

АННОТАЦИЯ

Цель работы – построение полулагранжевых разностных схем для уравнений переноса и конвекции-диффузии.

В основе построения полулагранжевых методов лежит метод характеристик.

В результате работы построены полулагранжевы разностные схемы для уравнений переноса и конвекции-диффузии, обоснованы порядки точности полученных разностных схем и проведены вычислительные эксперименты.

Ключевые слова: уравнение переноса, уравнение конвекции-диффузии, численные полулагранжевы методы, аппроксимация, устойчивость, сходимость.

The aim of the study is to construct semi-Lagrangian difference schemes for the transport and convection-diffusion equations.

The construction of semi-Lagrangian methods is based on the method of characteristics.

As a result of the study, semi-Lagrangian difference schemes for the transport and convection-diffusion equations are constructed, the accuracy orders of the obtained difference schemes are justified, and computational experiments are carried out.

Keywords: transport equation, convection-diffusion equation, numerical semi-Lagrangian methods, approximation, stability, convergence.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
1 Полулагранжевы методы решения одномерного уравнения переноса субстанции	7
1.1 Эйлера-лагранжева аппроксимация.....	8
1.2 Свойства лагранжевых сеток	13
1.3 Лагранжево-эйлерова аппроксимация	18
1.4 Вычислительные эксперименты.....	21
2 Полулагранжевы методы решения одномерного уравнения конвекции- диффузии.....	24
2.1 Эйлера-лагранжева аппроксимация.....	25
2.3 Лагранжево-эйлерова аппроксимация	28
2.4. Вычислительные эксперименты.....	31
3 Полулагранжевы методы для двумерных задач	33
3.1. Эйлера-лагранжева аппроксимация.....	34
3.2 Лагранжево-эйлерова аппроксимация	39
3.3 Вычислительные эксперименты.....	40
Заключение	43
Список использованных источников	44

ВВЕДЕНИЕ

Современное математическое моделирование прикладных задач механики жидкости и газа основано на численном решении краевых задач для систем нестационарных уравнений с частными производными. Эти уравнения часто содержат операторы переноса субстанции (конвекции, адвекции) в недивергентной форме. Такие операторы используются в уравнениях распространения примесей при известном поле скоростей жидкости, в том числе с учетом диффузии в составе параболических уравнений конвекции-диффузии. В работе рассмотрены несколько простых уравнений в частных производных с операторами переноса в недивергентной форме.

Для численного решения уравнений в частных производных введем равномерные разностные сетки по пространству $\bar{\omega}_x = \{x_i = ih, i = 0, \dots, N\}$ и по времени $\omega_\tau = \{t_k = k\tau, k = 0, \dots, M\}$ с целыми $N, M \geq 2$. Также введем обозначение $y(t_k, x_i) = y_{k,i}$ для произвольной функции $y(t, x)$ в узлах сеток ω_τ и $\bar{\omega}_x$.

Первым из уравнений рассматривается гиперболическое уравнение, описывающее процесс переноса субстанции (адвекции)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x) \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1] \quad (1)$$

с функцией $a(t, x)$, представляющей скорость потока субстанции с распределением плотности $u(t, x)$.

На начальном этапе формирования численных методов с операторами переноса большую роль играли монотонные разностные схемы, у которых положительное начальное распределение гарантировало положительное распределение в последующие моменты времени. Для уравнений и систем гиперболического типа понятие о таких схемах введено К. О. Фридрихсом [1]. К этому классу разностных схем относится двухслойная схема Лакса [2]

$$\frac{u_{k+1,i}^{\tau,h} - 0.5(u_{k,i+1}^{\tau,h} + u_{k,i-1}^{\tau,h})}{\tau} + a(t_k, x_i) \frac{u_{k,i+1}^{\tau,h} - u_{k,i-1}^{\tau,h}}{2h} = f_{k,i} \quad (2)$$

с погрешностью аппроксимации вида $O(\tau + h^2/\tau)$. Очевидно, что аппроксимация схемы Лакса имеет место только при определенной связи между шагами τ и h , поэтому она принадлежит классу условно аппроксимирующих схем [2]. При $\tau = O(h^2)$ схема Лакса не будет аппроксимировать уравнение (1), а при выполнении условия

$$r = \frac{a\tau}{h} = \text{const}, \quad (3)$$

которое называют законом предельного перехода, схема (2) будет обладать аппроксимацией порядка $O(\tau + h)$. Также схема Лакса является условно устойчивой. Для достижения устойчивости необходимо, чтобы для (3) выполнялся признак Неймана (признак устойчивости) [2]

$$0 < \frac{a\tau}{h} \leq 1. \quad (4)$$

Для решения уравнения (1) также известна одношаговая схема Лакса-Вендроффа

$$\frac{u_{k+1,i}^{\tau,h} - u_{k,i}^{\tau,h}}{\tau} + a(t_k, x_i) \frac{u_{k,i+1}^{\tau,h} - u_{k,i-1}^{\tau,h}}{2h} - a^2(t_k, x_i) \frac{\tau}{2h^2} (u_{k,i+1}^{\tau,h} - 2u_{k,i}^{\tau,h} + u_{k,i-1}^{\tau,h}) = f_{k,i}$$

с погрешностью аппроксимации $O(\tau^2 + h^2)$. Необходимое условие устойчивости записывается как

$$\left(1 - 2r^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}\right)^2 + r^2 \sin^2 \varphi \leq 1.$$

При упрощении этого неравенства можно заметить, что оно равносильно условию $r^2 \leq 1$, поэтому условие устойчивости схемы Лакса-Вендроффа совпадает с условием устойчивости (4) схемы Лакса [2].

Неоценимый вклад в развитие разностных схем для уравнения переноса внес С. К. Годунов [3]. В своей работе он рассмотрел простейшее одномерное линейное однородное уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (5)$$

с постоянной скоростью $\lambda = const$, и аппроксимирующую его явную двухслойную линейную разностную схему

$$u_i^{k+1} = \sum_{s=0,\pm 1,\dots} a_s(\tau, h) u_{i+s}^k \quad (6)$$

на регулярных сетках с шагами τ и h по времени и пространству соответственно. Во-первых, сильное условие монотонности требовало неотрицательность коэффициентов $a_s(\tau, h)$. Во-вторых, С. К. Годунов показал, что такие схемы могут иметь только первый порядок точности. В дальнейшем это ограничение проявилось для большого круга линейных и квазилинейных задач, в том числе многомерных.

Это ограничение существенно сужает аппроксимационные возможности таких схем. Поэтому искались пути ослабления такого сильного условия монотонности. Одним из них стало условие контроля полной вариации

$$\text{Var}(u^k) = \sum_{j=0, \dots, M-1} |u_{j+1}^k - u_j^k|.$$

В соответствии с ним были построены разностные схемы с запретом роста полной вариации (Total Variation Diminishing), когда на каждом шаге по времени выполнялось условие

$$\text{Var}(u^k) \leq \text{Var}(u^{k-1}).$$

В литературе эти схемы получили название TVD-схем или схем А. Хартена [4]. Это более слабое условие открыло возможность построения разностных схем второго и большего порядка аппроксимации, обеспечивая некоторое условие устойчивости разностной схемы. Здесь прослеживается дискретная аналогия использования пространства функций ограниченной вариации как сопряженного пространства к классу непрерывных функций с нормой

$$\|u\|_{\infty} = \max_{[0,1]} |u|.$$

На примере уравнения (5) другим довольно конструктивным приемом оказалось (локальное) ослабление условия монотонности [5-7], вытекающее из характеристических свойств точного решения:

$$\begin{aligned} \min\{u_i^k, u_{i+1}^k\} \leq u_i^{k+1} \leq \max\{u_i^k, u_{i+1}^k\} \text{ при } \sigma > 0, \\ \min\{u_i^k, u_{i-1}^k\} \leq u_i^{k+1} \leq \max\{u_i^k, u_{i-1}^k\} \text{ при } \sigma < 0. \end{aligned}$$

Это более слабое условие открыло обширное направление сеточно-характеристических методов второго и большего порядка аппроксимации.

Вторым в работе рассматривается параболическое уравнение конвекции-диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} - \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t, x), \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1] \quad (7)$$

с коэффициентом $a(t, x)$, представляющим скорость конвекции, и константой $\sigma > 0$, характеризующей диффузию.

В 1982 г. в работах [8, 9] был предложен новый эффективный подход к аппроксимации задач конвекции-диффузии. В качестве материальной производной по направлению «потока» принят оператор переноса, для аппроксимации которого использован метод характеристик. Для эллиптической части реализованы методы конечных разностей или конечных элементов. На сегодняшний день в многочисленных работах демонстрируются преимущества такого подхода, называемого полулагранжевым или эйлерово-лагранжевым. С физической точки зрения аппроксимация оператора конвективного переноса вдоль траекторий частиц позволяет лучше передать такие количественные показатели как масса, температура, содержание загрязнений и др. В настоящее время реализации обоих

подходов (эйлерово-лагранжева и лагранжево-эйлерова) для уравнений параболического типа обладают такими полезными свойствами как симметричность матриц, обращаемых на каждом временном слое, а также обход ограничения на шаг по времени путем сдвига разностного шаблона на нижнем слое по времени.

В данной работе для каждого из представленных уравнений будут построены двухслойные разностные схемы, которые удовлетворяют строгому критерию монотонности и наследуют законы сохранения на дискретном уровне. Для каждого из уравнений будут рассмотрены два полулагранжевых подхода: эйлерово-лагранжев и лагранжево-эйлеров. Первый из них реализуется на фиксированных сетках по пространству и времени, не зависящих от коэффициентов уравнения. А второй, лагранжево-эйлеров подход, реализуется на неравномерной пространственной разностной сетке, получаемой пересечением характеристических кривых, выпущенных из равномерно расположенных узлов в начальный момент времени, со слоями равномерной сетки по времени. Кроме того, помимо одномерных задач, будут также рассмотрены оба подхода для решения численного решения двумерных уравнений переноса и конвекции-диффузии.

1 Полулагранжевы методы решения одномерного уравнения переноса субстанции

Рассмотрим гиперболическое уравнение первого порядка с оператором в недивергентной форме – уравнение переноса

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x) \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1]. \quad (1.1)$$

Для упрощения выкладок положим

$$a(t, x) = 0 \quad \text{при } x = 0 \text{ и } x = 1 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.2)$$

Одновременно потребуем ограниченности производных

$$|\partial a / \partial x| \leq L, \quad |\partial a / \partial t| \leq L \quad \text{на } [0, T] \times [0, 1]. \quad (1.3)$$

Условие (1.3) для коэффициента $a(t, x)$ может быть заменено условием непрерывности по Липшицу

$$|a(t, x_1) - a(t, x_2)| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in [0, 1]$$

с константой L равномерно по $t \in [0, T]$. Оно вытекает из (1.3), поскольку по теореме Лагранжа о приращениях

$$|a(t, x_1) - a(t, x_2)| = |\partial a / \partial x(t, \xi)| |x_1 - x_2| \leq L|x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in [0, 1]$$

с некоторой точкой ξ из отрезка с концами x_1, x_2 .

При этих свойствах коэффициента для однозначной разрешимости задачи достаточно определить начальное условие [10]

$$u(t, x) = u_0(x) \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (1.4)$$

Для описания характеристик оператора этой задачи рассмотрим семейство обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\bar{x}'(t; s) = a(t, \bar{x}) \quad \forall t \in (0, T) \quad (1.5)$$

с начальным условием

$$\bar{x}(0; s) = s \quad \forall s \in [0, 1]. \quad (1.6)$$

Величина s играет роль не аргумента, а параметра семейства характеристик, исходящих из множества $[0, 1]$ на слое $t = 0$. При фиксированном s мы будем называть характеристикой график $G_s[0, T] = \{(t, \bar{x}(t; s)) : t \in [0, T]\}$ функции $\bar{x}(t; s)$, параметризованный по t .

Само решение с ненулевой правой частью $f(t, x)$ определяется с помощью семейства обыкновенных дифференциальных уравнений (вдоль характеристик) [10, 11]

$$\frac{dv(t; s)}{dt} = f(t, \bar{x}(t; s)) \quad \forall t \in [0, T] \quad (1.7)$$

с начальными условиями

$$v(0; s) = u_0(s) \quad \forall s \in [0, 1]. \quad (1.8)$$

Здесь $v(t; s) = u(t, \bar{x}(t; s))$. Непосредственно из (1.7) и (1.8) следует, что

$$u(t, \bar{x}(t; s)) = v(t; s) = u_0(s) + \int_0^t f(r, \bar{x}(r; s)) dr \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.9)$$

1.1 Эйлерово-лагранжева аппроксимация

Для аппроксимации задачи (1.1), (1.2), (1.4) сначала рассмотрим эйлерово-лагранжеву аппроксимацию. Она основана на фиксированной пространственно-временной сетке с привлечением участков характеристик между временными слоями.

Приближенное решение задачи на каждом временном слое t_k будем искать в виде кусочно-постоянной функции $u^h(t_k, x)$, постоянной на каждом отрезке $w_0 = [0, x_{1/2})$, $w_i = [x_{i-1/2}, x_{i+1/2}) \quad \forall i = 1, \dots, N-1$, $w_N = [x_{N-1/2}, 1]$. Таким образом, на каждом временном шаге функция $u^h(t_k, x)$ полностью определяется своими дискретными значениями $u_{k,i}^h \equiv u^h(t_k, x_i)$, $i = 0, \dots, N$.

В целях упрощения рассуждений используем ограничение

$$\tau \max_{[0, T] \times [0, 1]} |a| < h. \quad (1.10)$$

Предположим, что приближенное решение $u^h(t, x)$ уравнения (1.1) уже вычислено на слое $t = t_{k-1}$ в узлах $\bar{\omega}_x$. Из точки (t_k, x_i) проведем характеристику $(t, \bar{x}_{k,i}(t))$ с начальным условием $\bar{x}_{k,i}(t_k) = x_i$ до пересечения с линией $t = t_{k-1}$ в некоторой точке (t_{k-1}, x_i^*) , как изображено на Рисунке 1.

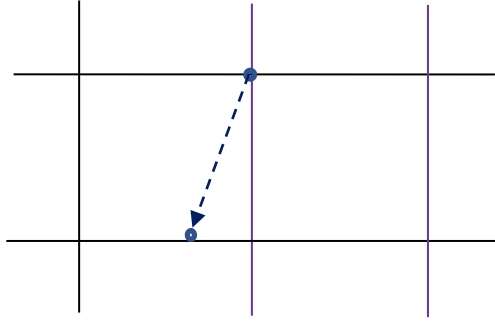


Рисунок 1 – Равномерная сетка с участком характеристики (при положительной $a(t_{k-1}, x_i)$).

По аналогии с формулой (1.9) следовало бы положить

$$u^h(t_k, x_i) = u^h(t_{k-1}, x_i^*) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(r, \bar{x}_{k,i}(r)) dr. \quad (1.11)$$

Для упрощения вычислений, во-первых, заменим интеграл квадратурной формулой:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(r, \bar{x}_{k,i}(r)) dr \approx \tau f_{k,i}.$$

Во-вторых, теоретически точка x_i^* находится из точного решения уравнения (1.5). С алгоритмической точки зрения, как мы докажем позднее, достаточно взять ее приближенное значение в виде результата одного шага явного метода Эйлера обратно по времени:

$$x_i^* = x_i - \tau a(t_k, x_i). \quad (1.12)$$

В-третьих, приближенное решение на слое $t = t_{k-1}$ не определено в промежуточных узлах. Поэтому вместо значения в промежуточной точке возьмем линейную комбинацию значений в соседних узлах:

$$u^h(t_{k-1}, x_i^*) = \alpha_{k-1,i} u^h(t_{k-1}, x_{i-1}) + \beta_{k-1,i} u^h(t_{k-1}, x_i), \quad (1.13)$$

коэффициенты которых при выполнении (1.10) удовлетворяют условиям

$$\alpha_{k-1,i} = (x_i - x_i^*)/h = \tau a_{k,i}/h \geq 0, \quad \beta_{k-1,i} = 1 - \alpha_{k-1,i} \geq 0. \quad (1.14)$$

Аналогичные выкладки справедливы для отрицательного значения $a(t_k, x_i)$. В итоге объединения двух вариантов получаем сеточное уравнение

$$u_{k,i}^h = \alpha_{k-1,i} u_{k-1,i-1}^h + \beta_{k-1,i} u_{k-1,i}^h + \gamma_{k-1,i} u_{k-1,i+1}^h + \tau f_{k,i} \quad (1.15)$$

с коэффициентами

$$\alpha_{k-1,i} = \max\{0, \tau a_{k,i}/h\} \geq 0, \quad \gamma_{k-1,i} = \max\{0, -\tau a_{k,i}/h\} \geq 0, \quad (1.16)$$

$$\beta_{k-1,i} = 1 - \alpha_{k-1,i} - \gamma_{k-1,i} \geq 0, \quad i = 0, \dots, N \text{ и } k = 1, \dots, M. \quad (1.17)$$

Возьмем эти сеточные уравнения совместно с начальным условием

$$u_{0,i}^h = u_0(x_i) \quad \forall i = 0, \dots, N. \quad (1.18)$$

Для точек на краю отрезка $[0,1]$ сеточные уравнения упрощаются ввиду свойства (1.2) функции $a(t, x)$, поскольку обращаются в нуль коэффициенты $\alpha_{k-1,i}$ и $\gamma_{k-1,i}$, относящиеся к значениям сеточной функции $u_{k,i}^h$ за пределами области определения

$$u_{k,i}^h = u_{k-1,i-1}^h + \tau f_{k,i} \quad \text{для } i = 0 \text{ и } i = N \quad \forall k = 1, \dots, M.$$

Таким образом, мы будем использовать единую форму записи сеточных уравнений (1.15)-(1.18) для всех значений $i = 0, \dots, N$. В итоге мы получаем явную разностную схему (1.15)-(1.18) для последовательного определения сеточной функции $u^h(t, x)$ на $\omega_t \times \bar{\omega}_x$.

Уравнения (1.15) и (1.18) можно записать в эквивалентном виде как разностную аппроксимацию уравнения (1.1):

$$\frac{1}{\tau} \left(u_{k,i}^h - \alpha_{k-1,i} u_{k-1,i-1}^h - \beta_{k-1,i} u_{k-1,i}^h - \gamma_{k-1,i} u_{k-1,i+1}^h \right) = f_{k,i} \quad (1.19)$$

$$\forall k = 1, \dots, M, \quad \forall i = 0, \dots, N.$$

Свойства коэффициентов (1.16) обеспечивают «сильную монотонность»: неотрицательность приближенного решения $u^h(t_k, x_i)$ на сетке $\omega_t \times \bar{\omega}_x$ при неотрицательном начальном условии $u_{0,i}^h$ и неотрицательной правой части $f_{k,i} \geq 0$. Эти же свойства обеспечивают пошаговую устойчивость в норме

$$\|v^h\|_{\infty, \bar{\omega}_x} = \max_{0 \leq i \leq N} |v_i^h|, \quad (1.20)$$

определяемой для сеточной функции $v^h(x)$ на сетке $\bar{\omega}_x$.

Докажем эти утверждения.

Лемма 1.1. При выполнении (1.10), а также условий

$$u_{0,i}^h \geq 0 \quad \forall i = 0, \dots, N \quad \text{и} \quad f_{k,i} \geq 0 \quad \forall k = 1, \dots, M, \quad \forall i = 0, \dots, N \quad (1.21)$$

решение явной разностной схемы (1.18), (1.19) является неотрицательным:

$$u_{k,i}^h \geq 0 \quad \forall k = 1, \dots, M, \quad \forall i = 0, \dots, N. \quad (1.22)$$

Доказательство. Учитывая неотрицательность $u_{0,i}^h \geq 0$ на начальном слое, применим метод математической индукции для $k = 1, \dots, M$. Для этого

предположим выполнение (1.22) на слое $k - 1$. Тогда неотрицательность $u_{k,i}^h$ следует из (1.15) и (1.18) с учетом неотрицательных значений $\alpha_{k-1,i}, \beta_{k-1,i}, \gamma_{k-1,i}, f_{k,i}$. \square

Лемма 1.2. Для решения явной разностной схемы (1.18), (1.19), при выполнении условия (1.10) справедлива оценка устойчивости

$$\|u^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x} \leq \|u^h(t_{k-1}, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x} + \tau \|f(t_k, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x} \quad \forall k = 1, \dots, M. \quad (1.23)$$

Доказательство. Пусть максимальное значение модуля на слое $k \geq 1$ достигается на компоненте $u_{k,i}^h$ с некоторым $1 \leq j \leq N - 1$, т.е.

$$|u_{k,j}^h| = \|u^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x}.$$

Возьмем модуль от обеих частей (1.15) и применим неравенство треугольника:

$$\begin{aligned} |u_{k,j}^h| &\leq \alpha_{k-1,j} |u_{k-1,j-1}^h| + \beta_{k-1,j} |u_{k-1,j}^h| + \gamma_{k-1,j} |u_{k-1,j+1}^h| + \tau |f_{k,j}| \leq \\ &\leq (\alpha_{k-1,j} + \beta_{k-1,j} + \gamma_{k-1,j}) \|u^h(t_{k-1}, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x} + \tau \|f(t_k, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание предшествующее равенство, а также свойство (1.17), получаем (1.23). \square

Для доказательства сходимости привлечем запись разностной схемы в виде (1.19). Подставляя точное решение $u_{k,i}$ в разностную схему (1.19), получаем равенства

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} (u_{k,i} - \alpha_{k-1,i} u_{k-1,i-1} - \beta_{k-1,i} u_{k-1,i} - \gamma_{k-1,i} u_{k-1,i+1}) &= f_{k,i} + \varepsilon_{k,i}^h \\ \forall i = 0, \dots, N, \quad \forall k = 1, \dots, M \end{aligned} \quad (1.24)$$

с погрешностью аппроксимации $\varepsilon_{k,i}^h$. Путем разложения по формуле Тейлора в точке (t_{k-1}, x_i) можно убедиться, что

$$|\varepsilon_{k,i}^h| \leq (\tilde{c}_1 \tau + \tilde{c}_2 h) \quad (1.25)$$

с некоторыми константами (здесь и далее независимыми от τ и h равномерно на применяемой разностной сетке) при достаточной гладкости данных задачи (1.1), (1.2), (1.4). С учетом этой оценки погрешности аппроксимации мы получаем сходимость того же порядка.

Теорема 1.1. При выполнении условия (1.10) для достаточно гладких данных задачи (1.1), (1.2), (1.4) имеет место следующая оценка сходимости разностной схемы (1.18), (1.19):

$$\|u(t_k, \cdot) - u^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x} \leq k\tau(\tilde{c}_1 \tau + \tilde{c}_2 h) \quad \forall k = 1, \dots, M, \quad (1.26)$$

откуда

$$\max_{1 \leq k \leq M} \|u(t_k, \cdot) - u^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x} \leq T(\tilde{c}_1 \tau + \tilde{c}_2 h). \quad (1.27)$$

Доказательство. Для доказательства (1.26) воспользуемся принципом математической индукции. На начальном слое ввиду условия (1.18) оценка (1.26) выполняется с нулевой правой частью. Пусть теперь (1.26) выполнена для некоторого $k - 1$. Докажем ее для $k \geq 1$. Из уравнений (1.24) вычтем уравнения (1.19). Тогда для функции $u(t_k, \cdot) - u^h(t_k, \cdot)$ на основании Леммы 1.2 имеем оценку

$$\|u(t_k, \cdot) - u^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x} \leq \|u(t_{k-1}, \cdot) - u^h(t_{k-1}, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x} + \tau \|\mathcal{E}(t_k, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x} \quad \forall k = 1, \dots, M.$$

Используя предположение (1.26) для $k - 1$ и оценку (1.25), получаем (1.26) для k . А беря максимум от обеих частей (1.26) по всем $k = 1, \dots, M$, получаем (1.27). \square

Замечание 1.1. Отметим, что ограничение (1.10) не является принципиальным для этой и других полулагранжевых разностных схем в этом разделе. Его нарушение компенсируется коррекцией шаблона. Например, на Рисунке 2 ввиду выхода точки x_i^* за пределы отрезка $[x_{i-1}, x_i]$ вместо (1.13) взята линейная комбинация

$$u^h(t_{k-1}, x_i^*) = \alpha_{k-1,i} u^h(t_{k-1}, x_{i-2}) + \beta_{k-1,i} u^h(t_{k-1}, x_{i-1}) \quad (1.28)$$

с теми же свойствами коэффициентов

$$\alpha_{k-1,i} = (x_{i-1} - x_i^*)/h \geq 0, \quad \beta_{k-1,i} = 1 - \alpha_{k-1,i}. \quad (1.29)$$

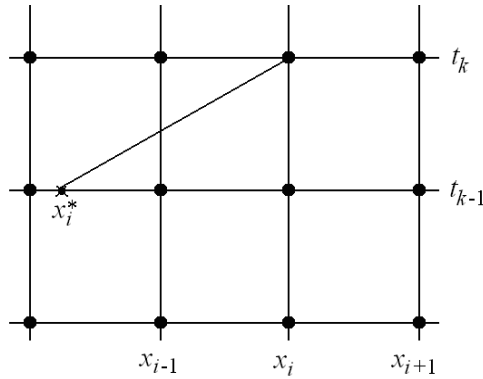


Рисунок 2 – Изменение сеточного шаблона при нарушении условия (1.10).

При значительном увеличении длины участков траекторий между временными слоями вместо использования одного шага метода Эйлера (1.12) следует применять более точные алгоритмы для определения координаты x_i^* , например, один-два шага стандартного метода Рунге-Кутты [12].

1.2 Свойства лагранжевых сеток

Описание лагранжево-эйлеровой аппроксимации начнем с построения лагранжевых сеток. Из каждой точки $(0, x_i)$, $x_i \in \bar{\omega}_x$ на нижнем слое $t = 0$ замкнутой области $\bar{\Omega} = [0, T] \times [0, 1]$ построим характеристическую кривую $(t, \bar{x}_i(t))$ с начальным условием $\bar{x}_i(0) = x_i$. Обозначим через $\bar{x}_{k,i} = \bar{x}_i(t_k)$ координату x пересечения этой кривой с линией $t = t_k$. Кроме того, из каждой точки $(0, x_{i+1/2})$, $x_{i+1/2} \in \hat{\omega}_x$ на слое $t = 0$ замкнутой области $\bar{\Omega}$ построим характеристическую кривую $(t, \bar{x}_{i+1/2}(t))$. Обозначим через $\bar{x}_{k,i+1/2} = \bar{x}_{i+1/2}(t_k)$ координату x пересечения этой кривой с линией $t = t_k$. В результате на каждом уровне по времени $t = t_k, 0 \leq k \leq M$, построены две неравномерные сетки по пространству: $\bar{\omega}_x^k = \{\bar{x}_{k,i}, i = 0, \dots, N\}$ с шагами $h_{k,i+1/2} = \bar{x}_{k,i+1} - \bar{x}_{k,i}$ и $\hat{\omega}_x^k = \{\bar{x}_{k,i+1/2}, i = 0, \dots, N-1\}$ с шагами $h_{k,i} = \bar{x}_{k,i+1/2} - \bar{x}_{k,i-1/2}$. Для единообразия обозначений положим $h_{k,0} = \bar{x}_{k,1/2}$ и $h_{k,N} = 1 - \bar{x}_{k,N-1/2}$.

Несмотря на систематическое смещение узлов $\bar{x}_{k,i}$ и $\bar{x}_{k,i+1/2}$ с одного слоя на другой, значения шагов $h_{k,i+1/2}$ и $h_{k,i}$ пространственных временных сеток остаются порядка $O_u(h)$. Более того, разность между соседними шагами является величиной $O_u(h^2)$. Здесь и далее мы используем обозначение $O_u(\varepsilon)$ с малыми параметрами ε , близкими к нулю, которое означает выражение со свойством $|O_u(\varepsilon)| \leq c_u \varepsilon$ с некоторой константой c_u , независимой от h равномерно по всей области определения дискретной задачи. Это требует бóльшего внимания по использованию этого обозначения в сравнении с $O(\varepsilon)$, часто означающее аналогичное свойство в некоторой точке области $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ с коэффициентом $c_u(\mathbf{x})$.

Покажем, что разность между соседними шагами является величиной $O_u(h^2)$. Для этого привлечем лемму о дифференциальном неравенстве из [11], которую запишем в наших обозначениях.

Лемма 1.3. Пусть для вектор-функции $z(t) \in \mathbb{R}^n$ имеют место оценки

$$|z'(t)| \leq L|z(t)| + K \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{и} \quad |z(0)| \leq z_0 \quad (1.30)$$

с неотрицательными константами L, K, z_0 . Тогда справедливы неравенства

$$|z(t)| \leq z_0 \exp(Lt) + \frac{K}{L} (\exp(Lt) - 1) \quad \forall t \in [0, T] \quad \text{при} \quad L > 0, \quad (1.31)$$

$$|z(t)| \leq z_0 + Kt \quad \text{при} \quad L = 0. \quad (1.32)$$

Лемма 1.4. При выполнении условия (1.3) для шагов разностных сеток $\bar{\omega}_x^k$ и $\hat{\omega}_x^k$ справедливы оценки

$$c_1 h \leq h_{k,i+1/2} \leq c_2 h \quad \text{и} \quad c_1 h \leq h_{k,i} \leq c_2 h, \quad k=0, \dots, M. \quad (1.33)$$

Более того, если для производной $\partial a / \partial x$ выполняется условие Липшица

$$\left| \frac{\partial a}{\partial x}(t, x_1) - \frac{\partial a}{\partial x}(t, x_2) \right| \leq L_1 |x_1 - x_2| \quad \forall x_1, x_2 \in [0, 1],$$

то справедливы оценки

$$\left| h_{k,i+1/2} - h_{k,i-1/2} \right| \leq c_3 h^2 \quad \text{и} \quad \left| h_{k,i+1} - h_{k,i} \right| \leq c_3 h^2. \quad (1.34)$$

Доказательство. Рассмотрим две задачи

$$y_1' = a(t, y_1) \quad \forall t \in (0, T), \quad y_1(0) = y_0, \quad (1.35)$$

$$y_2' = a(t, y_2) \quad \forall t \in (0, T), \quad y_2(0) = y_0 + h. \quad (1.36)$$

Вычитая одни равенства из других, получаем задачу для разности $w(t) = y_2(t) - y_1(t)$

$$w' = g \quad \forall t \in [0, T], \quad w(0) = h. \quad (1.37)$$

Ее правая часть g ограничена ввиду условия (1.3):

$$g(t) \leq L |w(t)| \quad \forall t \in (0, T). \quad (1.38)$$

Применяя Лемму 1.3 с константами $K = 0$ и $z_0 = h$, получаем неравенство

$$|w(t)| \leq h \exp(Lt) \quad \forall t \in (t_{k-1}, t_k). \quad (1.39)$$

Отсюда получаем неравенства

$$c_1 h \leq w(t) \leq c_2 h \quad (1.40)$$

с константами $c_1 = \exp(-Lt)$ и $c_2 = \exp(Lt)$. Из (1.40) и вытекают оценки (1.33).

Для обоснования (1.34) к задачам (1.35), (1.36) добавим еще одну:

$$y_3' = a(t, y_3) \quad \forall t \in (0, T), \quad y_3(0) = y_0 + 2h. \quad (1.41)$$

Введем функцию $z(t) = 2y_2(t) - y_1(t) - y_3(t)$. Уравнение из (1.36) умножим на 2 и вычтем из него уравнения из (1.35) и (1.41). А правые части разложим по второму аргументу относительно $y_2(t)$:

$$z'(t) = (y_2 - y_1) \frac{\partial a}{\partial x}(t, \eta_1(t)) + (y_2 - y_3) \frac{\partial a}{\partial x}(t, \eta_3(t)),$$

где $\eta_i(t)$ лежит на отрезке с концами $y_i(t)$ и $y_2(t)$. С учетом липшиц-непрерывности производной $\partial a/\partial x$ и оценок (1.40) применительно к $y_3 - y_2$ и $y_2 - y_1$ получаем

$$z'(t) = z(t) \frac{\partial a}{\partial x}(t, v_2(t)) + (y_1 - y_2)^2 \zeta_1(t) + (y_3 - y_2)^2 \zeta_3(t) \quad \forall t \in [0, T],$$

$$z(0) = 0,$$

где $|\zeta_i(t)| \leq c_2 L_1$. Применяя Лемму 1.3, получаем

$$|z(t)| \leq h^2 \frac{c_2^3 L_1}{L} (\exp(Lt) - 1),$$

откуда следуют оценки (1.34) с константой $c_3 = c_2^3 L_1 (\exp(LT) - 1)/L$. \square

По аналогии с формулой (1.9) имеем точное равенство

$$u(t_k, \bar{x}_{k,i}) = u(t_{k-1}, \bar{x}_{k-1,i}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(r, \bar{x}(r; x_i)) dr. \quad (1.42)$$

Для его упрощения, во-первых, заменим интеграл квадратурной формулой:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(r, \bar{x}(r, s)) dr \approx \tau f(t_k, \bar{x}_{k,i}).$$

Во-вторых, точки $\bar{x}_{k,i}$ должны определяться из точного решения уравнения (1.5).

Но как мы докажем позднее, без потери первого порядка точности достаточно взять приближенные значения в виде решений явной схемы Эйлера:

$$\bar{x}_{k,i}^\tau = \bar{x}_{k-1,i}^\tau + \tau a(t_{k-1}, \bar{x}_{k-1,i}^\tau), \quad k = 1, \dots, M; \quad \bar{x}_{0,i}^\tau = x_i; \quad (1.43)$$

$$\bar{x}_{k,i+1/2}^\tau = \bar{x}_{k-1,i+1/2}^\tau + \tau a(t_{k-1}, \bar{x}_{k-1,i+1/2}^\tau), \quad k = 1, \dots, M; \quad \bar{x}_{0,i+1/2}^\tau = x_{i+1/2}. \quad (1.44)$$

Соответственно обозначим шаги сеток $\bar{\omega}_x^{\tau,k} = \{\bar{x}_{k,i}^\tau, i = 0, \dots, N\}$ и

$\hat{\omega}_x^{\tau,k} = \{\bar{x}_{k,i+1/2}^\tau, i = 0, \dots, N-1\}$ следующим образом:

$$h_{k,i+1/2}^\tau = \bar{x}_{k,i+1}^\tau - \bar{x}_{k,i}^\tau \quad \text{и} \quad h_{k,i}^\tau = \bar{x}_{k,i+1/2}^\tau - \bar{x}_{k,i-1/2}^\tau.$$

Для них справедливы оценки, аналогичные результатам Леммы 1.4.

Лемма 1.5. Пусть для сеточной функции $z_k^h(t) \in \mathbb{R}^n$, $k = 0, \dots, M$, имеют место оценки

$$\left| (z_k^h - z_{k-1}^h) / \tau \right| \leq L |z_{k-1}^h| + K \quad \forall k = 1, \dots, M \text{ и } |z_0^h| \leq z_0 \quad (1.45)$$

с неотрицательными константами L, K, z_0 . Тогда справедливы неравенства

$$|z_k^h| \leq z_0 \exp(Lk\tau) + \frac{K}{L} (\exp(Lk\tau) - 1) \quad \text{при } L > 0, \quad (1.46)$$

$$|z_k^h| \leq z_0 + K\tau k \quad \text{при } L = 0 \quad \forall k = 0, \dots, M. \quad (1.47)$$

Доказательство. Для $k = 0$ неравенства леммы очевидны. Из (1.45) для $L > 0$ следует, что

$$|z_k^h| \leq (1 + L\tau) |z_{k-1}^h| + K\tau. \quad (1.48)$$

Предположим, что для некоторого $k - 1$ верно неравенство

$$|z_{k-1}^h| \leq (1 + L\tau)^{k-1} z_0^h + \frac{K}{L} ((1 + L\tau)^{k-1} - 1).$$

Используя его в (1.48), немедленно получаем обоснование для k :

$$|z_k^h| \leq (1 + L\tau)^k z_0 + \frac{K}{L} ((1 + L\tau)^k - 1).$$

Дважды используя простое неравенство $1 + x \leq \exp(x)$ для $x \geq 0$, мы получаем оценку (1.46).

При $L = 0$ из (1.45) следует, что $|z_k^h| \leq |z_{k-1}^h| + K\tau$. Предположим, что для некоторого $k - 1$ справедливо неравенство $|z_{k-1}^h| \leq z_0 + (k - 1)K\tau$. Используя его в предыдущей оценке, мы получаем (1.47). \square

Лемма 1.6. При выполнении условий Леммы 1.4 и неравенства

$$\tau L \leq 1/2 \quad (1.49)$$

для шагов разностных сеток $\bar{\omega}_x^{\tau, k}$ и $\hat{\omega}_x^{\tau, k}$ справедливы оценки

$$\bar{c}_1 h \leq h_{k, i+1/2}^\tau \leq \bar{c}_2 h \quad \text{и} \quad \bar{c}_3 h \leq h_{k, i}^\tau \leq \bar{c}_4 h \quad \forall k = 0, \dots, M, \quad (1.50)$$

$$|h_{k, i+1/2}^\tau - h_{k, i-1/2}^\tau| \leq \bar{c}_5 h^2 \quad \text{и} \quad |h_{k, i+1} - h_{k, i}| \leq \bar{c}_5 h^2. \quad (1.51)$$

Доказательство. Рассмотрим две задачи

$$y_1(t_k) = y_1(t_{k-1}) + \tau a(t_{k-1}, y_1(t_{k-1})), \quad k = 1, \dots, M, \quad y_1(t_0) = y_0, \quad (1.52)$$

$$y_2(t_k) = y_2(t_{k-1}) + \tau a(t_{k-1}, y_2(t_{k-1})), \quad k = 1, \dots, M, \quad y_2(t_0) = y_0 + h. \quad (1.53)$$

Вычитая одни равенства из других, получаем задачу для разности $w(t_k) = y_2(t_k) - y_1(t_k)$

$$w(t_k) = (1 + \tau \xi(t_{k-1}))w(t_{k-1}), k = 1, \dots, M, w(t_0) = h \quad (1.54)$$

с функцией $\xi(t_{k-1}) = \partial a / \partial x(t_{k-1}, \eta_{k-1})$, у которой аргумент η_{k-1} лежит на отрезке с концами $y_1(t_k)$ и $y_2(t_k)$. Она ограничена ввиду условия (1.3):

$$|\xi(t_k)| \leq L. \quad (1.55)$$

Отсюда на основании Леммы 1.5 следует, что

$$w(t_k) > 0 \text{ и } (1 - \tau L)w(t_{k-1}) \leq w(t_k) \leq (1 + \tau L)w(t_{k-1}), k = 0, \dots, M.$$

Методом математической индукции получаем оценки

$$(1 - \tau L)^k h \leq w(t_k) \leq (1 + \tau L)^k h, k = 0, \dots, M.$$

Здесь и далее мы будем использовать простые неравенства

$$1 + x \leq \exp(x) \text{ для } x \geq 0 \text{ и } 1 - x \geq \exp(-2x) \text{ для } x \in [0, 1/2], \quad (1.56)$$

проверяемые тривиальными выкладками. Их степенное применение приводит к неравенствам

$$\exp(-2\tau k L)h \leq w(t_k) \leq \exp(\tau k L)h, k = 0, \dots, M,$$

из которых следует (1.50) с константами $\bar{c}_1 = \exp(-2TL)$ и $\bar{c}_2 = \exp(TL)$.

Для обоснования (1.51) к задачам (1.52), (1.53) добавим еще одну:

$$y_3(t_k) = y_3(t_{k-1}) + \tau a(t_{k-1}, y_3(t_{k-1})), k = 0, 1, \dots, M, y_3(t_0) = y_0 + 2h. \quad (1.57)$$

Введем функцию $z(t_k) = 2y_2(t_k) - y_1(t_{k-1}) - y_3(t_{k-1})$. Уравнение из (1.53) умножим на 2 и вычтем из него уравнения из (1.52) и (1.53):

$$z(t_k) - z(t_{k-1}) = \tau (2a(t_{k-1}, y_2(t_{k-1})) - a(t_{k-1}, y_3(t_{k-1})) - a(t_{k-1}, y_1(t_{k-1}))).$$

Разложим правую часть по второму аргументу относительно $y_2(t_{k-1})$:

$$\begin{aligned} z(t_k) - z(t_{k-1}) = \tau \left(z(t_{k-1}) \frac{\partial a}{\partial x}(t_{k-1}, y_2(t_{k-1})) + \right. \\ \left. + (y_2(t_{k-1}) - y_1(t_{k-1}))^2 \bar{\eta}_1(t_{k-1}) + (y_2(t_{k-1}) - y_3(t_{k-1}))^2 \bar{\eta}_3(t_{k-1}) \right), \end{aligned} \quad (1.58)$$

где $\bar{\eta}_i(t_{k-1})$ с учетом липшиц-непрерывности производной $\partial a / \partial x$ ограничены следующим образом:

$$|\bar{\eta}_i(t_{k-1})| \leq \bar{c}_2 L_1.$$

В итоге из (1.58) получается неравенство

$$|(z(t_k) - z(t_{k-1}))/\tau| \leq L|z(t_{k-1})| + \bar{c}_2^3 L_1 h^2.$$

Применяя Лемму 2.5, получаем

$$|z(t_k)| \leq \frac{\bar{c}_2^3 L_1 h^2}{c_5} (\exp(c_5 T) - 1), \quad k = 0, \dots, M$$

с константой $\bar{c}_5 = \bar{c}_2^3 L_1 (\exp(c_5 T) - 1) / c_5$. □

1.3 Лагранжево-эйлерова аппроксимация

Теперь рассмотрим лагранжево-эйлерову аппроксимацию. Как уже отмечено в разделе 1.2, из каждой точки $(0, x_i)$, $x_i \in \bar{\omega}_x$ на нижнем слое $t = 0$ выпустили характеристические кривые $(t, \bar{x}_i(t))$ с начальными условиями $\bar{x}_i(0) = x_i$. В результате их пересечения с прямыми $t = t_k$, $0 \leq k \leq M$, получаем неравномерные сетки по пространству $\bar{\omega}_x^k = \{\bar{x}_{k,i}, i = 0, \dots, N\}$.

Поскольку в этом разделе мы будем рассматривать схемы второго порядка сходимости, то приближенное построение узлов этих неравномерных сеток будем производить тоже со вторым порядком точности. Для этого приближенные узлы $\bar{x}_{k,i}^\tau$ будем вычислять с помощью метода Рунге-Кутты второго порядка (часто именуемого как «исправленный метод Эйлера») [12]:

$$\begin{aligned} k_1 &= \tau a(t_{k-1}, \bar{x}_{k-1,i}^\tau), \\ k_2 &= \tau a(t_k, \bar{x}_{k-1,i}^\tau + k_1), \\ \bar{x}_{k,i}^\tau &= \bar{x}_{k-1,i}^\tau + (k_1 + k_2)/2. \end{aligned}$$

Приближенное решение задачи (1.1), (1.4) на каждом временном слое t_k будем искать в узлах полученных сеток $\bar{\omega}_x^{\tau,k} = \{\bar{x}_{k,i}^\tau, i = 0, \dots, N\}$. Таким образом, на шаге t_k сеточная функция u^τ полностью определяется своими дискретными значениями $u_{k,i}^\tau \equiv u^\tau(t_k, \bar{x}_{k,i}^\tau)$, $i = 0, \dots, N$.

Предположим, что приближенное решение u^τ уравнения (1.1) уже вычислено на слое $t = t_{k-1}$ в узлах $\bar{\omega}_x^{\tau,k-1}$. По аналогии с формулой (1.9) имеем точное равенство

$$u(t_k, \bar{x}_{k,i}) = u(t_{k-1}, \bar{x}_{k-1,i}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(r, \bar{x}(r; x_i)) dr. \quad (1.59)$$

Для его упрощения, во-первых, заменим интеграл квадратурной формулой:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(r, \bar{x}(r, s)) dr \approx \tau (f(t_k, \bar{x}_{k,i}) + f(t_{k-1}, \bar{x}_{k-1,i})) / 2. \quad (1.60)$$

Во-вторых, узлы $\bar{x}_{k,i}$ сетки $\bar{\omega}_x^k$ приближенно заменим узлами $\bar{x}_{k,i}^\tau$ сетки $\bar{\omega}_x^{\tau,k}$. В результате получается простое выражение

$$u_{k,i}^\tau = u_{k-1,i}^\tau + \tau (f(t_k, \bar{x}_{k,i}^\tau) + f(t_{k-1}, \bar{x}_{k-1,i}^\tau)) / 2, \quad (1.61)$$

$$i = 0, \dots, N, k = 1, \dots, M.$$

Добавляя начальные условия

$$u_{0,i}^\tau = u_0(x_i) \quad \forall i = 0, \dots, N, \quad (1.62)$$

приходим к явной разностной схеме.

Для этой схемы с понятными упрощениями обосновываются аналоги Лемм 1.1 и 1.2.

Лемма 1.7. При выполнении условий

$$u_{0,i}^\tau \geq 0 \text{ и } f(t_k, \bar{x}_{k,i}^\tau) \geq 0 \quad \forall k = 0, \dots, M, \quad \forall i = 0, \dots, N \quad (1.63)$$

решение явной разностной схемы (1.61), (1.62) является неотрицательным:

$$u_{k,i}^h \geq 0 \quad \forall k = 1, \dots, M, \quad \forall i = 0, \dots, N. \quad (1.64)$$

Лемма 1.8. Для решения явной разностной схемы (1.61), (1.62) справедлива оценка устойчивости

$$\|u^\tau(t_k, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x^{\tau,k}} \leq \|u^\tau(t_{k-1}, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x^{\tau,k-1}} + \frac{\tau}{2} \|f(t_k, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x^{\tau,k}} + \frac{\tau}{2} \|f(t_{k-1}, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x^{\tau,k-1}} \quad (1.65)$$

$$\forall k = 1, \dots, M.$$

Оценки погрешности аппроксимации и сходимости получаются более специфическим путем. Для этого вычтем (1.61) из (1.59):

$$u(t_k, \bar{x}_{k,i}) - u_{k,i}^\tau = u(t_{k-1}, \bar{x}_{k-1,i}) - u_{k-1,i}^\tau + \varepsilon_{k,i}^\tau, \quad i = 0, \dots, N, \quad k = 1, \dots, M, \quad (1.66)$$

получая погрешность аппроксимации

$$\varepsilon_{k,i}^\tau = \tau (f(t_k, \bar{x}_{k,i}^\tau) + f(t_{k-1}, \bar{x}_{k-1,i}^\tau)) / 2 - \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(r, \bar{x}(r; x_i)) dr. \quad (1.67)$$

С учетом погрешности $O_u(\tau^3)$ квадратурной формулы (1.60) и глобальной погрешности $O_u(\tau^2)$ метода Рунге-Кутты для достаточно гладкой функции $f(t, x)$ получаем неравенства

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_{k,i}^\tau| &\leq \frac{\tau}{2} \left| f(t_k, \bar{x}_{k,i}^\tau) - f(t_k, \bar{x}_{k,i}) \right| + \\ &+ \frac{\tau}{2} \left| f(t_{k-1}, \bar{x}_{k-1,i}^\tau) - f(t_{k-1}, \bar{x}_{k-1,i}) \right| + O_u(\tau^3) \leq c_{11} \tau^3. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Теорема 1.2. Для достаточно гладких данных задачи (1.1), (1.2). (1.4) имеет место следующая оценка сходимости разностной схемы (1.61), (1.62):

$$\max_{0 \leq i \leq N} |u(t_k, \bar{x}_{k,i}) - u_{k,i}^\tau| \leq k c_{11} \tau^3 \quad \forall k = 1, \dots, M, \quad (1.69)$$

откуда

$$\max_{1 \leq k \leq M} \max_{0 \leq i \leq N} |u(t_k, \bar{x}_{k,i}) - u_{k,i}^\tau| \leq T c_{11} \tau^2. \quad (1.70)$$

Доказательство. Для доказательства (1.69) воспользуемся принципом математической индукции. На начальном слое ввиду условия (1.62) оценка (1.69) выполняется с нулевой правой частью. Пусть теперь (1.69) выполнена для некоторого $k - 1$. Докажем ее для $k \geq 1$. В равенстве (1.66) возьмем максимальную по модулю компоненту в правой части. Тогда с учетом (1.68)

$$\begin{aligned} \max_{0 \leq i \leq N} |u(t_k, \bar{x}_{k,i}) - u_{k,i}^\tau| &\leq \max_{0 \leq i \leq N} |u(t_{k-1}, \bar{x}_{k-1,i}) - u_{k-1,i}^\tau| + \max_{0 \leq i \leq N} |\mathcal{E}_{k,i}^\tau| \leq \\ &\leq (k-1) c_{11} \tau^3 + c_{11} \tau^3 = k c_{11} \tau^3. \end{aligned}$$

А беря максимум от обеих частей (1.69) по всем $k = 1, \dots, M$, получаем (1.70). \square

Отметим, что в представленной теореме сравнение точного и приближенного решений проводится в разных узлах. Первое берется в узлах точных, но неизвестных нам лагранжевых сетках $\bar{\omega}_x^k$, а второе – в узлах известных приближенных сетках $\bar{\omega}_x^{\tau,k}$. Для того, чтобы свести их на одну, известную нам сетку $\bar{\omega}_x^{\tau,k}$, напомним, что она построена методом Рунге-Кутты второго порядка. Это значит [12], что

$$|\bar{x}_{k,i} - \bar{x}_{k,i}^\tau| \leq c_{12} \tau^2 \quad \forall i = 0, \dots, N \quad \forall k = 0, \dots, M. \quad (1.71)$$

Поэтому в силу Липшиц-непрерывности решения $u(t, x)$ по второму аргументу

$$\max_{1 \leq k \leq M} \max_{0 \leq i \leq N} |u(t_k, \bar{x}_{k,i}) - u(t_k, \bar{x}_{k,i}^\tau)| \leq T c_{12} \tau^2.$$

В этой связи Теорему 1.2 переформулируем следующим образом.

Теорема 1.3. Для достаточно гладких данных задачи (1.1), (1.2). (1.4) имеет место следующая оценка сходимости разностной схемы (1.61), (1.62):

$$\max_{1 \leq k \leq M} \|u(t_k, \cdot) - u^\tau(t_k, \cdot)\|_{\bar{\omega}_x^{\tau,k}} = \max_{1 \leq k \leq M} \max_{0 \leq i \leq N} |u(t_k, \bar{x}_{k,i}^\tau) - u_{k,i}^\tau| \leq T(c_{11} + c_{12}) \tau^2. \quad (1.72)$$

1.4 Вычислительные эксперименты

Рассмотрим уравнение (1.1) с начальным условием (1.4), где

$$a(t, x) = x(1-x)/(2-t), \quad (1.73)$$

$$u_0(x) = \sin(\pi x^2),$$

$$f(t, x) = 2 \exp(t^2) \left(t \sin(\pi x^2) + \frac{\pi x^2 (1-x)}{2-t} \cos(\pi x^2) \right).$$

Точным решением этой задачи является функция

$$u(t, x) = \exp(t^2) \sin(\pi x^2), \quad (1.74)$$

которая в ходе расчетов будет использоваться для проверки точности.

Для наблюдения за скоростью сходимости используем последовательность сеток со следующими шагами:

$$\tau_n = \tau_0/2^n; \quad h_n = h_0/2^n; \quad \tau_0 = h_0 = 1/8; \quad (1.75)$$

с целыми $M_n = 1/\tau_n, N_n = 1/h_n$.

Сначала протестируем на сходимость эйлерово-лагранжеву разностную схему (1.18), (1.19). Обозначим ее решение с параметрами τ_n и h_n как $u_{k,i}^{h_n}$ и положим

$$\varepsilon_n = \max_{0 \leq k \leq M_n, 0 \leq i \leq N_n} |u_{k,i}^{h_n} - u(t_k, x_i)|.$$

Результаты расчетов приведены в Таблице 1 и действительно демонстрируют первый порядок сходимости.

Таблица 1 – Сходимость разностной схемы (1.18), (1.19).

n	ε_n	$\varepsilon_{n-1}/\varepsilon_n$	$\log_2(\varepsilon_{n-1}/\varepsilon_n)$
0	0.184912		
1	0.091010	2.03	1.02
2	0.045242	2.01	1.01
3	0.022537	2.01	1.01
4	0.011250	2.00	1.00
5	0.005620	2.00	1.00

Аналогичные данные в Таблице 2 для лагранжево-эйлеровой схемы (1.61), (1.62) приведены в норме

$$\bar{\varepsilon}_n = \max_{0 \leq k \leq M_n, 0 \leq i \leq N_n} |u_{k,i}^{h_n} - u(t_k, \bar{x}_{k,i}^\tau)|.$$

Таблица 2 – Сходимость разностной схемы (1.61), (1.62).

n	$\bar{\varepsilon}_n$	$\bar{\varepsilon}_{n-1}/\bar{\varepsilon}_n$	$\log_2(\bar{\varepsilon}_{n-1}/\bar{\varepsilon}_n)$
0	0.022440		
1	0.005627	3.99	2.00
2	0.001409	3.99	2.00
3	0.000353	3.99	2.00
4	0.000088	4.00	2.00
5	0.000022	4.00	2.00

Результаты расчетов действительно демонстрируют второй порядок сходимости.

А теперь проиллюстрируем второе интересное свойство лагранжево-эйлеровой аппроксимации, выражающееся в отсутствии сглаживающего эффекта в отличие от эйлерово-лагранжевой аппроксимации. Для его отчетливой демонстрации рассмотрим предыдущее уравнение с нулевой правой частью

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \text{ на } [0, 1] \times [0, 1]$$

и разрывным начальным условием

$$u_0(x) = \begin{cases} 3 \sin(\pi x^2) & \text{при } x \in [0, 1/3], \\ 1/3 & \text{при } x \in (1/3, 1]. \end{cases} \quad (1.76)$$

Напомним, что это решение остается постоянным вдоль характеристик, изображенных на Рисунке 3. А теперь приведем графики решений разностных схем (1.18), (1.19) и (1.61), (1.62) с шагами $\tau = h = 1/45$ в моменты времени $t = 0, 1/3, 2/3, 1$.

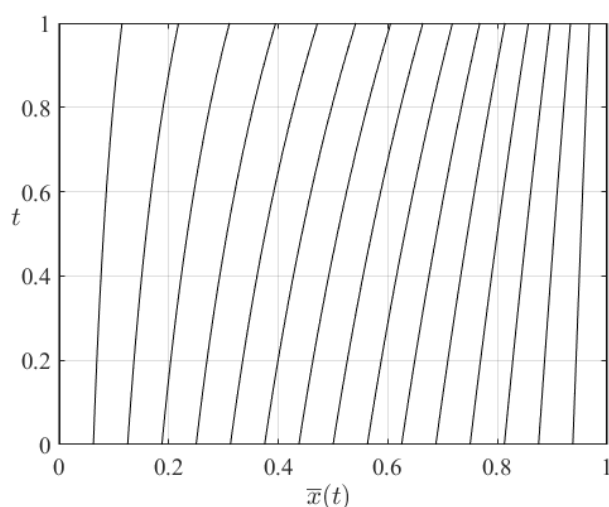


Рисунок 3 – Графики характеристик задачи с коэффициентом (1.73) для $h = 1/16$.

На Рисунке 4 отчетливо видны результаты сглаживания разрыва ввиду линейной интерполяции (1.13).

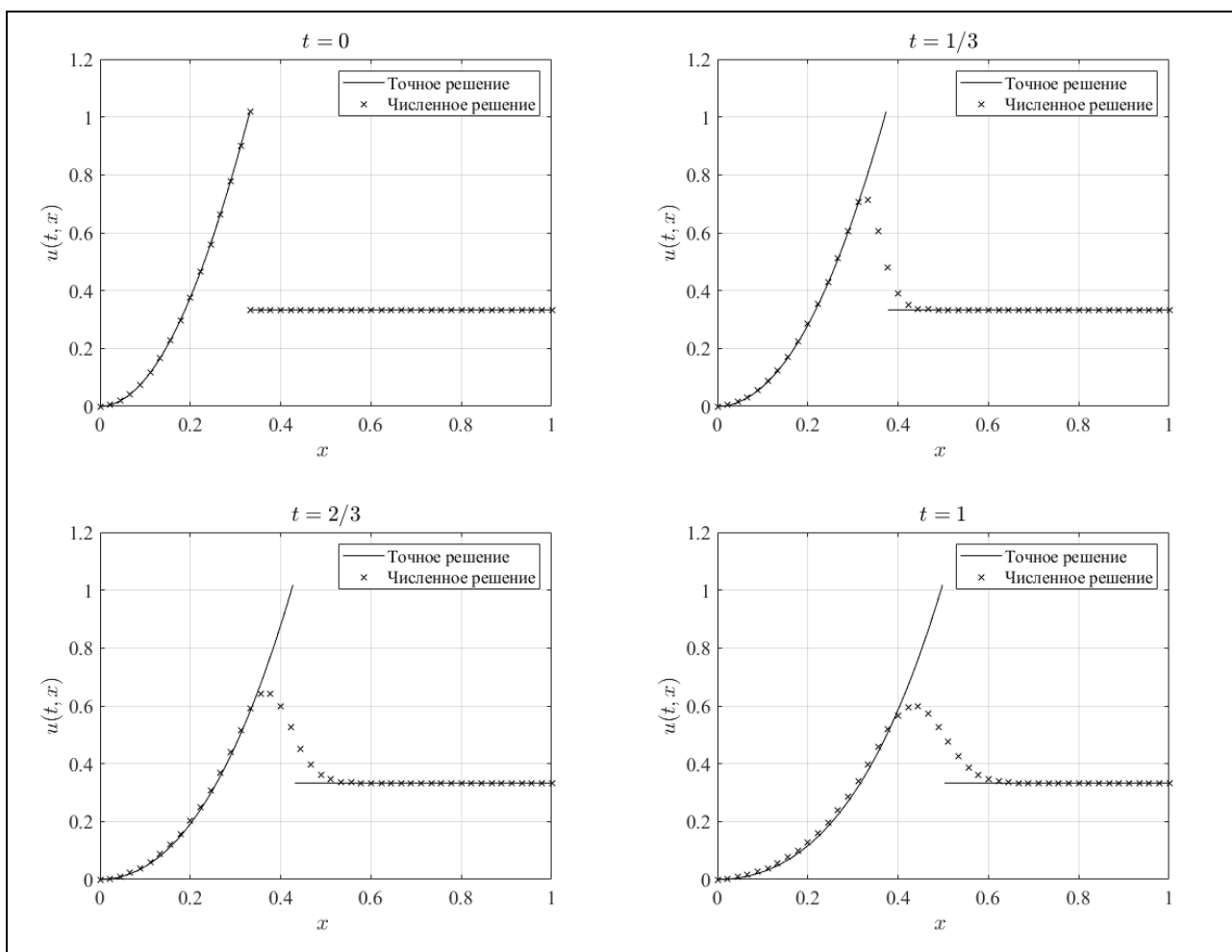


Рисунок 4 – Графики решения эйлераво-лагранжевой разностной схемы (1.18), (1.19) для $\tau = h = 1/45$.

На Рисунке 5 разрыв остается без сглаживания. Мы специально взяли разрывное решение для отчетливой иллюстрации этого эффекта. Но он проявляется и на кусочно-гладких решениях в окрестностях больших значений или разрывов второй производной по x .

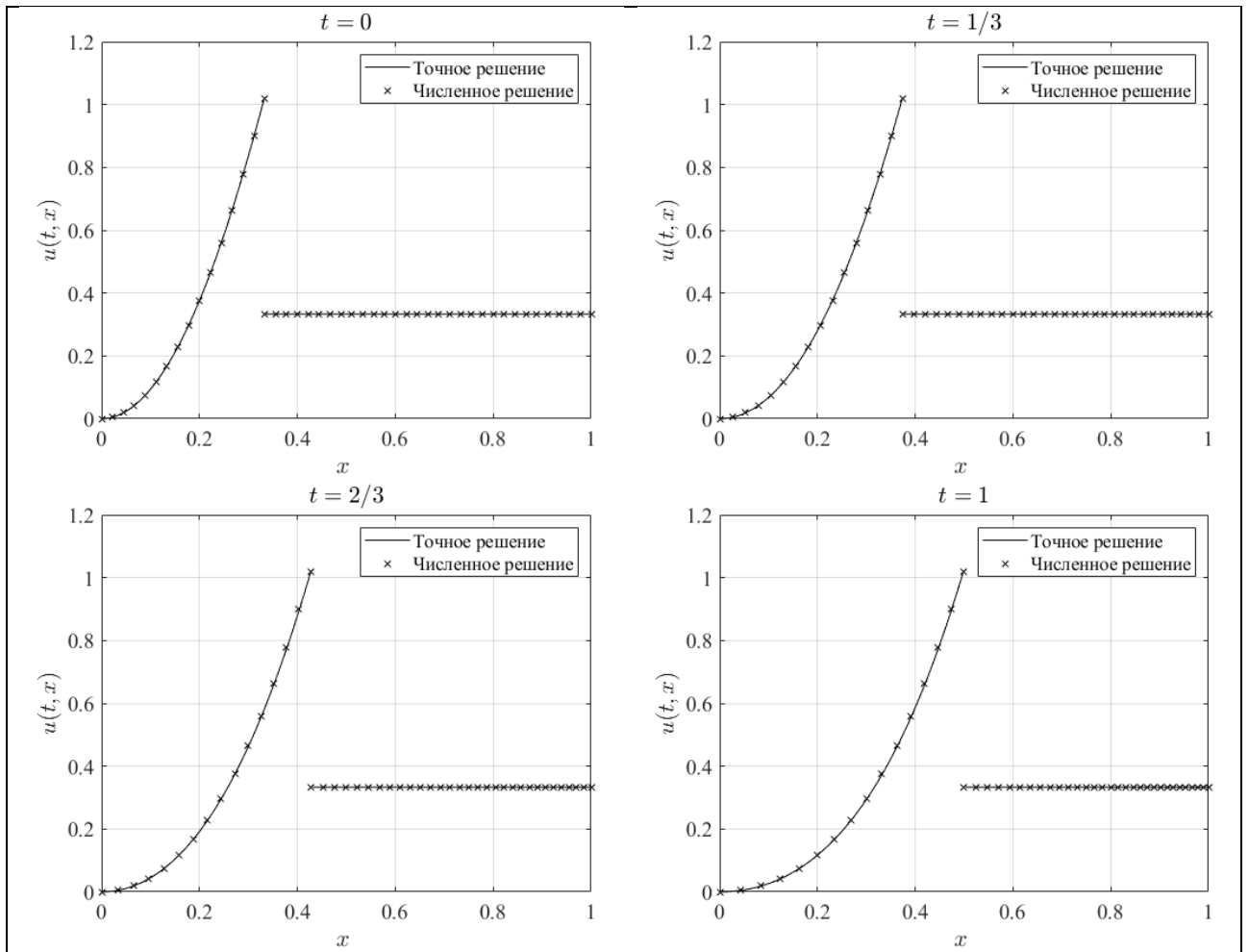


Рисунок 5 – Графики решения лагранжево-эйлеровой разностной схемы (1.61), (1.62) для $\tau = h = 1/45$.

2 Полулагранжевы методы решения одномерного уравнения конвекции-диффузии

Рассмотрим параболическое уравнение конвекции-диффузии

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} - \sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(t, x) \quad \forall (t, x) \in [0, T] \times [0, 1]. \quad (2.1)$$

Для однозначной разрешимости задачи добавим краевые условия

$$u(t, 0) = u^{lf}(t), \quad u(t, 1) = u^{rt}(t) \quad \forall t \in [0, T] \quad (2.2)$$

и начальное условие

$$u(t, x) = u_0(x) \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (2.3)$$

2.1 Эйлерово-лагранжева аппроксимация

Сначала поступим простым объединением уже построенной в разделе 2.1 аппроксимации оператора конвекции с трехточечной аппроксимацией второй производной во внутренних узлах сетки $\omega_t \times \bar{\omega}_x$. С учетом ранее введенных обозначений получаем разностные уравнения для сеточной функции $u_{k,i}^h$:

$$\sigma \frac{-u_{k,i-1}^h + 2u_{k,i}^h - u_{k,i+1}^h}{h^2} + \frac{1}{\tau} (u_{k,i}^h - \alpha_{k-1,i} u_{k-1,i-1}^h - \beta_{k-1,i} u_{k-1,i}^h - \gamma_{k-1,i} u_{k-1,i+1}^h) = f_{k,i} \quad (2.4)$$

$$\forall k = 1, \dots, M, \quad \forall i = 1, \dots, N-1,$$

где при условии (1.10) коэффициенты имеют вид

$$\alpha_{k-1,i} = \max \{0, \tau a_{k,i}/h\} \geq 0, \quad \gamma_{k-1,i} = \max \{0, -\tau a_{k,i}/h\} \geq 0, \quad (2.5)$$

$$\beta_{k-1,i} = 1 - \alpha_{k-1,i} - \gamma_{k-1,i} \geq 0, \quad i = 0, \dots, N \text{ и } k = 1, \dots, M.$$

В соответствии с краевыми и начальными условиями (2.2) и (2.3) дополним уравнения (2.4) сеточными аналогами этих условий:

$$u_{k,0}^h = u^{lf}(t_k), \quad u_{k,N}^h = u^{rt}(t_k) \quad \forall k = 1, \dots, M, \quad (2.6)$$

$$u_{0,i}^h = u_0(x_i) \quad \forall i = 0, \dots, N. \quad (2.7)$$

Свойства коэффициентов (2.5) обеспечивают «сильную монотонность»: неотрицательность приближенного решения $u^h(t_k, x_i)$ на сетке $\omega_t \times \bar{\omega}_x$ при неотрицательных краевых и начальных значениях $u_{0,i}^h$ и неотрицательной правой части $f_{k,i} \geq 0$. Эти же свойства обеспечивают пошаговую устойчивость в норме $\|v^h\|_{\infty, \bar{\omega}_x}$.

Лемма 2.1. При выполнении (1.10), а также условий

$$u^{lf}(t_k) \geq 0, \quad u^{rt}(t_k) \geq 0 \quad \forall k = 1, \dots, M,$$

$$u_{0,i}^h \geq 0 \quad \forall i = 0, \dots, N, \quad (2.8)$$

$$f_{k,i} \geq 0 \quad \forall k = 1, \dots, M, \quad \forall i = 0, \dots, N$$

решение разностной схемы (2.4)-(2.7), является неотрицательным:

$$u_{k,i}^h \geq 0 \quad \forall k = 1, \dots, M, \quad \forall i = 0, \dots, N. \quad (2.9)$$

Доказательство. Учитывая неотрицательность $u_{0,i}^h \geq 0$ на начальном слое, применим метод математической индукции для $k = 1, \dots, M$. Для этого предположим выполнение (2.9) на $(k-1)$ -м слое. Методом от противного предположим

также, что на k -м слое есть хоть одно значение $u_{k,i}^h$ меньше нуля. Выберем среди них наименьшее, которое достигается на компоненте $u_{k,j}^h$ с некоторым $1 \leq j \leq N-1$. Возьмем уравнение с этим номером и запишем его в следующем виде:

$$\left(\frac{2\sigma}{h^2} + \frac{1}{\tau}\right)u_{k,j}^h = \sigma u_{k,j-1}^h/h^2 + \sigma u_{k,j+1}^h/h^2 + \frac{\alpha_{k-1,j}}{\tau}u_{k-1,j-1}^h + \frac{\beta_{k-1,j}}{\tau}u_{k-1,j}^h + \frac{\gamma_{k-1,j}}{\tau}u_{k-1,j+1}^h + f_{k,j}.$$

С учетом неотрицательности значений предыдущего слоя и правой части получаем неравенство

$$\left(\frac{2\sigma}{h^2} + \frac{1}{\tau}\right)u_{k,j}^h \geq \sigma u_{k,j-1}^h/h^2 + \sigma u_{k,j+1}^h/h^2.$$

А поскольку значение $u_{k,j}^h$ является минимальным на этом слое, то приходим к неравенству $u_{k,j}^h/\tau \geq 0$, противоречащему предположению о его отрицательности. \square

Лемма 2.2 Для решения разностной схемы (2.4)-(2.7) при выполнении условия (1.10) справедлива оценка устойчивости

$$\|u^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x} \leq \|u^h(t_{k-1}, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x} + \tau \|f(t_k, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x} \quad \forall k = 1, \dots, M. \quad (2.10)$$

Доказательство. Пусть максимальное значение модуля на слое $k \geq 1$ достигается на компоненте $u_{k,j}^h$ с некоторым $1 \leq j \leq N-1$, т.е.

$$|u_{k,j}^h| = \|u^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x}.$$

Оставим в правой части уравнения (2.4) с этим номером слагаемое с $u_{k,j}^h$, возьмем модуль от обеих частей и применим неравенство треугольника:

$$\begin{aligned} \left(\frac{2\sigma}{h^2} + \frac{1}{\tau}\right)|u_{k,j}^h| &\leq \sigma |u_{k,j-1}^h|/h^2 + \sigma |u_{k,j+1}^h|/h^2 + \\ &+ \frac{\alpha_{k-1,j}}{\tau} |u_{k-1,j-1}^h| + \frac{\beta_{k-1,j}}{\tau} |u_{k-1,j}^h| + \frac{\gamma_{k-1,j}}{\tau} |u_{k-1,j+1}^h| + |f_{k,j}|. \end{aligned}$$

Принимая во внимание предшествующее равенство, определение нормы, а также свойство коэффициентов (2.5), получаем, что

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{2\sigma}{h^2} + \frac{1}{\tau} \right) \|u^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x} \leq \\
& \leq \frac{2\sigma}{h^2} \|u^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x} + \frac{1}{\tau} (\alpha_{k-1, j} + \beta_{k-1, j} + \gamma_{k-1, j}) \|u^h(t_{k-1}, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x} + f_{k, i} \leq \\
& \leq \frac{2\sigma}{h^2} \|u^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x} + \frac{1}{\tau} \|u^h(t_{k-1}, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x} + \|f(t_k, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x}.
\end{aligned}$$

Проводя сокращение совпадающих слагаемых в обеих частях этого неравенства, после умножения на τ мы получаем (2.10). Если же максимум достигается на компоненте $u_{k,0}^h$ или $u_{k,N}^h$, то вместо (2.4) следует взять (2.6). Тогда предыдущая цепочка неравенств становится еще проще. \square

Для доказательства сходимости подставим точное решение $u_{k,i}$ в разностную схему (2.4)-(2.7). В итоге мы получаем равенства

$$\begin{aligned}
& \sigma \frac{-u_{k,i-1} + 2u_{k,i} - u_{k,i+1}}{h^2} + \frac{1}{\tau} (u_{k,i} - \alpha_{k-1,i} u_{k-1,i-1} - \beta_{k-1,i} u_{k-1,i} - \gamma_{k-1,i} u_{k-1,i-1}) = \\
& = f_{k,i} + \varepsilon_{k,i}^h \quad \forall k = 1, \dots, M, \quad \forall i = 1, \dots, N-1
\end{aligned} \tag{2.11}$$

с погрешностью аппроксимации $\varepsilon_{k,i}^h$. Путем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки (t_k, x_i) можно убедиться, что

$$|\varepsilon_{k,i}^h| \leq (\tilde{c}_1 \tau + \tilde{c}_2 h) \tag{2.12}$$

с некоторыми константами, независящими от τ, h равномерно на применяемой разностной сетке при достаточной гладкости данных задачи (2.1)-(2.3). С учетом этой оценки погрешности аппроксимации мы получаем сходимость того же порядка.

Теорема 2.1. При выполнении условия (1.10) для достаточно гладких данных задачи (2.1)-(2.3) имеет место следующая оценка сходимости разностной схемы (2.4)-(2.7):

$$\|u(t_k, \cdot) - u^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x} \leq k\tau(\tilde{c}_1 \tau + \tilde{c}_2 h) \quad \forall k = 1, \dots, M, \tag{2.13}$$

откуда

$$\max_{1 \leq k \leq M} \|u(t_k, \cdot) - u^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x} \leq T(\tilde{c}_1 \tau + \tilde{c}_2 h). \tag{2.14}$$

Доказательство. Для доказательства (2.13) воспользуемся принципом математической индукции. На начальном слое ввиду условия (2.2) оценка (2.13) выполняется с нулевой правой частью. Пусть теперь (2.13) выполнена для

некоторого $k - 1$. Докажем ее для $k \geq 1$. Из уравнений (2.4) вычтем уравнения (2.11). Тогда для разности $u(t_k, \cdot) - u^h(t_k, \cdot)$ на основании Леммы 1.2 имеем оценку

$$\|u(t_k, \cdot) - u^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x} \leq \|u(t_{k-1}, \cdot) - u^h(t_{k-1}, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x} + \tau \|\mathcal{E}(t_k, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x} \quad \forall k = 1, \dots, M.$$

Используя предположение (2.13) для $k - 1$ и оценку (2.12), получаем (2.13) для k . А беря максимум от обеих частей (2.13) по всем $k = 1, \dots, M$, получаем (2.14). \square

Замечание 2.1. Снова отметим, что ограничение (1.10) тоже не является принципиальным для уравнения конвекции-диффузии в этом разделе. Его нарушение компенсируется коррекцией шаблона.

Замечание 2.2. Отметим два важных свойства полученной разностной схемы (2.1)-(2.3). Во-первых, на каждом слое по времени приходится решать систему алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей. Следует обратить внимание, что она является симметричной и положительно определенной. Отметим, что в традиционном способе аппроксимации наличие первой разностной производной делает эту матрицу несимметричной. В одномерном случае симметрия не играет большой роли ввиду применения метода прогонки для решения этих систем уравнений. Но что касается двумерных и трехмерных задач, то свойство симметрии матриц значительно повышает эффективность применения итерационных процессов для решения систем алгебраических уравнений.

Во-вторых, симметрия и положительная определенность матриц сохраняется при разных количественных соотношениях коэффициентов конвекции и диффузии. Например, при значительном преобладании конвекции традиционный способ аппроксимации может нарушить устойчивость для умеренных шагов сетки по пространству. В предложенной аппроксимации свойства матрицы определяются только положительным коэффициентом σ .

2.3 Лагранжево-эйлерова аппроксимация

Теперь предположим выполнение условия Липшица (1.3) для функции $a(t, x)$ и ее производной $\partial a / \partial x(t, x)$. Из каждой точки $(0, x_i)$, $x_i \in \bar{\omega}_x$, на нижнем слое $t = 0$ замкнутой области $\bar{\Omega} = [0, T] \times [0, 1]$ построим характеристическую кривую $(t, \bar{x}_i(t))$ с начальным условием $\bar{x}_i(0) = x_i$. Обозначим через $\bar{x}_{k,i} = \bar{x}_i(t_k)$ координату x пересечения этой кривой с линией $t = t_k$. В результате на каждом уровне по времени $t = t_k$, $0 \leq k \leq M$, построена неравномерная сетка по пространству $\bar{\omega}_x^k = \{\bar{x}_{k,i}, i = 0, \dots, N\}$ с шагами $h_{k,i+1/2} = \bar{x}_{k,i+1} - \bar{x}_{k,i}$.

Как уже было отмечено в разделе 1.2, несмотря на систематическое смещение узлов $\bar{x}_{k,i}$ и $\bar{x}_{k,i+1/2}$ с одного слоя на другой, значения шагов $h_{k,i+1/2}$ и $h_{k,i}$ пространственных временных сеток остаются порядка $O(h)$, а разность между соседними шагами является величиной $O(h^2)$. Более того, эти порядки малости

остаются справедливыми при приближенном вычислении узлов сетки $\bar{\omega}_x^{\tau,k} = \{\bar{x}_{k,i}^\tau, i=0, \dots, N\}$ с шагами $h_{k,i+1/2}^\tau = \bar{x}_{k,i+1}^\tau - \bar{x}_{k,i}^\tau$ с помощью явного метода Эйлера или методов Рунге-Кутты более высокого порядка (Леммы 1.5 и 1.6).

Это позволяет обосновать второй порядок аппроксимации следующей трехточечной разделенной разности:

$$-\frac{2\sigma}{h_{k,i-1/2}^\tau + h_{k,i+1/2}^\tau} \left(\frac{u_{k,i+1}^\tau - u_{k,i}^\tau}{h_{k,i+1/2}^\tau} - \frac{u_{k,i}^\tau - u_{k,i-1}^\tau}{h_{k,i-1/2}^\tau} \right) = -\sigma \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(t_k, \bar{x}_{k,i}^\tau) + O(h^2), \quad (2.15)$$

где $u_{k,i}^\tau = u(t_k, \bar{x}_{k,i}^\tau)$. Из рассуждений, предшествующих выводу сеточного уравнения (1.60), вытекает аппроксимация

$$\frac{u_{k,i}^\tau - u_{k-1,i}^\tau}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t}(t_k, \bar{x}_{k,i}^\tau) + a(t_k, \bar{x}_{k,i}^\tau) \frac{\partial u}{\partial x}(t_k, \bar{x}_{k,i}^\tau) + O(\tau). \quad (2.16)$$

Объединим две этих аппроксимации и отбросим их погрешности. В результате получаем разностную схему

$$-\frac{\tilde{\sigma}}{h_{k,i-1/2}^\tau} u_{k,i-1}^{\tau,h} + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{\tilde{\sigma}}{h_{k,i+1/2}^\tau} + \frac{\tilde{\sigma}}{h_{k,i-1/2}^\tau} \right) u_{k,i}^{\tau,h} - \frac{\tilde{\sigma}}{h_{k,i+1/2}^\tau} u_{k,i+1}^{\tau,h} = \frac{u_{k-1,i}^{\tau,h}}{\tau} + f(t_k, \bar{x}_{k,i}^\tau), \quad (2.17)$$

$$\forall k = 1, \dots, M, \quad \forall i = 1, \dots, N-1.$$

с $\tilde{\sigma} = 2\sigma / (h_{k,i-1/2}^\tau + h_{k,i+1/2}^\tau) > 0$ для вычисления приближенного решения $u_{k,i}^{\tau,h} \approx u(t_k, \bar{x}_{k,i}^\tau)$ с начальными и краевыми условиями

$$u_{0,i}^{\tau,h} = u_0(ih) \quad \forall i = 0, \dots, N, \quad (2.18)$$

$$u_{k,0}^{\tau,h} = u^{lf}(t_k), \quad u_{k,N}^{\tau,h} = u^{rt}(t_k) \quad \forall k = 1, \dots, M. \quad (2.19)$$

Отметим, что как и в предыдущих случаях, схема (2.17)-(2.19) является монотонной и устойчивой, но уже в норме на квазиравномерной сетке $\|v^h\|_{\infty, \bar{\omega}_x^{\tau,k}}$. Сформулируем соответствующие леммы и замечания.

Лемма 2.3. При выполнении условия Липшица (1.3) для функции $a(t, x)$ и ее производной $\partial a / \partial x(t, x)$, а также условий

$$u_{0,i}^{\tau,h} = u_0(ih) \quad \forall i = 0, \dots, N, \quad (2.20)$$

$$u_{k,0}^{\tau,h} = u^{lf}(t_k), \quad u_{k,N}^{\tau,h} = u^{rt}(t_k) \quad \forall k = 1, \dots, M. \quad (2.21)$$

решение разностной схемы (2.17)-(2.19), является неотрицательным:

$$u_{k,i}^{\tau,h} \geq 0 \quad \forall k = 1, \dots, M, \quad \forall i = 0, \dots, N. \quad (2.22)$$

Доказательство. Как и при доказательстве Леммы 2.1 с учетом неотрицательности начальных условий $u_{0,i}^{\tau,h} \geq 0$, применим метод математической индукции для $k = 1, \dots, M$. Предположим выполнение (2.22) на $(k-1)$ -м слое. Методом от противного предположим также, что на k -м слое есть хоть одно значение $u_{k,i}^{\tau,h}$ меньше нуля. Выберем среди них наименьшее, которое достигается на компоненте $u_{k,j}^{\tau,h}$ с некоторым $1 \leq j \leq N-1$. С учетом неотрицательности значений предыдущего слоя и правой части выпишем неравенство для $u_{k,j}^{\tau,h}$, следующее из (2.17)

$$\left(\frac{1}{\tau} + \frac{\tilde{\sigma}}{h_{k,j+1/2}^\tau} + \frac{\tilde{\sigma}}{h_{k,j-1/2}^\tau} \right) u_{k,j}^{\tau,h} \geq \frac{\tilde{\sigma}}{h_{k,j-1/2}^\tau} u_{k,j-1}^{\tau,h} + \frac{\tilde{\sigma}}{h_{k,j+1/2}^\tau} u_{k,j+1}^{\tau,h},$$

а поскольку значение $u_{k,j}^{\tau,h}$ является минимальным на этом слое, то приходим к неравенству $u_{k,j}^{\tau,h}/\tau \geq 0$, противоречащему предположению о его отрицательности. \square

Лемма 2.4. Для решения разностной схемы (2.17)-(2.19) при выполнении условия Липшица (1.3) для функции $a(t, x)$ и ее производной $\partial a/\partial x(t, x)$ справедлива оценка устойчивости

$$\|u^{\tau,h}(t_k, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x^{\tau,k}} \leq \|u^{\tau,h}(t_{k-1}, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x^{\tau,k}} + \tau \|f(t_k, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x^{\tau,k}} \quad \forall k = 1, \dots, M. \quad (2.23)$$

Как и прежде для доказательства сходимости подставим *точное* решение $u_{k,i}^\tau$ в разностную схему (2.17)-(2.19). В итоге мы получаем равенства

$$\begin{aligned} & -\frac{\tilde{\sigma}}{h_{k,i-1/2}^\tau} u_{k,i-1}^\tau + \left(\frac{1}{\tau} + \frac{\tilde{\sigma}}{h_{k,i+1/2}^\tau} + \frac{\tilde{\sigma}}{h_{k,i-1/2}^\tau} \right) u_{k,i}^\tau - \frac{\tilde{\sigma}}{h_{k,i-1/2}^\tau} u_{k,i+1}^\tau = \\ & = \frac{u_{k-1,i}^\tau}{\tau} + f(t_k, \bar{x}_{k,i}^\tau) + \varepsilon_{k,i}^{\tau,h}, \quad \forall k = 1, \dots, M, \quad \forall i = 1, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (2.24)$$

с погрешностью аппроксимации $\varepsilon_{k,i}^{\tau,h}$, где, как уже было показано выше,

$$|\varepsilon_{k,i}^h| \leq (\tilde{c}_1 \tau + \tilde{c}_2 h^2) \quad (2.25)$$

с некоторыми константами, независимыми от τ , h равномерно при достаточной гладкости данных задачи (2.1)-(2.3).

Теорема 2.2. При выполнении условия Липшица (1.3) для функции $a(t, x)$ и ее производной $\partial a / \partial x(t, x)$, имеет место следующая оценка сходимости разностной схемы (2.17)-(2.19):

$$\left\| u^\tau(t_k, \cdot) - u^{\tau, h}(t_k, \cdot) \right\|_{\infty, \bar{\omega}_x^{\tau, k}} \leq k\tau(\tilde{c}_1\tau + \tilde{c}_2h^2) \quad \forall k = 1, \dots, M, \quad (2.26)$$

откуда

$$\max_{1 \leq k \leq M} \left\| u^\tau(t_k, \cdot) - u^{\tau, h}(t_k, \cdot) \right\|_{\infty, \bar{\omega}_x^{\tau, k}} \leq T(\tilde{c}_1\tau + \tilde{c}_2h^2). \quad (2.27)$$

Доказательство. Для доказательства (2.26) воспользуемся принципом математической индукции. На начальном слое ввиду условия (2.2) оценка (2.26) выполняется с нулевой правой частью. Пусть теперь (2.26) выполнена для некоторого $k - 1$. Докажем ее для $k \geq 1$. Из уравнений (2.17) вычтем уравнения (2.24). Тогда для разности $u(t_k, \cdot) - u^h(t_k, \cdot)$ на основании Леммы 2.4 имеем оценку

$$\left\| u^\tau(t_k, \cdot) - u^{\tau, h}(t_k, \cdot) \right\|_{\infty, \bar{\omega}_x^{\tau, k}} \leq \left\| u^\tau(t_{k-1}, \cdot) - u^{\tau, h}(t_{k-1}, \cdot) \right\|_{\infty, \bar{\omega}_x^{\tau, k}} + \tau \left\| \varepsilon^\tau(t_k, \cdot) \right\|_{\infty, \bar{\omega}_x^{\tau, k}} \quad \forall k = 1, \dots, M.$$

Используя предположение (2.26) для $k - 1$ и оценку (2.25), получаем (2.26) для k . А беря максимум от обеих частей (2.26) по всем $k = 1, \dots, M$, получаем (2.27). \square

2.4. Вычислительные эксперименты

Рассмотрим уравнение (2.1) с начальным условием (2.3) и краевыми условиями (2.2), где

$$a(t, x) = x(1-x)/(2-t), \quad \sigma = 2, \quad (2.28)$$

$$u_0(x) = \sin(\pi x^2),$$

$$f(t, x) = 2 \exp(t^2) \left((t + 4\pi^2 x^2) \sin(\pi x^2) + \left(\frac{\pi x^2(1-x)}{2-t} - 2\pi \right) \cos(\pi x^2) \right).$$

Точным решением этой задачи является функция

$$u(t, x) = \exp(t^2) \sin(\pi x^2), \quad (2.29)$$

которая в ходе расчетов будет использоваться для проверки точности.

Для решения этой задачи сначала используем разностную схему (2.4)-(2.7) на последовательности убывающих шагов (1.75). Обозначим ее решение с параметрами τ_n и h_n как $u_{k,i}^{h_n}$ и положим

$$\varepsilon_n = \max_{0 \leq k \leq M_n, 0 \leq i \leq N_n} |u_{k,i}^{h_n} - u(t_k, x_i)|.$$

Результаты вычислений приведены в Таблице 3 и действительно иллюстрируют первый порядок сходимости.

Теперь для решения задачи (2.28), (2.29) используем разностную схему (2.17)-(2.19) на последовательности убывающих шагов

$$\tau_n = \tau_{n-1}/4, \tau_0 = 1/128; h_n = h_{n-1}/2, h_0 = 1/32.$$

Таблица 3 – Сходимость разностной схемы (2.4)-(2.7).

n	ε_n	$\varepsilon_{n-1}/\varepsilon_n$	$\log_2(\varepsilon_{n-1}/\varepsilon_n)$
0	0.088981		
1	0.028035	3.17	1.67
2	0.010456	2.68	1.42
3	0.004948	2.11	1.08
4	0.002452	2.02	1.01
5	0.001224	2.00	1.00

Обозначим ее решение с параметрами τ_n и h_n как $u_{k,i}^{\tau,h_n}$ и положим

$$\varepsilon_n = \max_{0 \leq k \leq M_n, 0 \leq i \leq N_n} |u_{k,i}^{\tau,h_n} - u(t_k, \bar{x}_i)|.$$

Будем считать, что точки (t_k, \bar{x}_i) вычисляются точно из аналитического решения уравнения для характеристических кривых. Результаты вычислений приведены в Таблице 4 и демонстрируют второй порядок сходимости по пространству и первый по времени.

Таблица 4 – Сходимость разностной схемы (2.17)-(2.19) при точном вычислении точек (t_k, \bar{x}_i) .

n	ε_n	$\varepsilon_{n-1}/\varepsilon_n$	$\log_2(\varepsilon_{n-1}/\varepsilon_n)$
0	0.0070319		
1	0.0017912	3.93	1.97
2	0.0004500	3.98	1.99
3	0.0001126	4.00	2.00
4	0.0000282	4.00	2.00
5	0.0000070	4.00	2.00

И наконец, будем считать, что точки пересечения характеристик с (t_k, \bar{x}_i) $t = t_k$ не известны и находятся через решение характеристического уравнения методом Рунге-Кутты 2 порядка. Результаты вычислений приведены в Таблице 5 и также демонстрируют второй порядок сходимости по пространству и первый по времени.

Таблица 5 – Сходимость разностной схемы (2.17)-(2.19) с вычислением точек $(t_k, \bar{x}_{k,i}^r)$ методом Рунге-Кутты 2 порядка.

n	ε_n	$\varepsilon_{n-1}/\varepsilon_n$	$\log_2(\varepsilon_{n-1}/\varepsilon_n)$
0	0.0070318		
1	0.0017912	3.93	1.97
2	0.0004500	3.98	1.99
3	0.0001126	4.00	2.00
4	0.0000282	4.00	2.00
5	0.0000070	4.00	2.00

3 Полулагранжевы методы для двумерных задач

В этом разделе $\Omega = (0,1) \times (0,1)$. Также введем обозначение $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$ для произвольного вектора \mathbf{v} .

Рассмотрим двумерное гиперболическое уравнение первого порядка с оператором в недивергентной форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = f(t, \mathbf{x}) \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \bar{\Omega} \quad (3.1)$$

с коэффициентами $a_l(t, \mathbf{x})$, представляющими компоненты вектора скорости $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$ потока некоторой субстанции с распределением плотности $u(t, \mathbf{x})$.

В разделе 3 для упрощения выкладок положим

$$a_l(t, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{при } x_l = 0 \text{ и } x_l = 1 \quad \forall t \in [0, T], \quad l = 1, 2. \quad (3.2)$$

Одновременно потребуем выполнения непрерывности по Липшицу:

$$|a_l(t, \mathbf{x}_1) - a_l(t, \mathbf{x}_2)| \leq L |\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| \quad \forall \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2 \in \bar{\Omega}, \quad l = 1, 2 \quad (3.3)$$

с константой Липшица L равномерно по $t \in [0, T]$.

При этих свойствах коэффициентов для разрешимости задачи достаточно определить начальное условие

$$u(t, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega} \quad (3.4)$$

Для описания характеристик оператора этой задачи рассмотрим семейство систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\bar{x}_l'(t; s) = a_l(t, \bar{\mathbf{x}}) \quad \forall t \in (0, T), \quad l = 1, 2, \quad (3.5)$$

для определения вектор-функции $\bar{\mathbf{x}}(t; s) = (\bar{x}_1(t; s), \bar{x}_2(t; s))$ с начальным условием

$$\bar{\mathbf{x}}(0; s) = s \quad \forall s \in \bar{\Omega} \quad (3.6)$$

Точка $s = (s_1, s_2)$ является индикатором характеристики, исходящей из $s \in \bar{\Omega}$ на слое $t = 0$. При фиксированной точке s мы будем называть характеристикой график $G_s[0, T] = \{(t, \bar{x}(t; s)) : t \in [0, T]\}$ вектор-функции $\bar{x}(t; s)$, параметризованной по t .

Само решение задачи (3.1), (3.4) с ненулевой правой частью $f(t, \mathbf{x})$ определяется с помощью семейства обыкновенных дифференциальных уравнений (вдоль характеристик) [10]

$$\frac{dv(t; s)}{dt} = f(t, \bar{x}(t; s)) \quad \forall t \in [0, T] \quad (3.7)$$

с начальными условиями

$$v(0; s) = u_0(s) \quad \forall s \in \bar{\Omega} \quad (3.8)$$

Здесь $v(t; s) = u(t, \bar{x}(t; s))$. Непосредственно из (3.7) и (3.8) следует, что

$$u(t, \bar{x}(t; s)) = v(t; s) = u_0(s) + \int_0^t f(r, \bar{x}(r; s)) dr \quad \forall t \in [0, T]. \quad (3.9)$$

3.1. Эйлерово-лагранжева аппроксимация

Для задачи (3.1), (3.4) сначала рассмотрим два приема эйлерово-лагранжевой аппроксимации. Они основаны на фиксированной пространственно-временной сетке с привлечением участков характеристик между временными слоями. С этой целью используем равномерные разностные сетки по времени $\omega_t = \{t_j = j\tau, j = 0, \dots, M\}$ и по пространству $\bar{\omega}_x = \{\mathbf{x}_{i,j} = (x_i^1, x_j^2) : x_i^1 = ih, x_j^2 = jh, i = 0, \dots, N, j = 0, \dots, N\}$ с целыми $M, N \geq 2$.

Приближенное решение задачи на каждом временном слое t_k будем искать в узлах разностной сетки $\bar{\omega}_x : u_{k,i,j}^h \equiv u^h(t_k, \mathbf{x}_{i,j})$.

В целях упрощения визуализации геометрических конструкций используем ограничение (как уже упоминалось, не принципиальное для полулагранжевых аппроксимаций)

$$\tau \max_{[0, T] \times \bar{\Omega}} \{|a_1|, |a_2|\} < h/2. \quad (3.10)$$

Первый (с точки зрения геометрии шаблона) прием состоит в использовании одномерных конструкций раздела 1 по каждому из двух направлений. А именно, разобьем уравнение (3.1) на два:

$$\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} = f^1(t, \mathbf{x}), \quad \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = f^2(t, \mathbf{x}), \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [0, T] \times \bar{\Omega} \quad (3.11)$$

с некоторыми функциями, для которых

$$f^1 + f^2 = f \text{ на } [0, T] \times \bar{\Omega}. \quad (3.12)$$

Предположим, что приближенное решение $u^h(t, \mathbf{x})$ задачи (3.1), (3.4) уже вычислено на слое $t = t_{k-1}$ в узлах $\bar{\omega}_x$. Например, на слое $t = 0$ оно получается с помощью начального условия (3.4):

$$u^h(t, \mathbf{x}_{i,j}) = u_0(\mathbf{x}_{i,j}) \quad \forall \mathbf{x}_{i,j} \in \bar{\omega}_x. \quad (3.13)$$

Для вычисления приближенного решения на слое $t = t_k$ из точки $(t_k, \mathbf{x}_{i,j})$ проведем две линии в виде одного шага явного метода Эйлера обратно по времени:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{i,j}^{1*} &= \mathbf{x}_{i,j} - 2\tau(a_1(t_k, \mathbf{x}_{i,j}), 0), \\ \mathbf{x}_{i,j}^{2*} &= \mathbf{x}_{i,j} - 2\tau(0, a_2(t_k, \mathbf{x}_{i,j})) \end{aligned} \quad (3.14)$$

до пересечения с плоскостью $t = t_{k-1}$, как изображено на Рисунке 6.

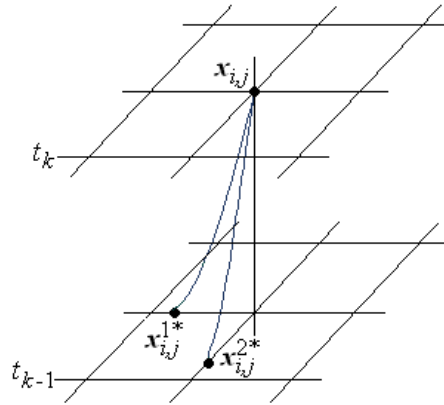


Рисунок 6 – Равномерная сетка с двумя узлами метода Эйлера (при положительных $a_l(t_{k-1}, \mathbf{x}_{i,j})$).

В соответствии с разделом 1.1 уравнения (3.11) аппроксимируются следующим образом:

$$\begin{aligned} L_1^h(u)_{k,i,j} &\equiv \frac{1}{2\tau} \left(u_{k,i,j} - \alpha_{k-1,i,j}^1 u_{k-1,i-1,j} - \beta_{k-1,i,j}^1 u_{k-1,i,j} - \gamma_{k-1,i,j}^1 u_{k-1,i+1,j} \right) = \\ &= f_{k,i,j}^1 + \varepsilon_{k,i,j}^1, \\ L_2^h(u)_{k,i,j} &\equiv \frac{1}{2\tau} \left(u_{k,i,j} - \alpha_{k-1,i,j}^2 u_{k-1,i,j-1} - \beta_{k-1,i,j}^2 u_{k-1,i,j} - \gamma_{k-1,i,j}^2 u_{k-1,i,j+1} \right) = \\ &= f_{k,i,j}^2 + \varepsilon_{k,i,j}^2, \\ i &= 0, \dots, N, \quad j = 0, \dots, N, \quad k = 1, \dots, M, \end{aligned} \quad (3.15)$$

где

$$\alpha_{k-1,i,j}^l = \max \left\{ 0, 2\tau a_l(t_k, \mathbf{x}_{i,j})/h \right\} \geq 0, \quad (3.16)$$

$$\gamma_{k-1,i,j}^l = \max \left\{ 0, -2\tau a_l(t_k, \mathbf{x}_{i,j})/h \right\} \geq 0,$$

$$\beta_{k-1,i,j}^l = 1 - \alpha_{k-1,i,j}^l - \gamma_{k-1,i,j}^l \geq 0. \quad (3.17)$$

Сложим оба оператора из (3.15) с учетом (3.12):

$$L_1^h(u)_{k,i,j} + L_2^h(u)_{k,i,j} = f_{k,i,j} + \varepsilon_{k,i,j}^1 + \varepsilon_{k,i,j}^2. \quad (3.18)$$

Отбрасывая неизвестные погрешности аппроксимации в правой части, мы приходим к разностной схеме

$$L_1^h(u^h)_{k,i,j} + L_2^h(u^h)_{k,i,j} = f_{k,i,j}, \quad i=0,\dots,N, \quad j=0,\dots,N, \quad k=1,\dots,M. \quad (3.19)$$

Анализ коэффициентов показывает, что явная схема вместе с начальным условием (3.13) позволяет последовательно определить значения $u^h(t_k, \mathbf{x})$ послойно $\forall \mathbf{x} \in \bar{\omega}_x$.

Свойства коэффициентов (3.16)-(3.17) обеспечивают «сильную монотонность»: неотрицательность приближенного решения $u^h(t_k, \mathbf{x}_{i,j})$ на сетке $\omega_t \times \bar{\omega}_x$ при неотрицательных начальных значениях $u_{0,i,j}^h$ и неотрицательных значениях правой части $f_{k,i,j} \geq 0$. Эти же свойства обеспечивают пошаговую устойчивость в норме

$$\|v^h\|_{\infty, \bar{\omega}_x} = \max_{\mathbf{x} \in \bar{\omega}_x} |v^h(\mathbf{x})|, \quad (3.20)$$

определяемой для сеточных функций $v^h(x)$ на $\bar{\omega}_x$.

Приведем эти утверждения без доказательств, поскольку они почти дословно повторяют обоснования в одномерном случае.

Лемма 3.1. При выполнении (3.10), а также условий

$$u_{0,i,j}^h \geq 0 \quad \forall \mathbf{x}_{i,j} \in \bar{\omega}_x \quad \text{и} \quad f_{k,i,j} \geq 0 \quad \forall k=1,\dots,M, \quad \forall \mathbf{x}_{i,j} \in \bar{\omega}_x \quad (3.21)$$

решение явной разностной схемы (3.13), (3.19) является неотрицательным:

$$u_{k,i,j}^h \geq 0 \quad \forall k=1,\dots,M, \quad \forall \mathbf{x}_{i,j} \in \bar{\omega}_x. \quad (3.22)$$

Лемма 3.2. Для решения явной разностной схемы (3.13), (3.19) при выполнении условия (3.10) справедлива оценка устойчивости

$$\|u^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x} \leq \|u^h(t_{k-1}, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x} + \tau \|f(t_k, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x} \quad \forall k=1,\dots,M. \quad (3.23)$$

Для доказательства сходимости путем разложения в ряд Тейлора в окрестности точки $(t_k, \mathbf{x}_{i,j})$ можно убедиться, что

$$|\mathcal{E}_{k,i,j}^l| \leq (\tilde{c}_1 \tau + \tilde{c}_2 h) \quad (3.24)$$

с некоторыми константами, независящими от τ, h равномерно на сетке $\omega_t \times \bar{\omega}_x$ при достаточной гладкости данных задачи (3.1), (3.4). С учетом этой оценки погрешности аппроксимации мы получаем сходимость того же порядка.

Теорема 3.1. При выполнении условия (3.10) для достаточно гладких данных задачи (3.1), (3.4) имеет место следующая оценка сходимости разностной схемы (3.13), (3.29):

$$\|u(t_k, \cdot) - u^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x} \leq 2k\tau(\tilde{c}_1 \tau + \tilde{c}_2 h) \quad \forall k = 1, \dots, M, \quad (3.25)$$

откуда

$$\max_{1 \leq k \leq M} \|u(t_k, \cdot) - u^h(t_k, \cdot)\|_{\infty, \bar{\omega}_x} \leq 2T(\tilde{c}_1 \tau + \tilde{c}_2 h). \quad (3.26)$$

Замечание 3.1. Снова отметим, что вдвое усилившееся (по сравнению с одномерным случаем) ограничение (3.10) не является принципиальным для полугранжевых разностных схем и его нарушение компенсируется коррекцией шаблона.

Второй прием аппроксимации состоит в использовании конструкции раздела 1.1 одновременно по двум направлениям. А именно, из точки $(t_k, \mathbf{x}_{i,j})$ проведем одну линию в виде одного шага явного метода Эйлера обратно по времени для системы из двух уравнений:

$$\mathbf{x}_{i,j}^* = \mathbf{x}_{i,j} - \tau \mathbf{a}(t_k, \mathbf{x}_{i,j}), \quad (3.27)$$

до пересечения с плоскостью $t = t_{k-1}$, как изображено на Рисунке 7. Отметим, что для определенности геометрического расположения полученной точки $\mathbf{x}_{i,j}^* = (x_{i,j}^{1*}, x_{i,j}^{2*})$ заменим условие (3.10) следующим образом:

$$\tau \max_{[0,T] \times [0,1]} \{|a_1| + |a_2|\} \leq h. \quad (3.28)$$

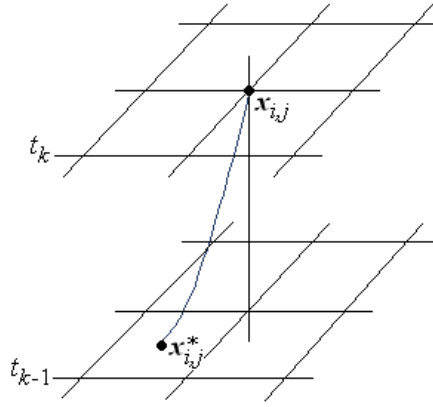


Рисунок 7 – Равномерная сетка с одним узлом метода Эйлера (при положительных $a_l(t_{k-1}, \mathbf{x}_{i,j})$).

Вместо значения $u^h(t_{k-1}, \mathbf{x}_{i,j}^*)$ в полученной точке $\mathbf{x}_{i,j}^*$ возьмем линейную комбинацию значений по трем узлам треугольника, в который она попала на слое $t = t_{k-1}$:

$$\begin{aligned} u^h(t_{k-1}, \mathbf{x}_{i,j}^*) &= \alpha_{k-1,i,j}^1 u^h(t_{k-1}, \mathbf{x}_{i-1,j}) + \gamma_{k-1,i,j}^1 u^h(t_{k-1}, \mathbf{x}_{i+1,j}) \\ &+ \alpha_{k-1,i,j}^2 u^h(t_{k-1}, \mathbf{x}_{i,j-1}) + \gamma_{k-1,i,j}^2 u^h(t_{k-1}, \mathbf{x}_{i,j+1}) + \beta_{k-1,i,j} u^h(t_{k-1}, \mathbf{x}_{i,j}), \end{aligned} \quad (3.29)$$

При выполнении (3.28) коэффициенты удовлетворяют условиям

$$\begin{aligned} \alpha_{k-1,i,j}^1 &= \max\{0, \tau a_1(t_k, \mathbf{x}_{i,j})/h\} \geq 0, \\ \gamma_{k-1,i,j}^1 &= \max\{0, -\tau a_1(t_k, \mathbf{x}_{i,j})/h\} \geq 0, \\ \alpha_{k-1,i,j}^2 &= \max\{0, \tau a_2(t_k, \mathbf{x}_{i,j})/h\} \geq 0, \\ \gamma_{k-1,i,j}^2 &= \max\{0, -\tau a_2(t_k, \mathbf{x}_{i,j})/h\} \geq 0, \\ \beta_{k-1,i,j} &= 1 - \alpha_{k-1,i,j}^1 - \gamma_{k-1,i,j}^1 - \alpha_{k-1,i,j}^2 - \gamma_{k-1,i,j}^2 \geq 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Несмотря на формальное наличие пяти коэффициентов, только три из них в общем случае являются ненулевыми. С учетом разделенной разности $(u^h(t_{k-1}, \mathbf{x}_{i,j}) - u^h(t_{k-1}, \mathbf{x}_{i,j}^*))/\tau$ после деления (3.29) на τ получаем сеточные уравнения

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau} u^h(t_{k-1}, \mathbf{x}_{i,j}^*) &= \frac{1}{\tau} \alpha_{k-1,i,j}^1 u^h(t_{k-1}, \mathbf{x}_{i-1,j}) + \frac{1}{\tau} \gamma_{k-1,i,j}^1 u^h(t_{k-1}, \mathbf{x}_{i+1,j}) \\ &+ \frac{1}{\tau} \alpha_{k-1,i,j}^2 u^h(t_{k-1}, \mathbf{x}_{i,j-1}) + \frac{1}{\tau} \gamma_{k-1,i,j}^2 u^h(t_{k-1}, \mathbf{x}_{i,j+1}) + \frac{1}{\tau} \beta_{k-1,i,j} u^h(t_{k-1}, \mathbf{x}_{i,j}) + f_{k,i,j}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Замечание 3.2. Отметим, что сеточные уравнения (3.29) совпадают с ранее представленными уравнениями (3.19), только записаны в другой форме. Поэтому

для них справедливы ранее представленные результаты по монотонности, аппроксимации, устойчивости и сходимости. Различие между ними сказывается для больших скоростей a_1, a_2 , когда нарушаются ограничения (3.10) и (3.28). Тогда второй прием при аппроксимации по трем соседним узлам сетки обеспечивает более компактное расположение шаблона на нижнем слое, чем первый прием. В реальных задачах со значительными скоростями решение обычно существенно глаже вдоль траекторий, чем поперек них. Поэтому точность аппроксимации у второго приема обычно выше, чем у первого.

3.2 Лагранжево-эйлерова аппроксимация

Теперь рассмотрим лагранжево-эйлерову аппроксимацию. По аналогии с одномерным случаем из каждой точки $(0, \mathbf{x}_{i,j}), \mathbf{x}_{i,j} \in \bar{\omega}_x$, на нижнем слое $t = 0$ выпустим характеристическую кривую $(t, \bar{\mathbf{x}}_{i,j}(t))$ с начальным условием $\bar{\mathbf{x}}_{i,j}(0) = \mathbf{x}_{i,j}$. В результате их пересечения с плоскостями $t = t_k, 1 \leq k \leq M$, получаем неравномерные сетки по пространству: $\bar{\omega}_x^k = \{\bar{\mathbf{x}}_{k,i,j}, i = 0, \dots, N, j = 0, \dots, N\}$. Наряду с этой (точной) лагранжевой сеткой построим приближенную лагранжеву сетку $\bar{\omega}_x^{\tau,k} = \{\bar{\mathbf{x}}_{k,i,j}^\tau, i = 0, \dots, N, j = 0, \dots, N\}$, узлы которой получены последовательным применением метода Рунге-Кутты второго порядка

$$\begin{aligned} \mathbf{k}_1 &= \tau \mathbf{a}(t_{k-1}, \bar{\mathbf{x}}_{k-1,i,j}^\tau), \\ \mathbf{k}_2 &= \tau \mathbf{a}(t_k, \bar{\mathbf{x}}_{k-1,i,j}^\tau + \mathbf{k}_1), \\ \bar{\mathbf{x}}_{k,i,j}^\tau &= \bar{\mathbf{x}}_{k-1,i,j}^\tau + 1/2(\mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2), \\ i &= 0, \dots, N, \quad j = 0, \dots, N, \quad k = 1, \dots, M, \end{aligned}$$

начиная с равномерной сетки $\bar{\omega}_x$ на слое $t = 0$: $\bar{\mathbf{x}}_{0,i,j}^\tau = \mathbf{x}_{i,j} \in \bar{\omega}_x$.

Приближенное решение задачи на каждом временном слое t_k будем искать в узлах этих сеток. Таким образом, на каждом временном слое функция $u^h(t_k, \mathbf{x}_{i,j}^k)$ определяется своими дискретными значениями $u_{k,i,j}^h \equiv u^h(t_k, \bar{\mathbf{x}}_{k,i,j}^k)$, $i = 0, \dots, N, j = 0, \dots, N$.

Предположим, что приближенное решение $u^h(t, x)$ уравнения (3.1) уже вычислено на слое $t = t_{k-1}$ в узлах $\bar{\omega}_x^{k-1}$. По аналогии с формулой (3.9) имеем точное равенство

$$u(t_k, \bar{\mathbf{x}}_{k,i,j}) = u(t_{k-1}, \bar{\mathbf{x}}_{k-1,i,j}) + \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(r, \bar{\mathbf{x}}(r; \mathbf{x}_{i,j})) dr. \quad (3.32)$$

Для его упрощения, во-первых, заменим интеграл квадратурной формулой:

$$\int_{t_{k-1}}^{t_k} f(r, \bar{\mathbf{x}}(r, \mathbf{x}_{i,j})) dr \approx \tau \left(f(t_k, \bar{\mathbf{x}}_{k,i,j}) + f(t_{k-1}, \bar{\mathbf{x}}_{k-1,i,j}) \right) / 2.$$

Во-вторых, узлы $\bar{\mathbf{x}}_{k,i,j}$ сетки $\bar{\omega}_x^k$ приближенно заменим узлами $\bar{\mathbf{x}}_{k,i,j}^\tau$ сетки $\bar{\omega}_x^{\tau,k}$. В результате получается простое выражение

$$u_{k,i,j}^h = u_{k,i,j}^h + \tau \left(f(t_k, \bar{\mathbf{x}}_{k,i,j}^\tau) + f(t_{k-1}, \bar{\mathbf{x}}_{k-1,i,j}^\tau) \right) / 2, \quad (3.33)$$

$$i = 0, \dots, N, \quad j = 0, \dots, N, \quad k = 1, \dots, M.$$

Добавляя начальные условия (3.13), мы приходим к явной разностной схеме.

Для этой схемы с понятными упрощениями обосновываются аналоги Лемм 3.1 и 3.2. Сложнее получается оценка погрешности вида (3.27). В случае применения разностных схем второго и более высокого порядка точности для построения узлов $\bar{\mathbf{x}}_{k,i,j}^\tau$ сетки $\bar{\omega}_x^{\tau,k}$ довольно просто получается оценка

$$\frac{u(t_k, \bar{\mathbf{x}}_{k-1,i,j}) - u(t_{k-1}, \bar{\mathbf{x}}_{k-1,i,j})}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t}(t_k, \bar{\mathbf{x}}_{k-1/2,i,j}) + O(\tau^2 + h^2).$$

Кроме того, для приближенных значений узлов следует использовать более точную асимптотическую оценку

$$\bar{\mathbf{x}}_{k,i,j}^\tau = \bar{\mathbf{x}}_{k,i,j} + \tau^2 \mathbf{g}_{i,j}(t) + O(\tau^3)$$

с вектор-функцией $\mathbf{g}_{i,j}(t)$, независимой от τ . Она обосновывается обычным образом по аналогии с разложениями в [М-Ш].

3.3 Вычислительные эксперименты

Подтверждение первого порядка сходимости для эйлерово-лагранжевой схемы и второго порядка для лагранжево-эйлеровой не вызывает сомнений. Поэтому остановимся на эффекте сглаживания первой схемы и на его отсутствии у второй схемы. Пусть уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a_1 \frac{\partial u}{\partial x_1} + a_2 \frac{\partial u}{\partial x_2} = 0 \quad \text{на } [0,1] \times [0,1] \times [0,1] \quad (3.34)$$

дополнено начальным условием

$$u(0, \mathbf{x}) = u_0(\mathbf{x}) \quad \text{на } \bar{\Omega} = [0,1] \times [0,1],$$

где

$$a_1(t, \mathbf{x}) = x_1(1-x_1)\cos(\pi x_2)/(2-t),$$

$$a_2(t, \mathbf{x}) = x_2(1-x_2)\cos(\pi x_1)/(2-t), \quad (3.35)$$

$$u_0(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{если } |\mathbf{x} - (0.5, 0.25)| \leq 0.2, \\ 1 & \text{если } |\mathbf{x} - (0.5, 0.75)| \leq 0.2, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Напомним, что решение уравнения (3.34) остается постоянным вдоль характеристик. А теперь приведем графики решений разностных схем (3.13), (3.29) и (3.13), (3.33) с шагами $\tau = h = 1/45$ в моменты времени $t = 0, 1/3, 2/3, 1$.

Как видно из Рисунка 8, сглаживание в двумерном случае у эйлерово-лагранжевой схемы осуществляется еще сильнее в двух направлениях.

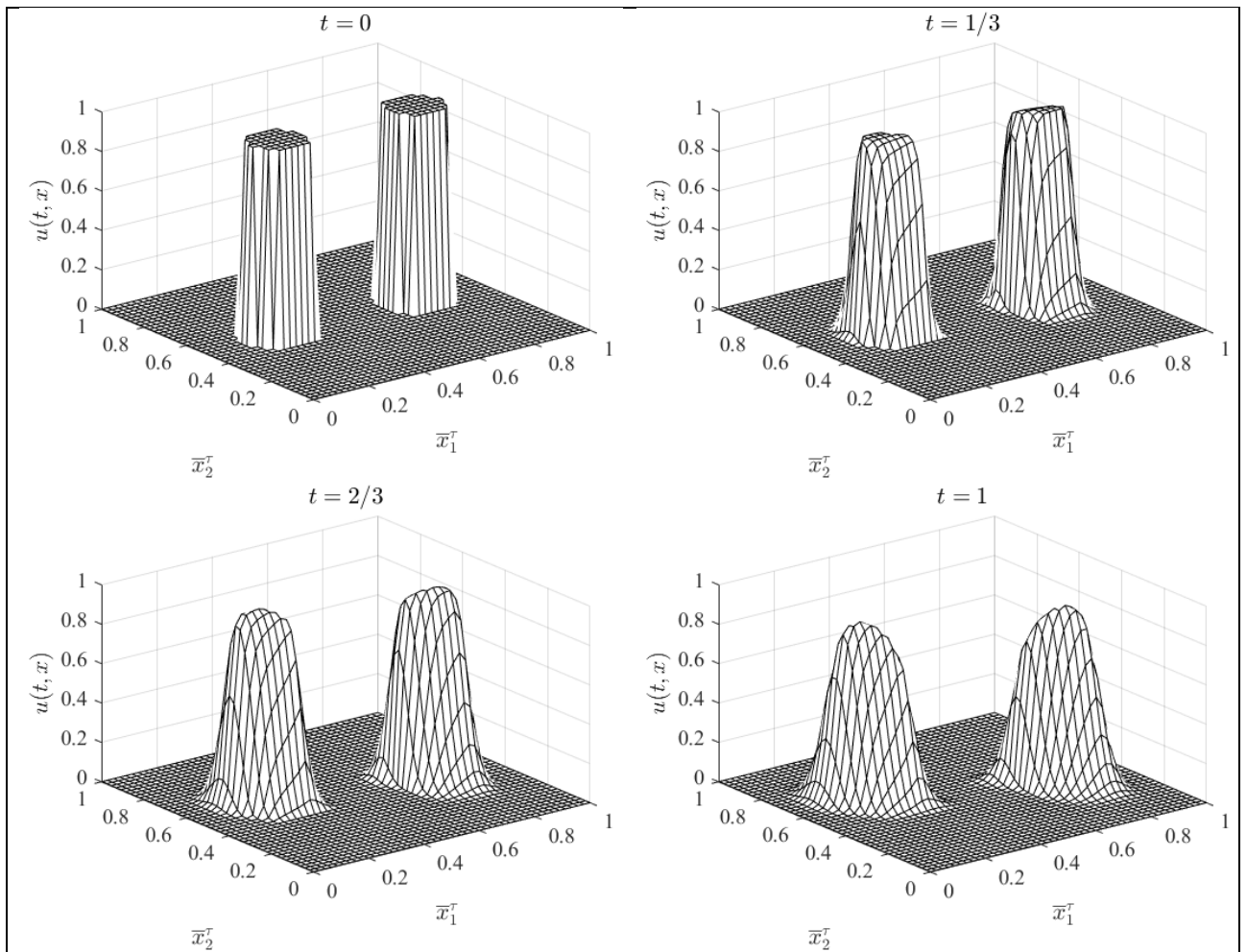


Рисунок 8 – Графики решения эйлерово-лагранжевой разностной схемы (3.13), (3.29) для $\tau = h = 1/45$.

А на Рисунке 9 для лагранжево-эйлеровой схемы разрыв остается без сглаживания.

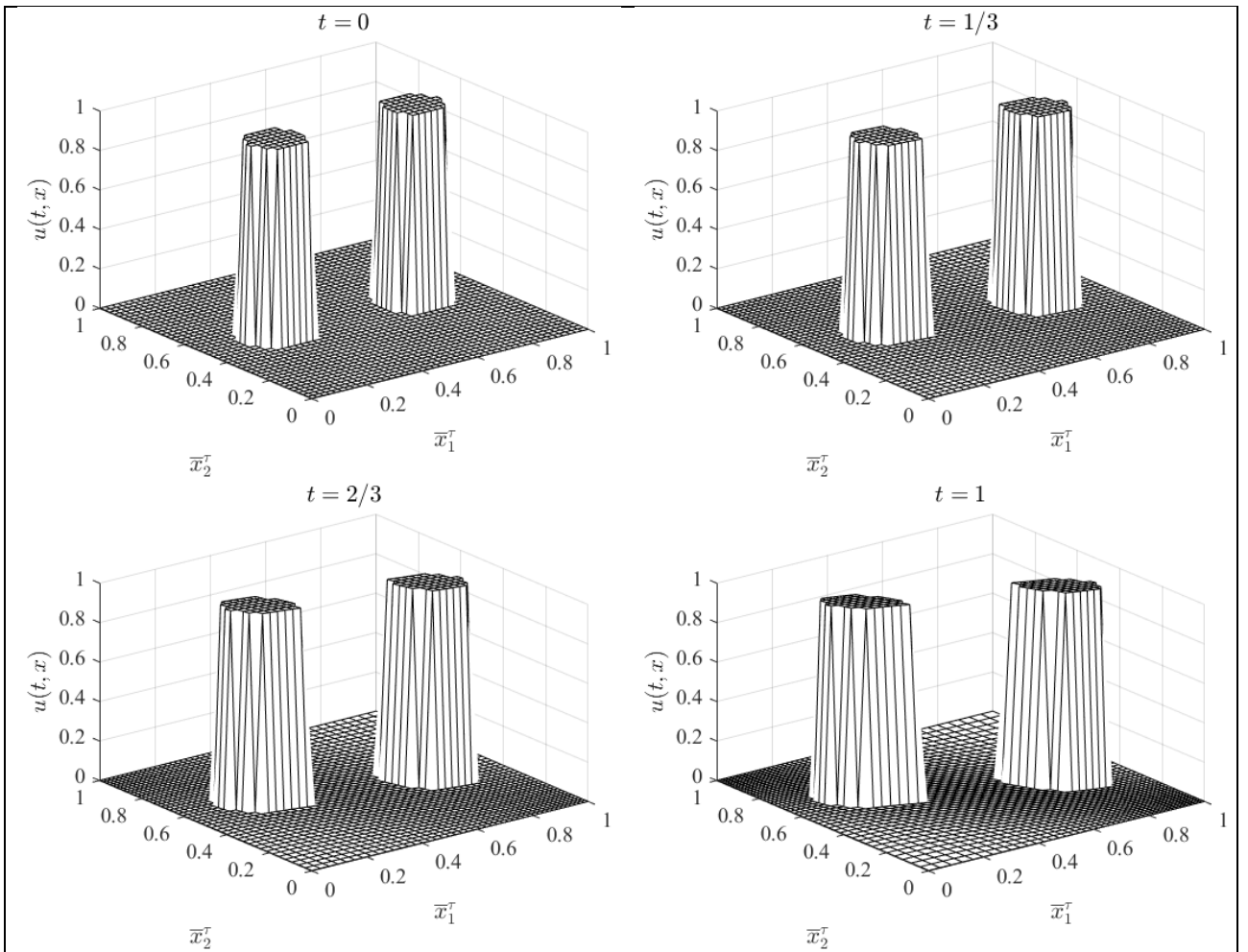


Рисунок 9 – Графики решения лагранжево-эйлеровой разностной схемы (3.13), (3.33) для $\tau = h = 1/45$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены новые полулагранжевы разностные схемы для решения гиперболического уравнения переноса и параболического уравнения конвекции-диффузии с операторами переноса в недивергентной форме; проведено обоснование порядка точности полученных разностных схем и проведены вычислительные эксперименты, подтверждающие указанные порядки точности разностных схем.

Полученные результаты имеют как теоретическое, так и прикладное значение и могут быть применены для решения задач механики жидкости и газа.

Работа поддержана Красноярским математическим центром, финансируемым Минобрнауки РФ в рамках мероприятий по созданию и развитию региональных НОМЦ (Соглашение 075-02-2023-912).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

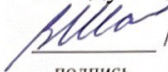
1. Friedrichs, K. O. Symmetric hyperbolic linear differential equations / K. O. Friedrichs, D. H. Hyers // *Communications on Pure and Applied Mathematics*. – 1954. – Vol. 7. – P. 345-392.
2. Хакимзянов, Г. С. Методы вычислений Ч. 4: Численные методы решения задач для уравнений гиперболического типа: учеб. пособие / Г. С. Хакимзянов, С. Г. Черный; Новосиб. гос. ун-т. – Новосибирск : РИЦ НГУ, 2014. — 207 с.
3. Годунов, С. К. Разностный метод численного расчета разрывных решений уравнений гидродинамики / С. К. Годунов // *Матем. сб.* – 1959. – Т. 47(89). – № 3. – С. 271-306.
4. Harten, A. High Resolution Schemes for Hyperbolic Conservation Laws / A. Harten // *J. Comput. Phys.* – 1983. – Vol. 135. – P. 357-393.
5. Магомедов, К. М. О построении разностных схем для уравнений гиперболического типа на основе характеристических соотношений / К. М. Магомедов, А. С. Холодов // // *Ж. вычисл. матем. и матем. физики*. – 1969. – Т. 9, № 2. – С. 373–386.
6. Холодов, А. С. О построении разностных схем повышенного порядка точности для уравнений гиперболического типа / А. С. Холодов // // *Ж. вычисл. матем. и матем. физики*. – 1980. – Т. 20, № 6. – С. 1601–1620.
7. Магомедов, К. М. Сеточно-характеристические численные методы / К. М. Магомедов, А. С. Холодов. – Москва: Наука, 1988. – 287 с. – ISBN 5-02-006613-3
8. Douglas, J. Numerical Methods for Convection-Dominated Diffusion Problems Based on Combining the Method of Characteristics with Finite Element or Finite Difference Procedures / J. Douglas, T. F. Russell // *SIAM Journal on Numerical Analysis*. – 1982. – Vol. 19. – № 5. – P. 871-885.
9. Pironneau, O. On the transport-diffusion algorithm and its applications to the Navier-Stokes equations / O. Pironneau // *Numerische Mathematik*. – 1982. – Vol. 38. – № 3. – P. 309-332.
10. Горицкий, А. Ю. Уравнения с частными производными первого порядка / А. Ю. Горицкий, Г.А. Чечкин – Москва: URSS, 2022. – 168 с.
11. Филиппов, А. Ф. Введение в теорию дифференциальных уравнений: учебник / А. Ф. Филиппов. – Изд. 2-е, испр. – Москва : КомКнига, 2007. – 240 с.
12. Хайрер, Э. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи: науч. изд. / Э. Хайрер, С. Нёрсетт, Г. Ваннер. – Пер. с англ. – Москва : Мир, 1990. – 512 с.
13. Courant, R. On the solution of nonlinear hyperbolic differential equations by finite differences / R. Courant, E. Isaacson, M. D. Rees // *Communications on Pure and Applied Mathematics*. – 1952. – Vol. 5. – P. 243-255.

14. Lax, P. D. Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation / P. D. Lax // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1954. – Vol. 7. – P. 159-193.
15. Lax, P. D. System of Conservation Laws / P. D. Lax, B. Wendroff // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 1960. – Vol. 13. – P. 217–237.
16. Холодов, А. С. О критериях монотонности разностных схем для уравнений гиперболического типа / А. С. Холодов, Холодов Я. А. // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. – 2006. – Т. 46, № 9. – С. 1560–1588.
17. Федоренко, Р. П. Применение разностных схем высокой точности для численного решения гиперболических уравнений / Р. П. Федоренко // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. – 1962. – Т. 2, № 6. – С. 1122–1128.
18. Петров, И. Б. О регуляризации разрывных численных решений уравнений гиперболического типа / И. Б. Петров, А. С. Холодов // Ж. вычисл. матем. и матем. физики. – 1984. – Т. 24, № 8. – С. 1172–1188.
19. Куликовский, А. Г. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений / А. Г. Куликовский, Н. В. Погорелов, А. Ю. Семенов. – Москва: Физматлит, 2012. – 656 с.
20. Самарский, А. А. Разностные методы решения задач газовой динамики / А. А. Самарский, Ю. П. Попов. – Москва: Наука, 1992. – 424 с.
21. Шокин, Ю. И. Метод дифференциального приближения. Применение к газовой динамике / Ю. И. Шокин, Н. Н. Яненко. – Новосибирск: Наука, 1985. – 365 с.
22. Чушкин, П. И. Метод характеристик для пространственных сверхзвуковых течений / П. И. Чушкин – Москва: ВЦ АН СССР, 1968. – 424 с.
23. Bonaventura, L. An Introduction to Semi-Lagrangian Methods for Geo-physical Scale Flows / L. Bonaventura // Ercoftac Leonhar Euler lectures. – Zurich: Swiss Federal Institute of Technology, 2004. – 46 p.
24. Самарский А. А. Теория разностных схем / А. А. Самарский. – Москва: Наука. – 1977. – 656 с.
25. Alt, H.W. Linear Functional Analysis. – London: Springer, 2016. – 435 p.

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Базовая кафедра вычислительных и информационных технологий

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой


 / В. В. Шайдуров
подпись инициалы, фамилия
«22» июня 2023г.

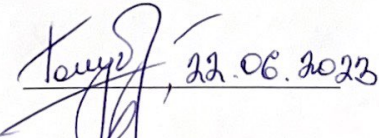
МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ


**ПОЛУЛАГРАНЖЕВЫ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ
КОНВЕКЦИИ-ДИФФУЗИИ**

Направление 02.04.01 Математика и компьютерные науки

Магистерская программа 02.04.01.02 Вычислительная математика

Руководитель  22.06.2023 профессор, В. В. Шайдуров
доктор физико-
математических
наук

Выпускник  22.06.2023 Р. А. Голубев

Нормоконтролер  22.06.2023 Т. Н. Шипина

Красноярск 2023