чтобы иметь возможность вычислять производящие функции, необходимо определить понятие формального степенного ряда, дать определение некоторым вспомогательным объектам, а также определить операции, которые можно над ними производить, и их свойства.

Для начала рассмотрим формальные степенные ряды нескольких переменных.

Пусть R – кольцо с единицей. Характеристикой кольца R называется такое наименьшее натуральное число k такое, что $ka = a + a + \dots + a = 0$ для всех $a \in R$.

Характеристика кольца равна нулю, если $ka = 0 \Longrightarrow k = 0$ или $a = 0$ $(a \in R)$.

Определение. Пусть множество $x = \{x_1, x_2, \dots\}$ – это множество формальных коммутирующих переменных (они не принимают какие-либо значения) и пусть

$$R\big[[x]\big] = \big\{\textstyle\sum_{i \geq 0} c_i x^i \,\big|\, c_i \in R, i \geq 0\big\}. \qquad (1.2.1)$$

Элементы этого множества называют формальными степенными рядами, а выражение x^i называется одночленом.

Пусть символы $+$, $\times$ обозначают сложение и умножение формальных степенных рядов соответственно. Тогда множество $R\big[[x]\big]$ является кольцом, а элемент x^0 является его единицей. Если кольцо R не имеет делителей нуля, то и $R\big[[x]\big]$ также является кольцом без делителей нуля. Если $y \subseteq x, y = \{y_1, y_2, \dots\}$, то кольцо $R\big[[y]\big]$ является подкольцом $R\big[[x]\big]$, причем R так же является подкольцом $R\big[[x]\big]$, так как каждый его элемент r можно естественным образом отождествить с элементом вида $rx^0 \in R[[x]]$.

Замечание. Термин «формальный» означает, что не будет находиться область сходимости ряда, не будут вычисляться значения функции $\mathrm{A(x)}$ для конкретных значений переменной x, а будут лишь выполняться некоторые операции над такими рядами и определяться коэффициенты при степенях x. Переменная x является формальной, и сумма $\sum_{\mathrm{i}\geq 0} \mathrm{c_i x^i}$, представленная выше, смысла не имеет. Но верно утверждение $\mathrm{f(0) = a_0}$, то есть мы знаем значение производящей функции в нуле. Таким образом, $\mathrm{f(x)}$ интересует нас не как числовая функция от множества переменных x, а как «носитель» последовательности $(\mathrm{c_n})$.

Пусть $f(x) = \sum_{i\geq 0} c_i x^i \in R[[x]]$.

Определение. c_i называется коэффициентом при x_{i} в формальном степенном ряде $f(x)$, кольцо R – кольцом коэффициентов для кольца $R[[x]]$.

Определение. отображение

$$[x^i]: R[[x]] \to R\colon\ f \to c_i$$

называется коэффициентным оператором на $R[[x]]$. Постоянный член ряда $f(x)$ равен $[x_0]$ и обозначается как $f(0)$.

Обозначим

$$R[[x]]_0 = \{f \in R[[x]] \big| [x^0]f = 0\} \tag{1.2.2}$$

$$R[[x]]_1 = \left\{f \in R[[x]] \middle| \text{существует } \left(f(0)\right)^{-1}\right\}. \tag{1.2.3}$$

Определение. Многочленом кольца $R[[x]]$ называется элемент с конечным числом ненулевых коэффициентов. Множество всех многочленов, содержащихся в кольце $R\big[[x]\big]$, обозначается $R[x]$.

Пусть $x = y \cup z$ – разбиение множества x. Тогда каждый степенной формальный ряд их кольца $R\big[[x]\big]$ можно рассматривать как степенной ряд переменных z с коэффициентами из кольца $R\big[[y]\big]$, и, таким образом, определить естественный изоморфизм $R\big[[x]\big] \cong \big(R\big[[y]\big]\big)\big[[z]\big]$. Ясно, что коэффициент при z^i в степенном ряде $f(x)$ зависит от кольца коэффициентов. Договоримся считать, что

$$\big[z^i\big]f(x) = \big[z^i\big]F(x), \qquad \text{где } F(x) \in \big(R\big[[y]\big]\big)\big[[z]\big]$$

является образом элемента $f \in R\big[[y, z]\big]$ при определённом выше изоморфизме.

Например,

$$[x^n] \sum_{i,j \geq 0} x^i y^j = \sum_{j \geq 0} y^j \,,$$

при любом n.

Определение. Если для $f \in R\big[[y, z]\big]$ выполняется $f \in (R[y])\big[[z]\big], (y \subseteq x)$, то y называется отделённым множеством переменных для f.

Определение. Назовём множество $\mathcal{F} = \{f_j\} \in f \in R\big[[x]\big], j \geq 0$ суммируемым семейством, если каждый одночлен из $R\big[[x]\big]$ встречается с ненулевым коэффициентом в элементах множества $\mathcal{F}$ лишь конечное число раз. Если $\mathcal{F}$ – суммируемое семейство, то операции сложения и умножения формальных степенных рядов удовлетворяют дистрибутивному закону, а операция сложения является коммутативной и ассоциативной.

Пусть $f(x) = \sum_{i \geq 0} c_i x^i \in R\big[[x]\big]$ и $g = (g_1, g_2, \dots), g_j \in R\big[[x]\big], j \geq 0$.

Определение. Композицией f и g называется сумма $f\big(g(x)\big) = \sum_i c_i g^i$.

Композиция является допустимой, если множество $\{c_i g^i | i \geq 0\}$ является суммируемым семейством.

Композиция является ассоциативной операцией. Композиция удовлетворяет дистрибутивному закону относительно операции сложения и умножения в том случае, если все промежуточные композиции являются допустимыми.

Композиция обладает следующими свойствами:

1. Если x – конечное множество переменных и если $g_j \in R[[x]]_0$для всех $j \geq 1$, то $f\big(g(x)\big)$ допустимо для любого g.
2. Если y – отделённое множество для $f \in R[[x]]$ $(y \subseteq x)$, то подстановка в f вместо y набора g допустима для любого g.

Свойство 2 наиболее часто используется, когда вместо y подставляются элементы кольца R. Заметим, что подстановка 0 вместо y допустима всегда.

Утверждение. Если $g \in R[[x]]_1, f = xg$, то существует единственный степенной ряд $f^{[-1]}(x) \in R[[x]]_0$, называемый композиционным обратным к f, такой, что $f\left(f^{[-1]}(x)\right) = f^{[-1]}\big(f(x)\big) = x$.

Ряд $f^{[-1]}(x)$ в явном виде получается с помощью теоремы Лагранжа.

Утверждение. *Если* $f \in R[[x]]_1$, то существует единственный степенной ряд $f^{-1}(x) \in R[[x]]_1$, который называется мультипликативным обратным к $f(x)$, такой, что $f(x)f^{-1}(x) = f^{-1}(x)f(x) = 1$. Этот ряд существует тогда и только тогда, когда $f \in R[[x]]_1$, и в случае коммутативного кольца R задаётся равенством $f^{-1}(x) = f^{-1}(0)\sum_{i\geq 0}[1 - f^{-1}f(x)]^i$.

Определение. формальной производной ряда $f(x)$ относительно переменной x называется формальный степенной ряд

$$D_x f(x) = \sum_{i \geq 0} (i+1) c_{i+1} x^i \tag{1.2.4}$$

Формальная производная обозначается так же $f'(x)$, $\frac{df}{dx}$. Если $f \in R\big[[x]\big], y = x - \{x_j\}$, то это определение формальной производной можно распространить на случай, когда $f \in \big(R\big[[y]\big]\big)\big[[x]\big]$. В этом случае вместо D_x пишется $\frac{\partial}{\partial x_j}$ или D_{x_j}.

Правила дифференцирования произведения, сложной функции и правило Лейбница выполняются для формальных производных.

Определение. Пусть $f(x) = \sum_{i \geq 0} c_i x^i \in R\big[[x]\big]$, R – кольцо характеристики 0, содержащее рациональные числа. Формальным интегралом для $f(x)$ относительно переменной x называется формальный степенной ряд

$$I_x f(x) = \sum_{i \geq 1} i^{-1} c_{i-1} x^i \,. \tag{1.2.5}$$

Формальный интеграл также обозначается $\int_0^x f(t)dt$.

Понятие формального интеграла можно распространить на случай рядов от многих переменных, если воспользоваться естественным изоморфизмом $R\big[[x]\big] \cong \big(R\big[[y]\big]\big)\big[[x_j]\big]$, где $y = x - \{x_j\}$.

Утверждение. Для формального интегрирования справедливо правило интегрирования по частям, кроме того, операторы I_{x_i} и I_{x_j} коммутируют в $R\big[[x]\big]$.

Утверждение. Если $\{f_j \in R\big[[x]\big], j \geq 0\}$ – суммируемое семейство, и если

$\alpha_j \in R, j \geq 0$, то

$$D_x\left(\sum_{j\geq 0} \alpha_j f_j\right) = \sum_{j\geq 0} \alpha_j D_x f_j. \tag{1.2.6}$$

Если в этих же условиях потребовать, чтобы кольцо R имело характеристику 0, справедливы равенства

$$I_x\left\{\sum_{j\geq 0} \alpha_j f_j\right\} = \sum_{j\geq 0} \alpha_j I_x f_j \qquad (1.2.7),$$

$$D_x\big(I_x f(x)\big), I_x\big(D_x f(x)\big) = f(x) - f(0). \tag{1.2.8}$$

Теперь рассмотрим более подробно теорию формальных степенных рядов одной переменной и докажем несколько связанных теорем.

Производящая функция – это одно из основных понятий современной перечислительной комбинаторики. Дадим определение производящей функции и определим операции, которые можно производить с ней.

Определение. Пусть $a_0, a_1, a_2, \ldots$ – произвольная (бесконечная) последовательность чисел. Производящей функцией для этой последовательности будем называть формальный степенной ряд

$$A(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots = A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n. \tag{1.2.9}$$

Производящая функция является производящим многочленом, если, начиная с некоторого, все члены последовательности равны нулю.

Будем рассматривать последовательности натуральных, целых, рациональных, вещественных и комплексных чисел.

Далее рассмотрим некоторые операции над производящими функциями.

Определение. Суммой производящих функций

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

называется производящая функция вида

$$A(x) + B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n. \tag{1.2.10}$$

Произведением производящей функции $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ на некоторое число P называется производящая функция вида

$$PA(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (P a_n) x^n. \tag{1.2.11}$$

Произведением двух производящих функций

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \qquad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

называется производящая функция вида

$$A(x)B(x) = a_o b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 + \cdots.$$

Операции сложения и умножения коммутативны и ассоциативны.

Композицией производящих функции $A(x)$ и $B(x)$ в случае, если $B(0) = b_0 = 0$, называется производящая функция

$$A\big(B(x)\big) = a_0 + a_1 b_1 x + (a_1 b_2 + a_2 b_1^2)x^2 + \\ +(a_1 b_3 + 2a_2 b_1 b_2 + a_3 b_1^3)x^3 + \cdots \qquad (1.2.12)$$

Операция композиции функций $A(x)$ и $B(x)$, когда $(0) = b_0 \neq 0$, не определена.

Если обе производящие функции оказываются многочленами, то определения операций суммы, произведения и умножения на число совпадают с обычными определениями этих операций над многочленами.

Докажем важную теорему:

Теорема. (Об обратной функции)

Пусть функция $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ такова, что $B(0) = b_0 = 0$, *а* $b_1 \neq 0$. Тогда существуют такие функции

$$A(s) = a_1 s + a_2 s^2 + a_2 s^3 + \cdots , \qquad A(0) = 0,$$

$$C(u) = c_1 u + c_2 u^2 + c_3 u^3 + \cdots , \qquad C(0) = 0,$$

что $A\big(B(t)\big) = t$ и $B\big(C(u)\big) = u$, причем такие функции $A(s)$ и $C(u)$ единственны.

Функция A называется левой обратной, а функция C – правой обратной к функции B.

Доказательство. Докажем существование и единственность левой обратной функции. Доказательство для правой обратной функции аналогично нижеследующему.

Будем определять коэффициенты функции A последовательно с помощью (1.2.12). Коэффициент a_1 определим из соотношения $a_1 b_1 = 1$, откуда $a_1 = \frac{1}{b_1}$.

Предположим, что все первые n коэффициентов $a_1, a_2, \dots a_n$ уже известны.

Коэффициент a_{n+1} найдём из условия $a_{n+1}b_1^{n+1} + \dots = 0,$ где многоточием обозначен некоторый многочлен от $a_1, a_2, \dots a_n$ и $b_1, b_2, \dots b_n$. Таким образом, мы получили линейное уравнение относительно a_{n+1}, причём коэффициент b_1^{n+1} не равен нулю по условию. Такое уравнение имеет решение, и при этом единственное, что доказывает теорему.

Определим операцию деления производящих функций. Эта операция не может быть корректно определена для любых двух произвольных производящих функций. Здесь можно провести аналогию между степенными рядами и целыми числами: не всегда деление целого числа на целое число дает в результате целое число. Но можно определить деление степенного ряда на степенной ряд, значение которого в нуле не равно нулю.

Теорема. Пусть $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ – формальный степенной ряд, причем $A(0) \neq 0$. Тогда существует единственный формальный степенной ряд $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ такой, что $A(x)B(x) = 1$.

Доказательство. Докажем по индукции.

При $n = 0$ имеем $b_0 = \frac{1}{a_0}$.

Пусть теперь все коэффициенты ряда $B(x)$ вплоть до $n - 1$ однозначно определены. Тогда коэффициент при x^n будет определен из условия

$$a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0 = 0.$$

Это выражение является линейным уравнением относительно одной неизвестной b_n, причем коэффициент при ней a_0 отличен от нуля. Поэтому уравнение имеет решение, и притом единственное. Теорема доказана.

Для производящей функции

$$F(z) = \sum_{x \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} f(x) z^x \tag{1.2.13}$$

решения разностного уравнения (1.1.1) имеет место быть следующая теорема:

Теорема. Функция $f: \mathbb{Z}_{\geq 0} \to \mathbb{C}$ является решением разностного уравнения (1.1.1) тогда и только тогда, когда её производящая функция (1.2.13) является рациональной

$$F(z) = \frac{Q(z)}{P(z)},$$

где $P(z)$ – характеристический многочлен уравнения (1.1.1), а степень числителя меньше степени знаменателя.

Определение. Пусть $A(s) = a_1 s + a_2 s^2 + a_2 s^3 + \cdots$ – производящая функция. Производной этой функции называется

$$A'(s) = a_1 + 2a_2 s + 3a_3 s^2 + \cdots + n a_n s^{n-1} + \cdots.$$

Интегралом называется функция

$$\int A(s) = a_0 s + a_1 \frac{s^2}{2} + a_2 \frac{s^3}{3} + \cdots + a_n \frac{s^{n+1}}{n+1} + \cdots.$$

Далее в работе рассматривается задача на двумерной целочисленной решётке, поэтому дадим определение производящей функции двухиндексной последовательности, а также некоторые специальные виды производящих функций.

Определение. Производящей функцией двух переменных называется формальный ряд

$$G(z) = \sum_{|k|=0}^{\infty} g_k z^k\,, \qquad (1.2.14)$$

где $z = (z_1, z_2\,)$, $k = (k_1, k_2)$, $|k| = k_1 + k_2$, $z^k = z_1^{k_1} z_2^{k_2}$, g_k – двухиндексная последовательность.

Для двумерных последовательностей дадим ещё два определения производящих функций:

Определение. Пусть $f_{n,k}$ – двумерная последовательность. Тогда

1. экспоненциальной производящей функцией для последовательности называется формальный степенной ряд вида

$$F(z,w) = f_{0,0} + f_{1,0}\frac{z}{1!} + f_{0,1}\frac{w}{1!} + f_{2,0}\frac{z^2}{2!} + f_{1,1}\frac{z}{1!}\frac{w}{1!} + f_{0,2}\frac{w^2}{2!} + \dots + \\ + f_{n,k}\frac{z^n}{n!}\frac{w^k}{k!} + \dots = \sum_{n,k=0}^{\infty} f_{n,k}\frac{z^n}{n!}\frac{w^k}{k!};$$

2. полуэкспоненциальной производящей функцией для последовательности $f_{n,k}$ называется формальный степенной ряд вида

$$F(z,w) = f_{0,0} + f_{1,0}z + f_{0,1}\frac{w}{1!} + f_{2,0}z^2 + f_{1,1}z\frac{w}{1!} + f_{0,2}\frac{w^2}{2!} + \dots + \\ + f_{n,k}z^n\frac{w^k}{k!} + \dots = \sum_{n,k=0}^{\infty} f_{n,k}z^n\frac{w^k}{k!}. \qquad (1.2.15)$$

Приведём примеры применения разных производящих функций при решении разностных уравнений.

Пример.

Для некой двухиндексной числовой последовательности $f_{k,n}$, удовлетворяющей основному рекуррентному соотношению

$$f_{k+1,n+1} = f_{k,n} + f_{k+1,n} \tag{1.2.16}$$

с начальными условиями

$$f_{0,n} = 1 \quad \forall n > 0, \tag{1.2.17}$$

$$f_{k,n} = 0 \quad \forall k > n, \tag{1.2.18}$$

найти производящую и полуэкспоненциальную производящую функции.

Найдём производящую функцию вида

$$F(z,w) = f_{0,0} + f_{0,1}w + f_{1,1}zw + f_{0,2}w^2 + f_{1,2}zw^2 + f_{2,2}z^2w^2 + \cdots =$$

$$= \sum_{\substack{n\ge 0\\ k\ge 0}} f_{n,k} z^k w^n\,.$$

Заметим, что в этой форме записи былое учтено начально условие (1.2.18): $f_{k,n} = 0 \ \forall k > n$.

Для того, чтобы найти производящую функцию $F(z,w)$, рекуррентное соотношение (1.2.16) домножим его на $z^{k+1}w^{n+1}$ и получим:

$$f_{k+1,n+1}z^{k+1}w^{n+1} = f_{k,n}z^{k+1}w^{n+1} + f_{k+1,n}z^{k+1}w^{n+1}.$$

Просуммируем по всем возможным значениям k и n:

$$\sum_{\substack{k\ge 0\\ 0\le n\le k}} f_{k+1,n+1}z^{k+1}w^{n+1} =$$

$$= \sum_{\substack{k\ge 0\\ 0\le n\le k}} f_{k,n}z^{k+1}w^{n+1} + \sum_{\substack{k\ge 0\\ 0\le n\le k}} f_{k+1,n}z^{k+1}w^{n+1}\,. \tag{1.2.19}$$

Преобразуем левую часть уравнения (1.2.19):

$$\sum_{\substack{k\geq 0\\ 0\leq n\leq k}} f_{k+1,n+1} z^{k+1} w^{n+1} =$$

$$= f_{1,1}zw + f_{1,2}zw^2 + f_{2,2}z^2w^2 + f_{1,3}zw^3 + f_{2,3}z^2w^3 + f_{3,3}z^3w^3 + \cdots =$$

$$= F(z,w) - f_{0,0} - f_{0,1}w - f_{0,2}w^2 - \cdots,$$

а с учетом начального условия (1.2.17) $f_{0,n} = 1 \ \ \forall n > 0$ это выражение можно преобразовать следующим образом:

$$\sum_{\substack{k\geq 0\\ 0\leq n\leq k}} f_{k+1,n+1} z^{k+1} w^{n+1} = F(z,w) - 1 - w - w^2 - \cdots =$$

$$= F(z,w) - \frac{1}{1-w}. \tag{1.2.20}$$

Затем преобразуем правую часть уравнения (1.2.18). Ясно видно, что

$$\sum_{\substack{k\geq 0\\ 0\leq n\leq k}} f_{k,n} z^{k+1} w^{n+1} = zw \sum_{\substack{k\geq 0\\ 0\leq n\leq k}} f_{k,n} z^{k} w^{n} = zwF(z,w). \tag{1.2.21}$$

Второе слагаемое правой части запишем в виде:

$$\sum_{\substack{k\geq 0\\ 0\leq n\leq k}} f_{k+1,n} z^{k+1} w^{n+1} =$$

$$= w\big(f_{0,1}z + f_{1,1}zw + f_{1,2}zw^2 + f_{2,2}z^2w^2 + f_{1,3}zw^3 + f_{2,3}z^2w^3 + \cdots\big) =$$

$$= w\left(F(z,w) - \frac{1}{1-w}\right), \tag{1.2.22}$$

как было показано выше в (1.2.20).

Тогда подставим (1.2.20-22) в начальное рекуррентное соотношение (1.2.19) и получим следующее уравнение:

$$F(z,w)-\frac{1}{1-w}=zwF(z,w)+w\left(F(z,w)-\frac{1}{1-w}\right),$$

откуда элементарными преобразованиями выразим искомую производящую функцию:

$$F(z,w)=\frac{1}{1-(1+z)w}=\sum_{j=0}^{\infty}(1+z)^j w^j=\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{j}C_j^i z^j w^j. \qquad (1.2.23)$$

Такой способ поиска производящей функции использован в параграфе 2.2 данной работы.

Теперь найдём полуэкспоненциальную производящую функцию вида (1.2.15). Для этого разделим решение на два этапа. На первом положим n параметром и получим рекуррентное соотношение на производящие функции $P_n(z)$. Эти функции в силу условия (1.2.18) $f_{k,n}=0\ \forall k>n$ являются многочленами степени n.

Второй этап будет состоять в решении разностного уравнения на $P_n(z)$ с помощью производящих функций вида $G(z,w)=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(z)\frac{w^n}{n!}$.

Итак, для последовательности $f_{k,n}$, удовлетворяющей (1.2.16-18) найдём многочлены $P_n(z)$ следующего вида:

$$P_n(z)=f_{0,n}+f_{1,n}z+f_{2,n}z^2+\cdots+f_{n,n}z^n.$$

Домножим соотношение (1.2.6) на z^{k+1} и просуммируем по k от нуля до n:

$$\sum_{k=0}^{n}f_{k+1,n+1}z^{k+1}=\sum_{k=0}^{n}f_{k,n}z^{k+1}+\sum_{k=0}^{n}f_{k+1,n}z^{k+1}. \qquad (1.2.24)$$

В левой части уравнения (1.2.24) легко видеть, что

$$\sum_{k=0}^{n} f_{k+1,n+1} z^{k+1} = f_{1,n+1} z + f_{2,n+1} z^2 + f_{3,n+1} z^3 + \cdots + f_{n+1,n+1} z^{n+1} =$$

$$= P_{n+1}(z) - f_{0,n+1} = P_{n+1}(z) - 1. \qquad (1.2.25)$$

В правой части уравнения (1.2.24) выполним следующие преобразования:

$$\sum_{k=0}^{n} f_{k,n} z^{k+1} + \sum_{k=0}^{n} f_{k+1,n} z^{k+1} =$$

$$= z \sum_{k=0}^{n} f_{k,n} z^{k} + \left(f_{1,n} z + f_{2,n} z^2 + f_{3,n} z^3 + \cdots + f_{n,n} z^n\right) =$$

$$= z P_n(z) + P_n(z) - 1\,. \qquad (1.2.26)$$

Подставим получившиеся выражения (1.2.25-26) в (1.2.24) и получим, что производящие многочлены $P_n(z)$ удовлетворяют соотношению

$$P_{n+1}(z) = (z+1) P_n(z).$$

Далее, получившееся соотношение на $P_n(z)$ домножим на $\frac{w^n}{n!}$ и просуммируем по всем неотрицательным значениям n:

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_{n+1}(z) \frac{w^n}{n!} = (z+1) \sum_{n=0}^{\infty} P_n(z) \frac{w^n}{n!}.$$

Заметим, что левая часть этого уравнения является производной функции $\mathrm{G(z,w)} = \sum_{\mathrm{n}=0}^{\infty} \mathrm{P_n(z)} \frac{\mathrm{w^n}}{\mathrm{n!}}$ по переменной w, а правая непосредственно равна произведению $\mathrm{(z+1)G(z,w)}$.

Откуда мы получим дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial G}{\partial w} = (z+1) G \qquad (1.2.27)$$

с начальными условиями

$$G(z,0) = P_0(z) = f_{0,0} = 1. \tag{1.2.28}$$

Вместе (1.2.18) и (1.2.19) составляют задачу Коши, решением которой является функция

$$G(z,w) = e^{(z+1)w} = \sum_{n=0}^{\infty} (z+1)^n \frac{t^n}{n!}. \tag{1.2.29}$$

Заметим, что в предыдущем примере результат вычислений (1.2.23) $F(z,w) = \sum_{j=0}^{\infty} (1+z)^j t^j$ представляет собой «обыкновенную» производящую функцию, в то время как (1.2.29) имеет в каждом своём слагаемом множитель $n!$, что и отличает полуэкспоненциальную производящую функцию от «обыкновенной».

1.3 Метод ядра

Рассмотрим ещё один способ решения рекуррентных соотношений, называемый методом ядра. Для этого рассмотрим двумерную целочисленную решётку $\mathbb{Z}^2$ и некоторое конечное множество векторов с целыми координатами

$$S = \{S_k = (m_k, n_k) \colon k = 1, \dots, N\} \subset \mathbb{Z}^2\{(0,0)\},$$

элементы которого назовём шагами. Множество S порождает конус

$$K(S) = \left\{ \sum_{k=1}^{N} r_k S_k \colon r_k \geq 0 \right\}.$$

Определение. $K(S)$ называется заострённым конусом, если он не содержит прямую, проходящую через $(0,0)$.

Определение. Ненулевой вектор $u \in \mathbb{R}^2\{(0,0)\}$ определяет полуплоскость $H_u = \{v \in \mathbb{R}^2 \colon uv > 0\}$.

Определение. Последовательность $f_{n,k} = f(n,k)$ – это функция двух целых переменных, которая считает количество путей, которыми можно пройти из точки $(0,0)$ в точку (n,k), используя шаги из множества S.

Теорема. Функция f отображает $\mathbb{Z}^2$ на $\mathbb{N} \cup \{0\}$ тогда и только тогда, когда конус $K(S)$ является заострённым.

Доказательство.

Пусть конус $K(S)$ является заострённым.

Существует некоторый вектор $u \in \mathbb{R}^2\{(0,0)\}$ такой, что $K(S)\{(0,0)\} \subset H_u$. Это включение эквивалентно высказыванию $u \cdot S_k > 0\ \forall k = 1, .., N$. Поскольку $\mathbb{Q}^2$ всюду плотно в $\mathbb{R}^2$, существует $q = (q_1, q_2) \in \mathbb{Q}^2$ такой, что $q \cdot S_k > 0\ \forall k = 1, .., N$.

Пусть $l \in \mathbb{N}$ – это наименьшее общее делимое знаменателей q_1 и q_2, пусть $w = lq$. Тогда $w \in \mathbb{Z}^2\{(0,0)\}$, и существует положительное целое число M такое, что $w \cdot S_k > M, k = 1, \dots, N$. Учитывая, что целочисленная решётка состоит из последовательности L шагов $\{S_{k_1}, \dots, S_{k_L}\}$ из нуля в точку (m, n), получим, что $(m, n) = S_{k_1} + \cdots + S_{k_L}, w \cdot (m, n) \geq LM$, откуда

$$L \leq \frac{w \cdot (m, n)}{M}.$$

Необходимость доказана.

Обратно. Пусть $K(S)$ не является заострённым. Тогда существует такой набор целых неотрицательных чисел $p_k, k = 1, .., N$, что

$$\sum_{k=1}^{N} p_k S_k = \sum_{k=1}^{N} p_k (m_k, n_k) = (0,0).$$

Тогда путь, начинающийся в нуле и состоящий из p_1 шагов S_1, p_2 шагов S_2, …, и заканчивающийся p_N шагами S_N возвращается в исходную точку. Такой маршрут можно повторить сколь угодно много раз, и $f(0,0) = \infty$.

Теорема. Пусть дано конечное множество ненулевых шагов S, порождающее конус $K(S)$. Тогда $f \subset K(S) \cap \mathbb{Z}^2$, и более того, если $K(S)$ заострён, функция f удовлетворяет следующему разностному уравнению*:*

$$f(m, n) = \begin{cases} 1, \text{ если } (m, n) = (0,0), \\ \sum_{k=1}^{N} f(m - m_k, n - n_k), \text{ если } (m, n) \neq (0,0). \end{cases} \tag{1.3.1}$$

Доказательство.

Первое утверждение очевидно.

Второе следует из того, что если путь начинается в нуле и следует в точку, отличную от него, то последний шаг должен быть совершён из одной из точек с координатами $(m - m_k, n - n_k), k = 1, \dots, N$.

Определим характеристический многочлен множества S и производящую функцию.

Определение. Характеристическим многочленом множества $S = \{S_k = (m_k, n_k): k = 1, \dots, N\} \subset \mathbb{Z}^2\{(0,0)\}$ назовём

$$P_S(x, y) = \sum_{(m_k, n_k) \in S} x^{m_k} y^{n_k} = \sum_{k=1}^{N} x^{m_k} y^{n_k}. \quad (1.3.2)$$

Определение. Производящей функцией F целочисленной функции f назовём

$$F(x, y) = \sum_{(m,n) \in \mathbb{Z}^2} f(m, n) x^m y^n.$$

Теорема. Если конус $K(S)$ является заострённым, то

$$F(x, y) = \frac{1}{1 - P_S(x, y)}. \quad (1.3.3)$$

Доказательство.

Пусть $A = K(S) \cap \mathbb{Z}^2$, $B = A\{(0,0)\}$. Тогда согласно (1.3.1)

$$F(x, y) = \sum_{(m,n) \in A} f(m, n) x^m y^n = 1 + \sum_{(m,n) \in B} f(m, n) x^m y^n =$$

$$= 1 + \sum_{(m,n) \in B} \sum_{k=1}^{N} f(m - m_k, n - n_k) x^m y^n =$$

$$= 1 + \sum_{(m,n)\in B} \sum_{k=1}^{N} f(m - m_k, n - n_k) x^m y^n =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{N} x^{m_k} y^{n_k} \sum_{(m,n)\in B} f(m - m_k, n - n_k) x^{m-m_k} y^{n-n_k} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{N} x^{m_k} y^{n_k} \sum_{(m',n')\in B - S_k} f(m', n') x^{m'} y^{n'} .$$

Так как $A \subset B - S_j \; \forall j = 1, \dots, N$ и $f(m,n) = 0$, если $(m,n) \notin A$, равенство можно продолжить следующим образом:

$$1 + \sum_{k=1}^{N} x^{m_k} y^{n_k} \sum_{(m',n')\in B - S_k} f(m', n') x^{m'} y^{n'} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{N} x^{m_k} y^{n_k} \sum_{(m',n')\in A} f(m', n') x^{m'} y^{n'} = 1 + P_S F(x,y).$$

Отсюда

$$F(x,y) = 1 + P_S F(x,y),$$

откуда немедленно следует (1.3.3).

Пример.

Теперь рассмотрим решёточные пути с ограничениями. Пусть множество $S = \{(1,1),(1,-1)\}$, а функция $f(j,k)$ считает число решёточных путей, состоящих из шагов $(1,1),(1,-1)$, не пересекающих ось x.

Пусть конус K порождается векторами $(1,1)$ и $(1,0)$, $A = K \cap \mathbb{Z}^2$, $B = A\{(0,0)\}$. Тогда f удовлетворяет следующему разностному уравнению:

$$f(j,k)=\begin{cases} 1, \text{ если } (j,k)=(0,0),\\ 0, \text{если } (j,k)\notin A,\\ f(j-1,k-1)+f(j-1,k+1), \text{ если } (j,k)\in B.\end{cases}$$

Заметим, что $f=0$ вне множества A, поэтому значения $f(j-1,k-1)$ и $f(j-1,k+1)$ в правой части уравнения, возможно, обратятся в ноль.

Определим производящую функцию

$$G_f(x,y)=\sum_{(j,k)\in A} f(j,k)x^j y^k.$$

Так как $f(0,0)=1$, получим

$$G_f(x,y)=1+\sum_{(j,k)\in B} f(j,k)x^j y^k.$$

Имеем, что $f(j,k)=f(j-1,k-1)+f(j-1,k+1)$, если $(j,k)\in B$, тогда

$$G_f(x,y)-1=\sum_{(j,k)\in B} f(j-1,k-1)x^j y^k+\sum_{(j,k)\in B} f(j-1,k+1)x^j y^k=$$

$$=xy\sum_{(j,k)\in B} f(j-1,k-1)x^{j-1}y^{k-1}+$$

$$+xy^{-1}\sum_{(j,k)\in B} f(j-1,k+1)x^{j-1}y^{k+1}=$$

$$=xy\sum_{(j,k)\in B-(1,1)} f(j,k)x^j y^k+xy^{-1}\sum_{(j,k)\in B-(1,-1)} f(j,k)x^j y^k=$$

$$=\ xy\sum_{(j,k)\in\left(B-(1,1)\right)\cap A} f(j,k)x^j y^k+xy^{-1}\sum_{(j,k)\in\left(B-(1,-1)\right)\cap A} f(j,k)x^j y^k=$$

$$=xyG_f(x,y)+xy^{-1}\left(G_f(x,y)-G_f(x,0)\right),$$

поскольку $\big(B-(1,-1)\big)\cap A = A\{(j,0), j\geq 0\}$.

Отсюда получим уравнение

$$(xy^2-y+x)G_f(x,y) = xG_f(x,0)-y,$$

$$G_f(x,y) = \frac{xG_f(x,0)-y}{xy^2-y+x}.$$

Таким образом задача нахождения производящей функции сведена к нахождению функции $G_f(x,0)$, то есть производящей функции последовательности одной переменной.

Последовательность $f(x,0)$ – это последовательность числа путей $(0{,}0)\to(n,0)$ шагами $(1{,}1),(1,-1)$, не спускающихся ниже оси абсцисс. Такие пути называются путями Дика, они хорошо изучены.

Найдём корни знаменателя $G_f(x,y)$ $xy^2-y+x=0$ относительно переменной y:

$$y_\pm(x) = \frac{1\pm\sqrt{1-4x^2}}{2x},$$

которые являются алгебраическими функциями относительно x. Подставим $y_\pm(x)$ в уравнение и получим, что $G_f(x,0)=y_+(x)$ или $G_f(x,0)=y_-(x)$.

Поскольку $G_f(x,0)$ – это производящая функция одной переменной, $G_f(x,0)$ представляет собой формальный ряд в $\mathbb{C}\big[[x]\big]$:

$$y_+(x) = \frac{1+\sqrt{1-4x^2}}{2x} = x^{-1}-x+\cdots,$$

что не может являться производящей функцией по определению. Отсюда можно сделать вывод, что $G_f(x,0)=\frac{y_-(x)}{x}$.

Заметим, что метод ядра может быть применён только в случаях, когда функция $G_f(x, y)$ является D-финитной, однако это не всегда так. Этот факт отражен в [8].

Описанные в этой главе методы решения рекуррентных соотношений применимы к решению основной задачи работы.

2 Задача перечисления решёточных путей с ограничениями

2.1 Формулировка задачи

Рассмотрим целочисленную двумерную решётку $(\mathbb{Z}_{\geq 0})^2$ и поставим задачу о решёточных путях с ограничениями:

Найти производящую функцию

$$F(z, w) = \sum_{x \geq 0, y \geq 0} f_{x,y} z^x w^y$$

последовательности $f_{x,y}$ числа путей, состоящих из шагов $(0,1)$ и $(1,0)$, начинающихся в начале координат, заканчивающихся в точке с координатами (x, y), которые не могут проходить через некоторое заранее заданное множество (конечное или бесконечное) точек целочисленной решётки.

В параграфе 2.2 рассмотрим случай конечного «запрещённого» множества точек, а в параграфах 2.3-2.5 ограничим решёточные пути прямой с рациональным уклоном.

2.2 Число решёточных путей, не проходящих через заданное конечное подмножество целочисленной решётки

Рассмотрим следующую задачу:

Найти число путей $f(x_1, x_2)$ из начала координат в точку (x, y)в $\epsilon\mathbb{Z}^2$, шагами (1,0) и (0,1), не проходящих ни через одну точку некоторого заранее заданного множества $A = \{M_j(x_j, y_j)\}_{j=1}^{n}$, которое является подмножеством целочисленной решётки, расположенной в первом квадранте.

Для решения введем некоторые обозначения.

Определение. Разностью точек $M_2(x_2, y_2)$ и $M_1(x_1, y_1)$ назовём пару чисел $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

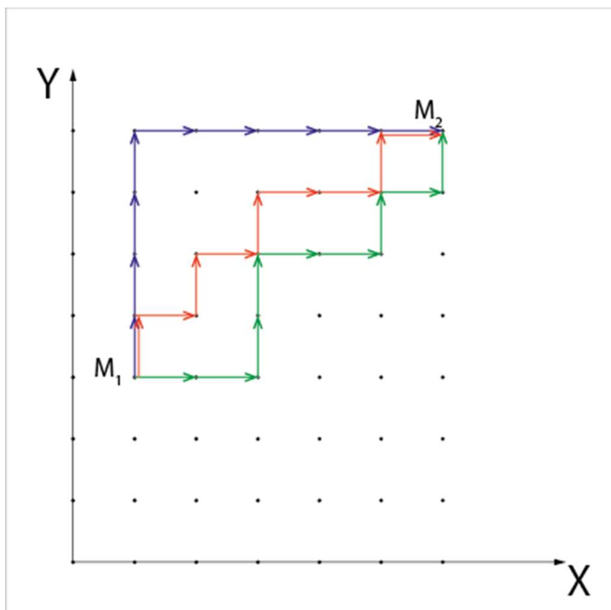

Рисунок 1 – пути с шагами (0,1) и (1,0) из точки M_1 в M_2

Функция $\varphi(M(x, y)) = \frac{(x+y)!}{x!y!}$ вычисляет количество маршрутов с допустимыми шагами из нуля в точку M без каких-либо ограничений по области [3]. Тогда по определению разности точек $\varphi(M_2 - M_1)$ – это количество путей из точки M_1 в точку M_2. Пример таких путей приведён на рисунке ниже.

Далее будем действовать методом исключения. Для этого получим число путей, которые проходят через все точки некоторого множества $B = \{B_j(x_j, y_j)\}_{j=1}^{n}$ и обозначим это число как μ_n.

Путь может проходить через точки множества B в произвольном (но удовлетворяющем условие задачи) порядке, тогда число μ_n равно сумме всех произведений чисел путей, идущих из одной точки в следующую:

$$\mu_n = \sum_{k=1}^{n!} \varphi\left(B_{i_{k_2}} - B_{i_{k_1}}\right) \cdot \varphi\left(B_{i_{k_3}} - B_{i_{k_2}}\right) \cdot \dots \cdot \varphi\left(B_{i_{k_n}} - B_{i_{k_{n-1}}}\right), \qquad (2.2.1)$$

где порядок точек в каждом произведении соответствует одной из подстановок

$$p_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_{k_1} & i_{k_2} & \dots & i_{k_n} \end{pmatrix} B_{i_{k_j}} \in B.$$

Зафиксируем точку (0,0) как начало маршрута, а некоторую точку $M(x, y)$ как конец, и получим немного изменённую формулу $\tilde{\mu}_n$, полученную подстановкой в (2.2.1) $B_{i_{k_1}} = 0, B_{i_{k_n}} = M(x, y)$:

$$\tilde{\mu}_n(M(x, y)) = \sum_{k=1}^{(n-2)!} \varphi\left(B_{i_{k_1}}\right) \cdot \varphi\left(B_{i_{k_2}} - B_{i_{k_1}}\right) \cdot \dots \cdot \varphi\left(M(x, y) - B_{i_{k_n}}\right).$$

Итак, для того, чтобы вычислить число путей, которые не проходят ни через одну точку некоторого «запрещённого» множества $A = \{M_j(x_j, y_j)\}_{j=1}^{n}$, нужно для всех непустых подмножеств множества A найти число путей, проходящих через точки этого подмножества.

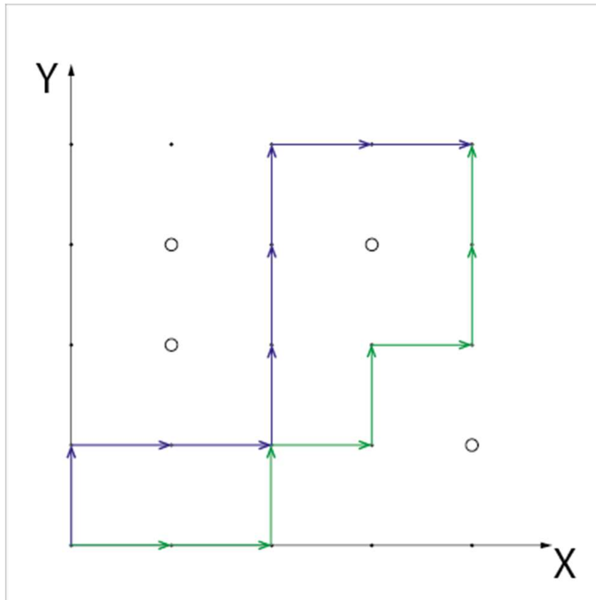

Рисунок 2 – пути с шагами (0,1) и (1,0), не проходящие через некоторые точки целочисленной решётки

Воспользуемся формулой включений-исключений для мощности объединения нескольких множеств и получим следующее выражение

$$\nu_M = \varphi(M) - \sum_{I \in 2^N - 1} (-1)^{|I|+1} \tilde{\mu}_n \,, \tag{2.2.2}$$

где $(2^N - 1)$ – множество всех непустых подмножеств множества A.

2.3 Решение задачи с нулевыми начальными условиями

Теперь ограничим решёточные пути прямой с рациональным уклоном.

Пусть q – некоторое положительное целое число. Прямая $qy = x$ проходит через начало координат и разделяет целочисленную двумерную решётку $(\mathbb{Z}_{\geq 0})^2$ на три части: точки, находящиеся на прямой, точки, находящиеся под ней, и точки, находящиеся над ней.

Пусть задано множество $S = \{(0,1), (1,0)\}$ шагов, которыми можно передвигаться по решётке $(\mathbb{Z}_{\geq 0})^2$.

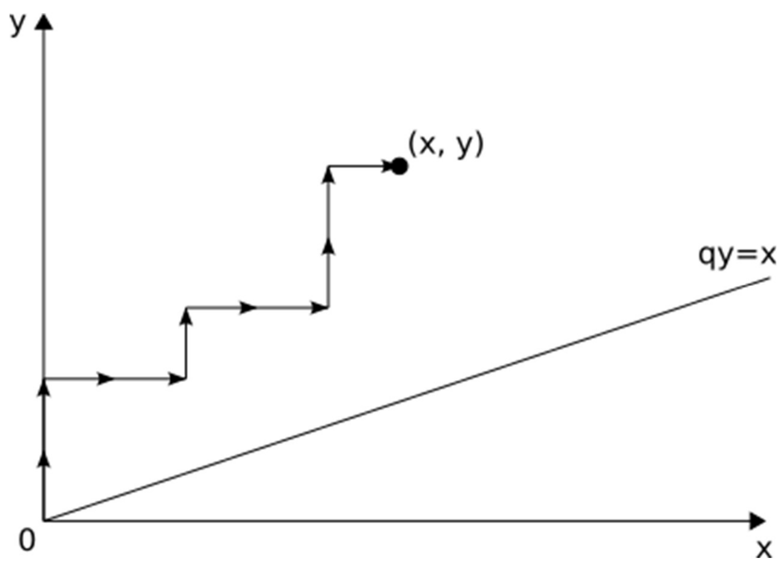

Рисунок 3 – пример решёточного пути

Тогда задача будет иметь следующий вид:

Найти производящую функцию

$$F(z, w) = \sum_{x \geq 0, y \geq 0} f_{x,y} z^x w^y$$

последовательности $f_{x,y}$ числа путей, состоящих из шагов $(0,1)$ и $(1,0)$, начинающихся в начале координат, заканчивающихся в точке с координатами

(x, y) и остающихся над или на прямой $qy = x$.

В работе [1] эта задача в более общем виде для прямой $qy = px$ решена с использованием интерполяционных формул Эрмита и Лагранжа, а также теоремы обращения Лагранжа. Здесь рассмотрим более наглядные методы решения задачи.

Рассмотрим такую постановку задачи, когда значения производящей функции в точках, находящихся под прямой, равны нулю. В этом случае решим задачу с помощью разностного уравнения с постоянными коэффициентами.

Для произвольного q последовательность числа решёточных путей имеет следующее основное рекуррентное соотношение:

$$f_{x+1,y+1} = f_{x+1,y} + f_{x,y+1}, \tag{2.3.1}$$

с начальными данными

$$f_{0,k} = f_1(k), f_{k,0} = f_2(k), f_1(0) = f_2(0), \tag{2.3.2}$$

$$f_{x,y} = 0 \qquad \forall (x, y): x > qy. \tag{2.3.3}$$

Пример последовательности (2.2.1-3) при $f_1(k) = 1$

Найдём производящую функцию такой последовательности. Домножим основное уравнение (2.3.1) на $z^{x+1} \cdot w^{y+1}$ и просуммируем по x и y, учитывая условие (2.3.3):

$$f_{x+1,y+1} \cdot z^{x+1} \cdot w^{y+1} = f_{x,y+1} z^{x+1} \cdot w^{y+1} + f_{x+1,y} z^{x+1} \cdot w^{y+1};$$

$$\sum_{\substack{x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ qy \geq x}} f_{x+1,y+1} \cdot z^{x+1} w^{y+1} = \sum_{\substack{x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ qy \geq x}} f_{x,y+1} z^{x+1} \cdot w^{y+1} + \sum_{\substack{x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ qy \geq x}} f_{x+1,y} z^{x+1} \cdot w^{y+1}.$$

Теперь рассмотрим каждое слагаемое в отдельности:

Преобразуем левую часть уравнения:

$$\sum_{\substack{x\geq 0\\ y\geq 0\\ qy\geq x}} f_{x+1,y+1}\cdot z^{x+1}w^{y+1} =$$

$$= (f_{1,1}zw + f_{2,1}z^2w + \cdots + f_{q,1}z^q w) + (f_{1,2}zw^2 + f_{2,2}z^2w^2 + \cdots$$
$$+ f_{2q,2}z^{2q}w^2) + \cdots + (f_{1,n}zw^n + f_{2,n}z^2w^n + \cdots + f_{nq,n}(z^q w)^n) + \cdots$$
$$= F(z,w) - \sum_{y\geq 0} f_{0,y}w^y\,; \tag{2.3.4}$$

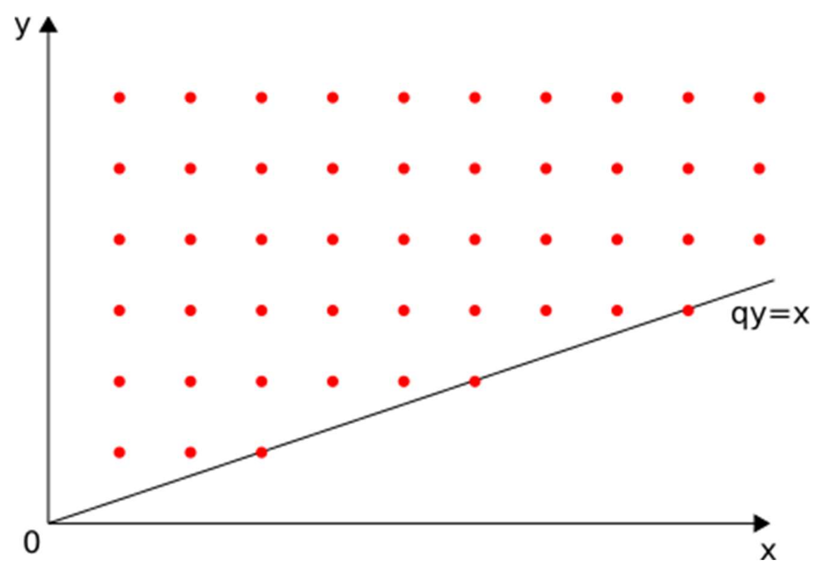

Рисунок 4 – Носитель ряда (2.3.4)

Преобразуем первое слагаемое правой части уравнения:

$$\sum_{\substack{x\geq 0\\ y\geq 0\\ qy\geq x}} f_{x+1,y}z^{x+1}\cdot w^{y+1} = w\left(\sum_{\substack{x\geq 0\\ y\geq 0\\ qy\geq x}} f_{x,y+1}z^{x}\cdot w^{y+1}\right) =$$

$$= w\big((f_{1,1}zw + f_{2,1}z^2w + \cdots + f_{q,1}z^qw) + (f_{1,2}zw^2 + f_{2,2}z^2w^2 + \cdots + f_{2q,2}z^{2q}w^2) + \cdots + (f_{1,n}zw^n + f_{2,n}z^2w^n + \cdots + f_{nq,n}(z^qw)^n) + \cdots\big) =$$

$$= w\left(F(z,w) - \sum_{y\geq 0} f_{0,y}w^y\right); \qquad (2.3.5)$$

Преобразуем второе слагаемое правой части уравнения:

$$\sum_{\substack{x\geq 0\\ y\geq 0\\ qy\geq x}} f_{x,y+1}z^{x+1}\cdot w^{y+1} = z\left(\sum_{\substack{x\geq 0\\ y\geq 0\\ qy\geq x}} f_{x+1,y}z^{x+1}\cdot w^y\right) =$$

$$= z\big(f_{0,1}w + (f_{0,2}w^2 + f_{1,2}zw^2 + \cdots + f_{q,2}z^qw^2) + \left(f_{0,3}w^3 + f_{1,3}\cdot zw^3 + \cdots + f_{2q,3}\cdot z^{2q}w^3\right) + \cdots + \left(f_{0,n}\cdot w^n + f_{1,n}\cdot zw^n + \cdots + f_{(n-1)q,n}\cdot z^{(n-1)q}w^n\right) + \cdots\big) =$$

$$= z\left(F(z,w) - \sum_{j=1}^{q}\sum_{k\geq 0} f_{qk-q+\ ,k}\cdot z^{qk-q+}\ \ w^k\right) \qquad (2.3.6)$$

Вынесение монома $z^m w^n$ из ряда за скобки смещает всю совокупность точек целочисленной решётки, которые являются носителем ряда, на m единиц влево и на n единиц вниз.

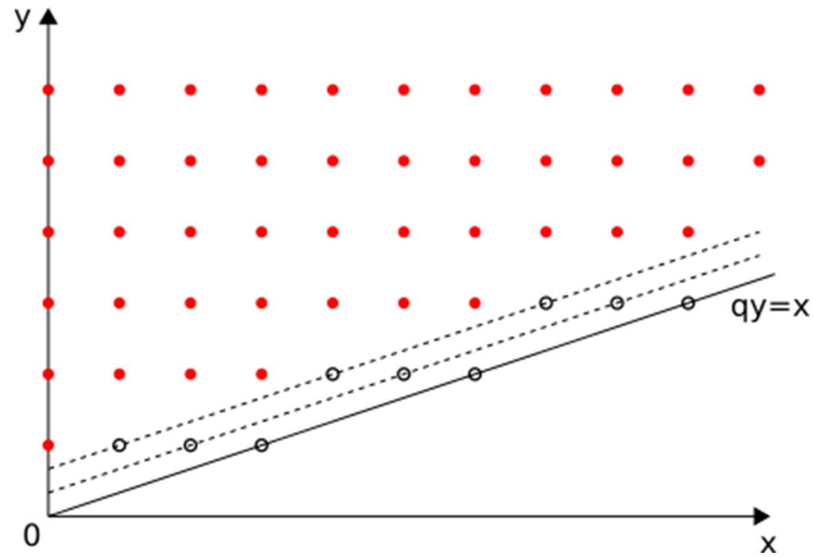

Рисунок 5 – Носитель ряда (2.3.6) после вынесения z за скобки

Обозначим

$$F(0,w) = \sum_{y\geq 0} f_{0,y} w^y,$$

$$G_j(z,w) = \sum_{k\geq 0} f_{qk-q+\ ,k} \cdot z^{qk-q+j}\, w^k, j = 1, \dots, q.$$

Откуда, подставив (2.2.4-6) в (2.2.5), окончательно получим уравнение

$$(1-z-w)F(z,w) = (1-w)F(0,w) - z \cdot \sum_{j=1}^{q} G_j(z,w)\,;$$

$$F(z,w) = \frac{(1-w)F(0,w) - z \cdot \sum_{j=1}^{q} G_j(z,w)}{1-z-w}. \qquad (2.3.7)$$

Таким образом, полученная производящая функция зависит от начальных данных и неизвестных функций $G_j(z,w)$. Для некоторых значений q удаётся указать, какими свойствами обладают коэффициенты ряда $G_j(z,w)$, тем самым можно определить вид этой функции.

Рассмотрим частный случай, когда ограничивающая прямая является диагональю первого квадранта, а начальные данные определены:

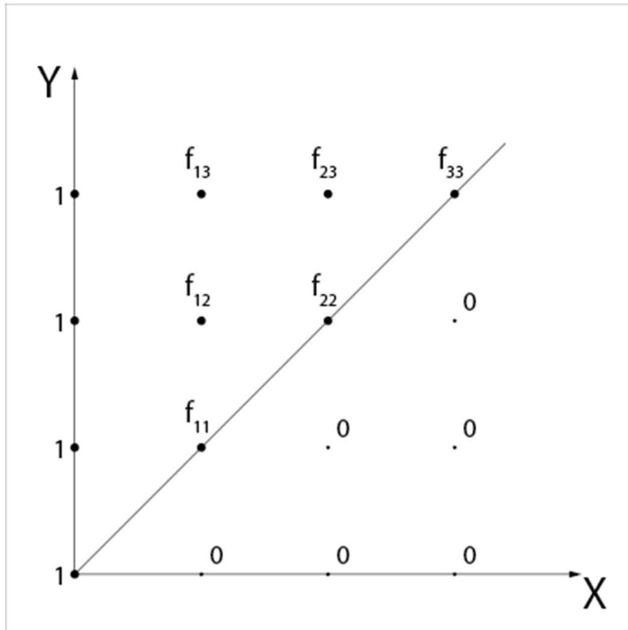

Рисунок 6 – носитель производящей функции и соответствующие коэффициенты ряда $F(z,w)$ с учётом начальных условий

Пример. Пусть $q=1$

Запишем основное рекуррентное соотношение для

$$f_{x+1,y+1} = f_{x,y+1} + f_{x+1,y}. \tag{2.3.8}$$

Начальными будут являться следующие условия:

$$x \geq 0, y \geq 0, \tag{2.3.9}$$

$$f_{xy} = 0, \forall x > y, \tag{2.3.10}$$

$$f_{0y} = 1, \forall y \geq 0. \tag{2.3.11}$$

Производящая функция такой двухиндексной последовательности с учетом начального условия (2.3.10) будет выглядеть следующим образом

$$F(z,w) = f_{00} + f_{01}w + f_{11}zw + f_{02}w^2 + f_{12}zw^2 + f_{22}z^2w^2 + f_{03}w^3 +$$

$$+f_{13}zw^3 + f_{23}z^2w^3 + f_{33}z^3w^3 + \cdots = \sum_{y=0}^{\infty}\sum_{x=0}^{y} f_{xy}z^x w^y .$$

Домножим основное уравнение (2.3.8) на $z^{x+1} \cdot w^{y+1}$ и просуммируем по x и y:

$$f_{x+1,y+1} \cdot z^{x+1} \cdot w^{y+1} = f_{x,y+1}z^{x+1} \cdot w^{y+1} + f_{x+1,y}z^{x+1} \cdot w^{y+1};$$

$$\sum_{y=0}^{\infty}\sum_{x=0}^{y} f_{x+1,y+1} \cdot z^{x+1} \cdot w^{y+1} =$$

$$= \sum_{y=0}^{\infty}\sum_{x=0}^{y} f_{x,y+1}z^{x+1} \cdot w^{y+1} + \sum_{y=0}^{\infty}\sum_{x=0}^{y} f_{x+1,y}z^{x+1} \cdot w^{y+1} . \qquad (2.3.12)$$

Рассмотрим каждую часть уравнения (2.3.12) в отдельности.

Преобразуем левую часть:

$$\sum_{y=0}^{\infty}\sum_{x=0}^{y} f_{x+1,y+1} \cdot z^{x+1} \cdot w^{y+1} =$$

$$= f_{11}zw + f_{12}zw^2 + f_{22}z^2w^2 + f_{13}zw^3 + f_{23}z^2w^3 + f_{33}z^3w^3 + \cdots$$
$$= F(z,w) - f_{00} - f_{01}w - f_{02}w^2 - f_{03}w^3 - \cdots$$

На рисунке 7 изображен носитель получившегося ряда:

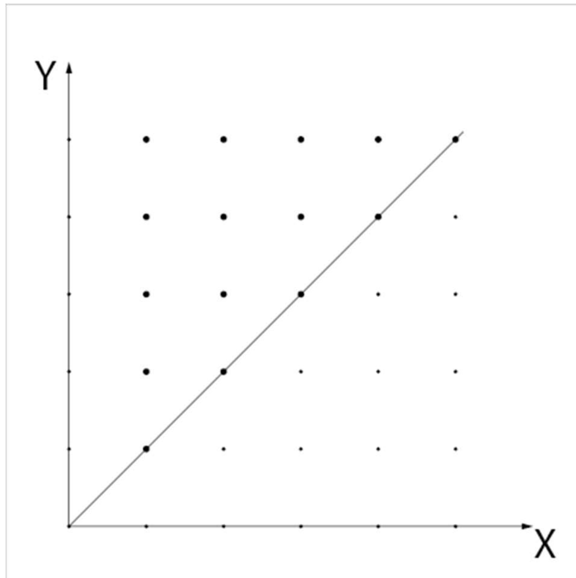

Рисунок 7 – носитель ряда в левой части (2.3.12)

Так как каждый $f_{on} = 1$ (начальное условие (2.3.11)), то получим следующее:

$$F(z,w) - (1 + w + w^2 + \cdots) = F(z,w) - \frac{1}{1-w}. \tag{2.3.13}$$

В правой части преобразуем первую сумму:

$$\sum_{y=0}^{\infty} \sum_{x=0}^{y} f_{x,y+1} z^{x+1} w^{y+1} =$$

$$= f_{01}zw + f_{02}zw^2 + f_{12}z^2w^2 + f_{03}zw^3 + f_{13}z^2w^3 + f_{23}z^3w^3 + \cdots =$$

$$= z(f_{01}w + f_{02}w^2 + f_{12}zw^2 + f_{03}w^3 + f_{13}zw^3 + f_{23}z^2w^3 + \cdots).$$

После вынесения общего множителя z в скобках получим ряд, носитель которого изображен на рисунке 8:

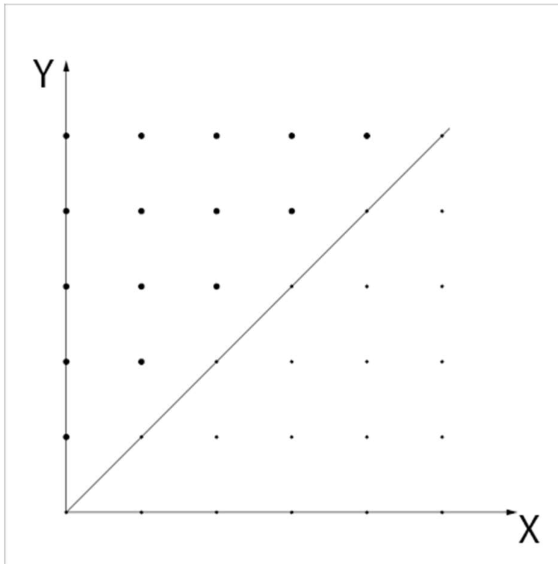

Рисунок 8 – носитель ряда в скобках после вынесения z

Продолжая преобразования, получим следующее:

$$z(F(z,w) - f_{00} - f_{11}zw - f_{22}z^2w^2 - f_{33}z^3w^3 - \cdots) =$$

$$= z\left(F(z,w) - \sum_{i=0}^{\infty} f_{ii}(zw)^i\right).$$

В сумме можно «узнать» производящую функцию чисел Каталана (1.2.6). И, окончательно, получим следующее выражение:

$$\sum_{y=0}^{\infty}\sum_{x=0}^{y} f_{x,y+1}z^{x+1}w^{y+1} = z\left(F(z,w) - \frac{1-\sqrt{1-4zw}}{2zw}\right). \qquad (2.3.14)$$

Преобразуем второе слагаемое в правой части:

$$\sum_{y=0}^{\infty}\sum_{x=0}^{y} f_{x+1,y} z^{x+1} w^{y+1} =$$

$$= f_{10}zw + f_{11}zw^2 + f_{21}z^2w^2 + f_{12}zw^3 + f_{22}z^2w^3 + f_{32}z^3w^3 + \cdots$$

Если первый индекс больше второго ($x > y$), то $f_{xy} = 0$ (начальное условие (2.3.3)). Тогда выражение примет следующий вид

$$\sum_{y=0}^{\infty}\sum_{x=0}^{y} f_{x+1,y} z^{x+1} w^{y+1} = w(f_{11}zw + f_{12}zw^2 + f_{22}z^2w^2 + \cdots).$$

После вынесения общего множителя w в скобках получим ряд, носитель которого изображен на рисунке 9:

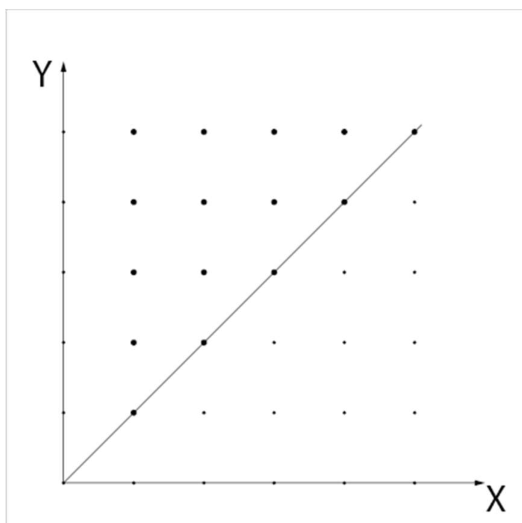

Рисунок 9 – носитель ряда в скобках после вынесения w

Преобразованиями, аналогичными предыдущим, получим выражение:

$$w(F(z,w) - f_{00} - f_{01}w - f_{02}w^2 - \cdots) =$$

$$= w\left(F(z,w) - \frac{1}{1-w}\right). \qquad (2.3.15)$$

Подставим полученные выражения (2.2.13-15) в уравнение (2.2.12). Тогда оно примет следующий вид:

$$F(z,w) - \frac{1}{1-w} = zF(z,w) - z \cdot \frac{1-\sqrt{1-4wz}}{2wz} + wF(z,w) - \frac{w}{1-w};$$

$$F(z,w) \cdot (1 - z - w) = \frac{1-w}{1-w} - \frac{1-\sqrt{1-4wz}}{2w};$$

откуда окончательно выразим искомую производящую функцию:

$$F(z,w) = \frac{2w - 1 + \sqrt{1-4wz}}{2w(1-w-z)}. \qquad (2.3.16)$$

В этом примере слагаемое $G_1(k) = \sum_{\mathrm{k}=0}^{\infty} f_{kk}(zw)^k$ было «угадано», в этом состоит недостаток данного метода.

2.4 Решение задачи с произвольными начальными данными

Для поиска другого решения рассмотрим в общем виде ряд, носителем которого являются точки, расположенные на прямой $x = qy$:

Такие точки имеют координаты вида $(nq, n), n \epsilon \mathbb{N} \cup \{0\}$, что соответствует членам ряда с мономами вида $(z^q w)^n$.

Точки под прямой, находящихся на расстоянии не более 1 от нее, можно разделить на q классов. Каждый такой класс точек представляет собой множество

$$\{(x, y) | (x, y) \epsilon (\mathbb{Z}_{\geq 0})^2 \cap (qy - x + j = 0), j = 1, \dots, q\}$$

Соответственно, из точки класса шагом (0,1) можно перейти в точку, лежащую на прямой $qy - x + j - q = 0$.

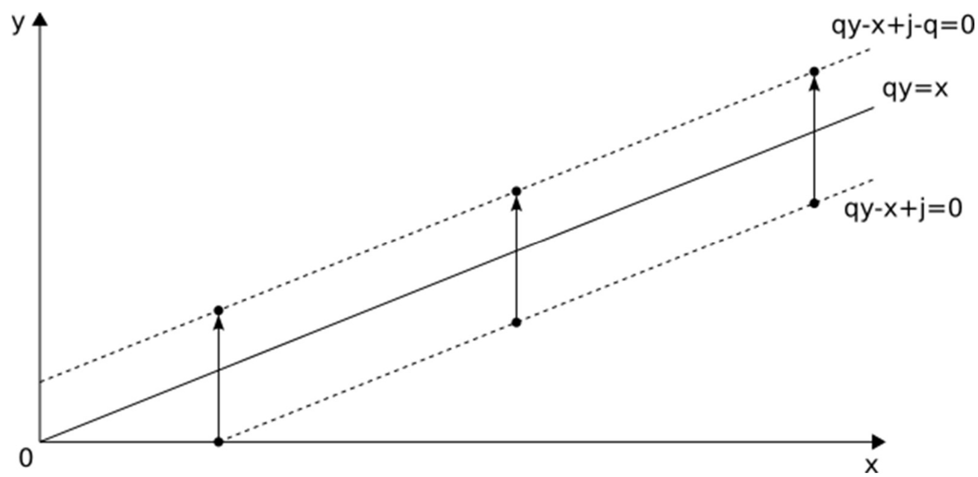

Рисунок 10 – точки прямой $qy - x + j = 0$ шагом (0,1) переходят на прямую $qy - x + j - q = 0$

Тогда в основном рекуррентном соотношении необходимо сделать поправки относительно «запрещённых» шагов. Если точка лежит выше прямой $x = qy$ на расстоянии не более 1, то шаг вверх в неё запрещён. Реализуем это с помощью функции $\chi_0(k) = \begin{cases} 1, k = 0, \\ 0, k \neq 0. \end{cases}$

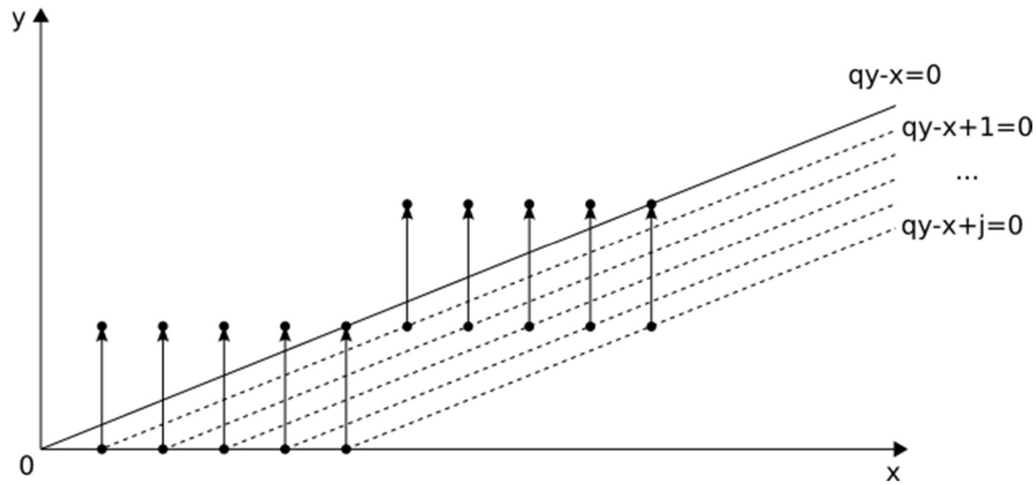

Рисунок 11 – Недопустимые шаги ($q = 5$)

Когда $(x+1, y+1)$ лежит на прямых, на которые нельзя сделать шаг снизу, функция $\chi_0(k)$ принимает значение 1, и слагаемое $f_{x+1,y}$ исчезает. Таким образом, оно не вносит вклад в количество путей те пути, что пересекают прямую $qy = x$.

Найдём вид множества таких точек, чтобы определить вид основного рекуррентного соотношения:

$$\left\{(x+1, y+1)\Big|_{\epsilon(\mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}) \cap (q(y+1)-(x+1)+j-q=0), j=1,\dots,q}^{(x+1,y+1)\epsilon}\right\}$$

Приводим подобные:

$$\{(x+1, y+1) | (x+1, y+1)\epsilon(\mathbb{Z}_{\geq 0} \times \mathbb{Z}_{\geq 0}) \cap (qy - x - 1 + j = 0), j = 1, \dots, q\},$$

откуда получим основное рекуррентное соотношение задачи:

$$f_{x+1,y+1} = f_{x+1,y} + f_{x,y+1} - \left(\sum_{j=1}^{q} \chi_0(qy - x + j - 1)\right) \cdot f_{x+1,y} \qquad (2.4.1).$$

с некоторыми начальными условиями

$$f_{k,0} = f_1(k), \qquad f_{0,k} = f_2(k), \qquad f_{0,0} = f_1(0) = f_2(0) \tag{2.4.2}$$

Найдем производящую функцию в общем виде. Умножим полученное рекуррентное соотношение (2.4.1) на $z^{x+1}w^{y+1}$ и просуммируем по всем неотрицательным значениям x, y:

$$\sum_{\substack{x\geq 0,\\ y\geq 0}} f_{x+1,y+1}z^{x+1}w^{y+1} = \sum_{\substack{x\geq 0,\\ y\geq 0}} f_{x+1,y}z^{x+1}w^{y+1} + \sum_{\substack{x\geq 0,\\ y\geq 0}} f_{x,y+1}z^{x+1}w^{y+1} -$$

$$-\sum_{\substack{x\geq 0,\\ y\geq 0}} \left(\sum_{j=1}^{q} \chi_0(qy - x + j - 1)\right) \cdot f_{x+1,y}z^{x+1}w^{y+1}; \tag{2.4.2}$$

Рассмотрим каждое слагаемое (2.3.2) в отдельности.

Преобразуем левую часть уравнения:

$$\sum_{\substack{x\geq 0,\\ y\geq 0}} f_{x+1,y+1}z^{x+1}w^{y+1} = F(z,w) - F(z,0) - F(0,w) + f_{0,0}; \tag{2.4.3}$$

Преобразуем первое слагаемое во второй части:

$$\sum_{\substack{x\geq 0,\\ y\geq 0}} f_{x+1,y}z^{x+1}w^{y+1} = w\sum_{\substack{x\geq 0,\\ y\geq 0}} f_{x+1,y}z^{x+1}w^{y} = w\big(F(z,w) - F(0,w)\big); \tag{2.4.4}$$

Преобразуем второе слагаемое во второй части:

$$\sum_{\substack{x\geq 0,\\ y\geq 0}} f_{x,y+1}z^{x+1}w^{y+1} = z\sum_{\substack{x\geq 0,\\ y\geq 0}} f_{x,y+1}z^{x+1}w^{y+1} = z\big(F(z,w) - F(z,0)\big); \tag{2.4.5}$$

Преобразуем третье слагаемое во второй части (для всех $j = 1, \dots, q$):

$$\sum_{\substack{x\geq 0,\\ y\geq 0}} \chi_0(qy - x + j - 1) \cdot f_{x+1,y}z^{x+1}w^{y+1} =$$

$$= [qy - x + j - 1 = 0, x = qy + j - 1; \text{пусть } y = k, k \geq 0] =$$

$$= \sum_{k \geq 0} 1 \cdot f_{qk+j-1+1,k} \cdot z^{qk+j-1+1} w^{k+1} = wz^j \sum_{k \geq 0} f_{qk+j,k} \cdot z^{qk} w^k =$$

$$= wz^j \sum_{k \geq 0} f_{qk+j,k} \cdot (z^q w)^k. \tag{2.4.6}$$

Ряд $\sum_{k \geq 0} f_{qk+j,k} \cdot (z^q w)^k$ зависит от $z^q w$, обозначим каждый ряд как $D_j(z^q w)$:

$$D_j(z^q w) = \sum_{k \geq 0} f_{qk+j,k} \cdot (z^q w)^k, j = 1, \dots, q. \tag{2.4.7}$$

Тогда после подстановки (2.4.3-6) уравнение (2.4.2) примет вид

$$(1 - z - w)F(z, w) =$$

$$= (1 - z)F(z, 0) + (1 - w)F(0, w) - f_{0,0} - \sum_{j=1}^{q} (wz^j) D_j(z^q w),$$

откуда

$$F(z, w) = \frac{(1 - z)F(z, 0) + (1 - w)F(0, w) - f_{0,0} - \sum_{j=1}^{q} (wz^j) D_j(z^q w)}{1 - z - w}. \tag{2.4.8}$$

Применим эти вычисления для случая, когда $q = 1$, и заново рассмотрим основное рекуррентное соотношение для биссектрисы первого квадранта:

$$f_{x+1,y+1} = f_{x+1,y} + f_{x,y+1} - \chi_0(y - x) f_{x+1,y} \tag{2.4.9}$$

с начальными условиями

$$x \geq 0, y \geq 0,$$

$$f_{k,0} = 1, f_{0,k} = 1 \ \ \forall k \geq 0, \qquad f_{0,0} = 1 \tag{2.4.10}$$

Домножим (2.4.8) на $z^{x+1}w^{y+1}$ и просуммируем по x и y от 0 до бесконечности:

$$\sum_{x,y\geq 0} f_{x+1,y+1} z^{x+1} w^{y+1} =$$

$$= \sum_{x,y\geq 0} \left(f_{x+1,y} z^{x+1} w^{y+1} + f_{x,y+1} z^{x+1} w^{y+1} \right) -$$

$$- \sum_{x,y\geq 0} \chi_0(y-x) f_{x+1,y} z^{x+1} w^{y+1} \, ;$$

Аналогично (2.4.3) получим уравнение

$$F(z,w) - F(0,w) - F(z,0) + f_{0,0} =$$

$$= \sum_{x,y\geq 0} \left(w \cdot f_{x+1,y} z^{x+1} w^{y} + z \cdot f_{x,y+1} z^{x} w^{y+1} \right) -$$

$$- w \cdot \sum_{x,y\geq 0} \chi_0(y-x) f_{x+1,y} z^{x+1} w^{y}.$$

Рассмотрим каждое из слагаемых в правой части уравнения (2.4.9) и упростим их так, чтобы суммирование по обеим переменным начиналось с 0:

$$\sum_{x,y\geq 0} f_{x+1,y} z^{x+1} w^y = F(z,w) - \sum_{y\geq 0} f_{0,y} w^y\,, \tag{2.4.10}$$

$$\sum_{x,y\geq 0} f_{x,y+1} z^x w^{y+1} = F(z,w) - \sum_{x\geq 0} f_{x,0} z^x \tag{2.4.11}$$

$$\sum_{x,y\geq 0} \chi_0(y-x) f_{x+1,y} z^{x+1} w^y = \sum_{x\geq 1, y\geq 0} \chi_0(y-x+1) f_{x,y} z^x w^y =$$

$$= \sum_{x\geq 0, y\geq 0} \chi_0(y-x+1) f_{x,y} z^x w^y - \sum_{y\geq 0, x=0} \chi_0(y+1) f_{0,y} w^y$$

$$= [\chi_0(y+1) = 0 \ \forall y \geq 0] =$$

$$= \sum_{x\geq 0, y\geq 0} \chi_0(y-x+1) f_{x,y} z^x w^y \tag{2.4.12}$$

Подставим (2.3.10-12) в уравнение (2.3.9):

$$F(z,w) - F(0,w) - F(z,0) + f_{0,0} =$$

$$= w \cdot \left(F(z,w) - \sum_{y\geq 0} f_{0,y} w^y \right) + z \cdot \left(F(z,w) - \sum_{x\geq 0} f_{x,0} z^x \right) -$$

$$-w \cdot \sum_{x\geq 0, y\geq 0} \chi_0(y-x+1) f_{x,y} z^x w^y;$$

$$F(z,w)(1-z-w) =$$
$$= (1-w)F(0,w) + (1-z)F(z,0) - f_{0,0} - w\cdot$$
$$\cdot \sum_{x\geq 0, y\geq 0} \chi_0(y-x+1) f_{x,y} z^x w^y;$$

Обозначим

$$\sum_{x\geq 0, y\geq 0} \chi_0(y-x+1) f_{x,y} z^x w^y = D(zw).$$

$$F(z,w)(1-z-w) = (1-w)F(0,w) + (1-z)F(z,0) - f_{0,0} - w\cdot D(zw).$$

Положим $zw = \xi$, рассмотрим систему

$$\begin{cases} zw = \xi, \\ 1-z-w = 0. \end{cases}$$

Её решением являются следующие значения $w(\xi)$:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}w(\xi)=\dfrac{1-\sqrt{1-4\xi}}{2},\\ z(\xi)=\dfrac{1+\sqrt{1-4\xi}}{2};\end{cases}\\ \begin{cases}w(\xi)=\dfrac{1+\sqrt{1-4\xi}}{2}\\ z(\xi)\dfrac{1-\sqrt{1-4\xi}}{2}.\end{cases},\end{array}\right.$$

Рассмотрим каждую пару. Если

$$\begin{cases}w(\xi)=\dfrac{1-\sqrt{1-4\xi}}{2},\\ z(\xi)=\dfrac{1+\sqrt{1-4\xi}}{2};\end{cases}$$

то

$$D(\xi)=\frac{1}{w}=\frac{2}{1-\sqrt{1-4\xi}}=\frac{1+\sqrt{1-4\xi}}{2\xi};$$

Тогда

$$F(z,w)(1-z-w)=1-w\cdot\frac{1+\sqrt{1-4zw}}{2\,zw};$$

$$F(z,w)(1-z-w)=1-\frac{1+\sqrt{1-4zw}}{2\,z}.$$

Следствием этого уравнения является следующее равенство:

$$2z(1-z-w)F(z,w) = 2z - 1 - \sqrt{1-4zw}.$$

Однако заметим, что при $z = 0$ оно обращается в неверное:

$$0 = -1 - 1.$$

Следовательно, корень $w(\xi) = \frac{1-\sqrt{1-4\xi}}{2}$ не дает производящую функцию этой последовательности.

Если

$$\begin{cases} w(\xi) = \dfrac{1+\sqrt{1-4\xi}}{2}, \\ z(\xi) = \dfrac{1-\sqrt{1-4\xi}}{2}; \end{cases}$$

то

$$D(z,w) = \frac{1+\sqrt{1-4zw}}{2zw};$$

$$F(z,w)(1-z-w) = 1 - w \cdot \frac{1-\sqrt{1-4zw}}{2\,zw};$$

$$F(z,w)(1-z-w) = 1 - \frac{1-\sqrt{1-4zw}}{2\,z};$$

$$F(z,w) = \frac{1 - \frac{1-\sqrt{1-4zw}}{2\,z}}{(1-z-w)} = \frac{2z-1+\sqrt{1-4zw}}{2z(1-z-w)}.$$

Теперь применим этот метод к случаю, когда $q = 2,$ заданы единичные начальные условия на координатных осях. Запишем основное рекуррентное соотношение.

Рассмотрим уравнение

$$f_{x+1,y+1} = f_{x+1,y} + f_{x,y+1} - \chi_0(2y-x)f_{x+1,y} - \chi_0(2y-x+1)f_{x+1,y} \quad (2.4.13)$$

$$f_{0,0} = 1, f_{0,y} = 1, f_{x,0} = 1 \ \forall x, y \in \mathbb{N} \quad (2.4.14)$$

где $\chi_0(k) = \begin{cases} 1, k = 0, \\ 0, k \neq 0. \end{cases}$

Слагаемые $\chi_0(2y-x)f_{x,y-1}$ и $\chi_0(2y-x+1)f_{x,y-1}$ «запрещают» шаги вида $(0,1)$ из точек $(2k, k-1), k \geq 1$ и $(2m-1, m-1), m \geq 2$. То есть здесь запрещены шаги, пересекающие прямую $2y - x = 0$ или заканчивающиеся на ней.

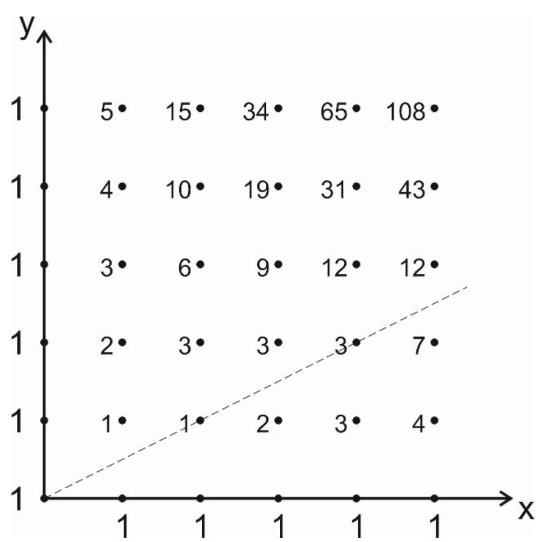

Рисунок 12 – Последовательность $f_{x,y}$ при $q = 2$

Умножим на $z^{x+1}w^{y+1}$ и просуммируем по x и y от 0 до бесконечности:

$$\sum_{x\geq 0, y\geq 0} f_{x+1,y+1} z^{x+1} w^{y+1} =$$

$$= \sum_{x\geq 0, y\geq 0} f_{x+1,y} z^{x+1} w^{y+1} + \sum_{x\geq 0, y\geq 0} f_{x,y+1} z^{x+1} w^{y+1} -$$

$$- \sum_{x\geq 0, y\geq 0} \chi_0(2y-x) f_{x+1,y} z^{x+1} w^{y+1} - \sum_{x\geq 0, y\geq 0} \chi_0(2y-x+1) f_{x+1,y} z^{x+1} w^{y+1}.$$

Образом, описанным в случае произвольного q, преобразуем левую часть уравнения, а затем и первые два слагаемых в правой части уравнения, после чего получим следующее уравнение:

$$F(z,w)(1-z-w) = (1-w)F(0,w) + (1-z)F(z,0) - f_{0,0} -$$

$$- \sum_{x\geq 0, y\geq 0} \chi_0(2y-x) f_{x+1,y} z^{x+1} w^{y+1} - \sum_{x\geq 0, y\geq 0} \chi_0(2y-x+1) f_{x+1,y} z^{x+1} w^{y+1};$$

При (2.3.14)

$$F(z,0) = \frac{1}{1-z}, F(0,w) = \frac{1}{1-w},$$

тогда

$$F(z,w)(1-z-w) =$$

$$= 1 - \sum_{x\geq 0, y\geq 0} \chi_0(2y-x) f_{x+1,y} z^{x+1} w^{y+1} -$$

$$- \sum_{x\geq 0, y\geq 0} \chi_0(2y-x+1) f_{x+1,y} z^{x+1} w^{y+1}. \qquad (2.4.15)$$

Рассмотрим отдельно суммы, содержащие функцию $\chi_0(k)$, и преобразуем их таким образом, чтобы избавиться от множителя $\chi_0(k)$. Принимая обозначения (2.4.7), преобразуем первую сумму:

$$\sum_{x\geq 0,y\geq 0} \chi_0(2y-x) f_{x+1,y} z^{x+1} w^{y+1} = w \cdot \sum_{x\geq 0,y\geq 0} \chi_0(2y-x) f_{x+1,y} z^{x+1} w^{y}$$

$$= w \cdot \sum_{x\geq 1,y\geq 0} \chi_0(2y-x+1) f_{x,y} z^{x} w^{y} =$$

$$= w\left(\sum_{x\geq 0,y\geq 0} \chi_0(2y-x+1) f_{x,y} z^{x} w^{y} - \sum_{x=0,y\geq 0} \chi_0(2y+1) f_{0,y} w^{y}\right) =$$

$$= [\chi_0(2y+1) = 0\ \forall y \geq 0] =$$

$$= w \cdot \left(\sum_{x\geq 0,y\geq 0} \chi_0(2y-x+1) f_{x,y} z^{x} w^{y}\right)$$

$$= w \cdot \left(\sum_{x\geq 0,y\geq 0} \chi_0(2y-x+1) f_{x,y} z^{x} w^{y}\right) =$$

$$= [2y-x+1=0;\ x = 2y+1.\,\text{Примем}\ y = k, k \geq 0] =$$

$$= w \cdot \left(\sum_{k\geq 0} f_{2k+1,k} z^{2k+1} w^{k}\right) = zw \cdot \left(\sum_{k\geq 0} f_{2k+1,k} (z^2 w)^{k}\right) = zw \cdot D_1(z^2 w); (2.4.16)$$

Преобразуем вторую сумму:

$$\sum_{x\geq 0, y\geq 0} \chi_0(2y-x+1) f_{x+1,y} z^{x+1} w^{y+1} =$$

$$= w \cdot \sum_{x\geq 0, y\geq 0} \chi_0(2y-x+1) f_{x+1,y} z^{x+1} w^{y} =$$

$$= [2y-x+1=0;\ x=2y+1.\text{Примем } y=k, k\geq 0] =$$

$$= w \cdot \sum_{k\geq 0} f_{2k+2,k} z^{2k+2} w^k =$$

$$= z^2 w \sum_{k\geq 0} f_{2k+2,k} (z^2 w)^k = z^2 w \cdot D_2(z^2 w). \qquad (2.4.17)$$

Подставим (2.3.16-17) в уравнение (2.3.15) и получим

$$F(z,w)(1-z-w) = 1 - zw \cdot D_1(z^2 w) - z^2 w \cdot D_2(z^2 w). \qquad (2.4.18)$$

Положим $z^2 w = \xi$, рассмотрим систему

$$\begin{cases} z^2 w = \xi, \\ 1-z-w=0; \end{cases} \begin{cases} z^2(1-z) = \xi \\ 1-z-w=0; \end{cases} \begin{cases} z^3 - z^2 + \xi = 0, \\ w = 1-z. \end{cases}$$

Первое уравнение системы как уравнение алгебраическое уравнение третьей степени имеет один действительный корень и два комплексных сопряженных корня z, зависящих от ξ:

$$z_1(\xi)=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt[3]{3\sqrt{3}\sqrt{27\xi^2-4\xi}-27\xi+2}}{\sqrt[3]{2}}+\frac{\sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{3\sqrt{3}\sqrt{27\xi^2-4\xi}-27\xi+2}}+1\right),$$

$$z_2(\xi)=\frac{1}{3}-\frac{\left(1-i\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt[3]{3\sqrt{3}\sqrt{27\xi^2-4\xi}-27\xi+2}}{6\sqrt[3]{2}}-\frac{\left(1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt[3]{2}}{6\sqrt[3]{3\sqrt{3}\sqrt{27\xi^2-4\xi}-27\xi+2}},$$

$$z_3(\xi)=\frac{1}{3}-\frac{\left(1+i\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt[3]{3\sqrt{3}\sqrt{27\xi^2-4\xi}-27\xi+2}}{6\sqrt[3]{2}}-\frac{\left(1-\mathrm{i}\sqrt{3}\right)\cdot\sqrt[3]{2}}{6\sqrt[3]{3\sqrt{3}\sqrt{27\xi^2-4\xi}-27\xi+2}}$$

Примем $w_i(\xi)=1-z_i(\xi), i=1,2,3,$ и подставим в уравнение:

$$0=1-z_i(\xi)w_i(\xi)\cdot D_1(\xi)-z_i^2(\xi)w_i(\xi)\cdot D_2(\xi).$$

Выполним новую замену переменного: пусть $zw=\eta, z\eta=\xi$.

$$\begin{cases} zw=\eta,\\ z\eta=\xi,\\ 1-z-w=0; \end{cases}\quad \begin{cases} z\eta=\xi,\\ z=\dfrac{1-\sqrt{1-4\eta}}{2},\\ w=\dfrac{1+\sqrt{1-4\eta}}{2}; \end{cases}\text{или}\quad \begin{cases} z\eta=\xi,\\ z=\dfrac{1+\sqrt{1-4\eta}}{2},\\ w=\dfrac{1-\sqrt{1-4\eta}}{2}. \end{cases}$$

Подставим в уравнение и выразим $D_2(\xi)$:

$$0=1+\frac{1+\sqrt{1-4\eta}}{2}-\eta D_1(\xi)-\frac{1+\sqrt{1-4\eta}}{2}D_2(\xi);$$

$$0=2+\left(1+\sqrt{1-4\eta}\right)-2\eta D_1-\left(1+\sqrt{1-4\eta}\right)D_2;$$

$$D_2(\xi) = \frac{2 - 2\eta D_1}{1 + \sqrt{1 - 4\eta}} + 1;$$

$$D_2(\xi) = \frac{2z - 2\xi D_1}{z + \sqrt{z^2 - 4z\xi}} + 1;$$

$$D_2(\xi) = D_1(\xi)\left(\frac{-2\xi}{z + \sqrt{z^2 - 4z\xi}}\right) + \frac{2z}{z + \sqrt{z^2 - 4z\xi}} + 1.$$

Таким образом, была получена система уравнений:

$$\begin{cases} z^2 w = \xi, \\ 1 - z - w = 0; \\ 0 = 1 - z_i(\xi)w_i(\xi) \cdot D_1(\xi) - z_i^2(\xi)w_i(\xi) \cdot D_2(\xi), \\ D_2(\xi) = D_1(\xi)\left(\dfrac{-2\xi}{z_i(\xi) + \sqrt{\left(z_i(\xi)\right)^2 - 4z_i\xi}}\right) + \dfrac{2z_i(\xi)}{z_i(\xi) + \sqrt{\left(z_i(\xi)\right)^2 - 4z_i(\xi)\xi}} + 1; \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} z^2 w = \xi, \\ 1 - z - w = 0; \\ D_1(\xi) = \dfrac{\left(z_i(\xi) - 3\left(z_i(\xi)\right)^3 w_i(\xi) + \left(1 - z_i^2(\xi)w_i(\xi)\right)\sqrt{\left(z_i(\xi)\right)^2 - 4z_i\xi}\right)}{z_i(\xi)w_i(\xi)\left(z_i(\xi) - 2\xi z_i(\xi) + \sqrt{\left(z_i(\xi)\right)^2 - 4z_i\xi}\right)}, \\ D_2(\xi) = \dfrac{-2z_i(\xi)\left(z_i(\xi) - 3\left(z_i(\xi)\right)^3 w_i(\xi) + \left(1 - z_i^2(\xi)w_i(\xi)\right)\sqrt{\left(z_i(\xi)\right)^2 - 4z_i\xi}\right)}{\left(z_i(\xi) + \sqrt{\left(z_i(\xi)\right)^2 - 4z_i\xi}\right)\left(z_i(\xi) - 2\xi z_i(\xi) + \sqrt{\left(z_i(\xi)\right)^2 - 4z_i\xi}\right)} + \\ \qquad + \dfrac{2z_i(\xi)}{z_i(\xi) + \sqrt{\left(z_i(\xi)\right)^2 - 4z_i(\xi)\xi}} + 1. \end{cases}$$

2.5 Сведение задачи к нахождению производящей функции одной переменной

Линейным преобразованием $(x, y) \to (x + y, qy - x)$ из множества шагов $\{(0,1), (1,0)\}$ получим множество $\{(1, q), (1, -1)\}$, прямая $qy = x$ станет осью абсцисс, а ось ординат перейдёт в прямую $qy = x$.

Тогда задачу можно переформулировать следующим образом:

Найти число путей $f(x, y)$, которыми точка может попасть из начала координат (0,0) в точку $(x, y)\epsilon\mathbb{Z}^2$, перемещаясь с шагом $(1, q), (1, -1)$ где q – целое положительное число, начинающихся в нуле, остающихся внутри первого квадранта $\mathbb{Z}^2$ и заканчивающихся в некоторой точке $M(x, y)$.

Определим конус K, порождённый данным множеством шагов:

$$K = K(\{(1, q), (1, -1)\}),$$

и вспомогательные множества A и B:

$$A = K \cap \mathbb{Z}^2,$$

$$B = A \backslash \{(0,0)\}.$$

Тогда основное рекуррентное соотношение можно записать следующим образом:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, \quad \text{если } (x, y) = (0,0), \\ 0, \quad \text{если } (x, y) \notin A, \\ f(x - 1, y + 1) + f(x - 1, y - q), \text{если } (x, y) \in B. \end{cases}$$

Найдем производящую функцию $F(z, w) = \sum_{(x,y)\in A} f(x, y) z^x w^y$:

$$F(z, w) = 1 + \sum_{(x,y)\in B} f(x, y) z^x w^y =$$

$$= 1 + \sum_{(x,y)\in B} \big(f(x - 1, y + 1) + f(u - 1, v - q)\big) z^x w^y =$$

$$= 1 + zw^{-1} \sum_{(x,y)\in B} f(x-1, y+1) z^{x-1} w^{y+1} +$$

$$+ zw^{q} \sum_{(x,y)\in B} f(x-1, y-q) z^{x-1} w^{y-q} =$$

$$= 1 + zw^{-1} \sum_{(x,y)\in B-(1,-1)} f(x,y) z^{x} w^{y} + zw^{q} \sum_{(x,y)\in B-(1,q)} f(x,y) z^{x} w^{y}$$

$$= 1 + zw^{-1} \sum_{(x,y)\in \left(B-(1,-1)\right)\cap A} f(x,y) z^{x} w^{y} + zw^{q} \sum_{(x,y)\in \left(B-(1,q)\right)\cap A} f(x,y) z^{x} w^{y} =$$

$$= 1 + zw^{-1}\big(F(z,w) - F(z,0)\big) + zw^{q} F(z,w).$$

Отсюда

$$F(z,w) = 1 + zw^{-1}\big(F(z,w) - F(z,0)\big) + zw^{q} F(z,w),$$

$$(w - z - zw^{q+1}) F(z,w) = w - zF(z,0),$$

$$F(z,w) = \frac{w - zF(z,0)}{w - z - zw^{q+1}}. \tag{2.5.1}$$

В этом случае производящая функция $F(z,w)$ зависит только от одной функции $F(z,0)$, которая, в свою очередь, является функцией одной переменной z.

Для того, чтобы найти $F(z,0)$, рассмотрим нули знаменателя $F(z,w)$:

$$w - z - zw^{q+1} = 0,$$

откуда получим $w = w(z)$, $F(z,0) = \frac{w(z)}{z}$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Магистерская диссертация посвящена применению методов теории линейных разностных уравнений и производящих функций нескольких переменных в одной из классических задач перечислительного комбинаторного анализа – задаче о числе решёточных путей при некоторых ограничениях на движение точки то целочисленной решётке.

В результате исследований найдено число путей, не проходящих через заданное конечное множество точек целочисленной решётки $\mathbb{Z}^2$. Также получено существенное продвижение в решении задачи о решёточных путях, ограниченных осью ординат и прямой с рациональным уклоном.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Bousquet-Melou, M., Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case / M. Bousquet-Melou, M. Petkovsek // Discrete Mathematics. – 2000. – v.225. – P. 51-75.
2. Ландо, С. К. Лекции о производящих функциях 3-е издание, исправленное : учебник / С. К. Ландо. – Москва: МЦНМО, 2007. – 144 с.
3. Виленкин, Н. Я. Комбинаторика : учебник / Н. Я Виленкин. – Москва : издательство «Наука», главная редакция математической литературы, 1969. – 323 с.
4. Гульден, Я., Перечислительная комбинаторика : пер. с англ./ под.ред. В.Е. Тараканова. – М. Наука. гл.ред. физ-мат. Лит., 1990. – 504 с.
5. Лейнартас, Е. К. Кратные ряды Лорана и фундаментальные решения линейных разностных уравнений / Е. К. Лейнартас // Сибирский математический журнал. – 2007. – Т.48, №2. – С. 268-272.
6. Лейнартас, Е. К., Линейные разностные уравнения с постоянными коэффициентами в рациональных концах целочисленной решётки / Е. К. Лейнартас, Т. Н. Некрасова // Сибирский математический журнал. – 2016. – Т.57, №1. – С. 98-112.
7. Lyapin, A. P., Generating Functions for Vector Partitions and a Basic Recurrence Relations / A. P. Lyapin, S. Chandragiri // Journal of Difference Equations and Applications. – 2019. – V.25, №7. – P. 1052-1061.
8. Lyapin, A.P., Recurrence relations for the sections of the generating series of the solution to the multidimensional difference equation / A. P. Lyapin, S. S. Akhmatova // Vestnik Udmurtskogo universiteta – Matematika Mekhanika Kompyuternye Nauki. – 2021. -- Vol. 31, Is. 3. – P. 414-423
9. Ахтамова, С.С., О сечениях производящих рядов в задачах о решёточных путях. / С. С. Ахтамова, В. Ю.Гришунов, А. П. Ляпин, С. А. Тихомиров// Прикладная математика & Физика. – 2020. – Т.52, №2 – С. 146-151.
10. Chandragiri, S. Difference Equations and Generating Functions for some Lattice Problems. / S. Chandragiri // Journal of Siberian Federal University, Mathematics and Physics. – 2019. – v.12, №5. – P. 551-559.
11. Bousquet-Melou, M., Walks confined in a quadrant are not always D-finite, / M. Bousquet-Melou, M. Petkovsek // Theoretical Computer Science. – 2003 – V.307(2) – P.257–276.
12. Chandragiri, S. The Cauchy problem for difference equations in lattice cones and generating functions for its solutions: автореферат диссертации на соискание учёной степени PhD / Чандрагири Шрилатха ; Сибирский федеральный университет. – Красноярск, 2020. – 71 с.
13. Banderier, C., Basic analytic combinatorics of directed lattice paths, / C. Banderier, P. Flajolet, // Theoretical Computer Science. – 2002. – v.281 – P.37-80.
14. A. P. Lyapin, Riordan's Arrays and Two-dimensional Difference Equations, Journal of Siberian Federal University Mathematics & Physics, 2009, 2(2), 210–220.
15. E. K. Leinartas, A. P. Lyapin, On the Rationality of Multidimensional Recursive Series, Journal of Siberian Federal University Mathematics & Physics, 2009, 2(4), 449–455.
16. A. A. Kytmanov, A. P. Lyapin, T. M. Sadykov, Evaluating the Rational Generating Function for the Solution of the Cauchy Problem for a Two-Dimensional Difference

Equation with Constant Coefficients, Programming and Computer Software, 2017, 43(2), 105–111.

17. A. P. Lyapin, S. Chandragiri, The Cauchy Problem for Multidimensional Difference Equations in Lattice Cones, Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics, 2020, 13(2), 187–196.
18. M. S. Apanovich, A. P. Lyapin, K. V. Shadrin, Solving the Cauchy Problem for a Two-Dimensional Difference Equation at a Point Using Computer Algebra Methods, Programming and Computer Software, 2021, 47(1), 1–5.
19. M. S. Apanovich, A. P. Lyapin, K. V. Shadrin, Algorithm for Solving the Cauchy Problem for a Two-Dimensional Difference Equation with Initial Data Defined in a “Strip”, Programming and Computer Software, 2022, 48(4), 286–292.
20. A.P. Lyapin, T. Cuchta, Sections of the generating series of a solution to the multidimensional difference equation, Bulletin of Irkutsk State University-Series mathematics, 2022, 42, 75–89.
21. M. S. Apanovich, A. P. Lyapin, K. V. Shadrin, Solving the Cauchy problem for a three-dimensional difference equation in a parallelepiped, Programming and Computer Software, 2023, 49(2), 61–68

Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра теории функций

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
А. Цих Цих А.К.
«23» 06 2023г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЗАДАЧАХ О РЕШЁТОЧНЫХ ПУТЯХ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Направление 01.04.01 Математика

Магистерская программа 01.04.01.01 Комплексный анализ

Руководитель	22.06.23.	профессор, доктор физико-математических наук	Е.К.Лейнартас
Выпускник	22.06.23		А.Е. Зернова
Нормоконтролер	23.06.23		Т.Н. Шипина

Красноярск, 2023