Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2009, 2(4), 494-505

УДК 517.95+532

Уравнения вращательно-симметрического движения жидкости в лагранжевых координатах и инвариантные решения

Александр А.Родионов*
Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок 50/44, Красноярск, 660036,
Россия

Получена 18.05.2009, окончательный вариант 25.07.2009, принята к печати 10.09.2009

Представлены групповые свойства уравнений вращательно-симметричного движения в лагранжевых координатах. Приведены примеры новых решений этих уравнений. Дана физическая интерпретация решений.

Ключевые слова: групповой анализ, алгебра Ли операторов, инвариантные решения.

Уравнения движения и основная алгебра Ли операторов в эйлеровых координатах

В пространстве переменных $\mathbf{x} = (x, y, z, t)$ в обозначениях, принятых в гидродинамике, уравнения идеальной несжимаемой жидкости имеют форму

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{1}{\rho}\nabla_x p = 0, \qquad \mathrm{div}_x \mathbf{u} = 0, \tag{1}$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор скорости , p — давление (постоянная плотность ρ считается равной единице).

На основе метода группового анализа [1] наиболее широкая группа, допускаемая системой (1), была вычислена в работе [2]. Алгебра Ли основной группы для (1) может быть представлена в виде прямой суммы конечномерной алгебры L_6 и бесконечномерного идеала L_∞ операторов:

$$L_6: \quad X_1 = \partial_t,\ X_2 = x^i\partial_{x^i} + u^i\partial_{u^i} + 2p\partial_p,\ X_3 = t\partial_t - u^i\partial_{u^i} - 2p\partial_p,$$
$$X_{i+j+1} = x^i\partial_{x^j} - x^j\partial_{x^i} + u^i\partial_{u^j} - u^j\partial_{u^i} \quad (i < j, i, j = 1, 2, 3),$$
$$L_\infty: \quad X^0(f_0) = f_0(t)\partial_p,\ X^k(f_k) = f_k(t)\partial_{x^k} + f_k'(t)\partial_{u^k} - x^k f_k''(t)\partial_{x^k},$$

здесь $k = 1, 2, 3$, суммирования по индексу k нет.

Пусть r, θ, z — цилиндрические координаты, u, v, w — проекции вектора скорости $\mathbf{u}$ на эти оси, p — давление. Движение является вращательно-симметричным, если в цилиндрической системе координат r, θ, z функции u, v, w, p не зависят от θ. Если же $v = 0$, то движение называется осесимметричным. Уравнения вращательно-симметричного движения идеальной жидкости имеют вид

$$\frac{du}{dt} - \frac{v^2}{r} + p_r = 0, \quad \frac{dv}{dt} + \frac{uv}{r} = 0, \quad \frac{dw}{dt} + p_z = 0,$$

*e-mail: aarod@icm.krasn.ru

$$\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}+\frac{\partial w}{\partial z}=0, \quad \frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial r}+w\frac{\partial}{\partial z}\,. \tag{2}$$

Система (2) получается из общей трехмерной системы "редукцией" по группе поворотов вокруг оси z. Однако основная алгебра фактор-системы (каковой и является система (2)) может оказаться шире основной алгебры нередуцированной системы. Поэтому полную основную алгебру фактор-системы, вообще говоря, необходимо вычислять заново.

Теорема 1. *Уравнения (2) допускают бесконечномерную группу преобразований. Базис алгебры Ли операторов имеет вид [3]*

$$\begin{gathered} X_1=\partial_t, \quad X_2=t\partial_t+r\partial_r+z\partial_z, \quad X_3=-\frac{1}{r^2 v}\,\partial_v+\frac{1}{r^2}\,\partial_p, \\ X_4=2t\partial_t+r\partial_r+z\partial_z-u\partial_u-v\partial_v-w\partial_w-2p\partial_p, \\ X_5(f)=f(t)\partial_z+f'(t)\partial_w-f''(t)z\partial_p, \quad X_6(g)=g(t)\partial_p, \end{gathered} \tag{3}$$

где $f(t), g(t)\in C^\infty$ — произвольные функции.

Отметим, что операторы $X_1, X_2, X_4, X_5(f), X_6(g)$ из (3) "индуцированы" соответствующими операторами из основной алгебры трехмерных уравнений Эйлера, в то время как оператор X_3 не имеет аналога. Оператор X_3 связан с инвариантностью системы (2) относительно преобразований

$$t'=t,\ r'=r,\ z'=z,\ u'=u,\ v'=\pm(v^2-2ar^{-2})^{1/2},\ w'=w,\ p'=p+ar^{-2} \tag{4}$$

с произвольным параметром a. Таким образом, алгебра операторов системы уравнений (2) вращательно-симметричного движения оказалась шире "индуцированной" из основной алгебры трехмерных уравнений Эйлера.

Замечание 1. Замечание касается физической интерпретации преобразований (4), определяемых оператором X_3. Изменение тангенциальной скорости v на $v'=\pm\sqrt{v^2-2ar^{-2}}$, согласно первому уравнению (2), приводит к изменению ускорения вдоль радиуса r (центростремительное ускорение). Равновесие жидкой частицы не будет нарушено, если изменения радиального ускорения будут компенсированы изменениями давления в жидкости. Преобразования (4) показывают, какие изменения тангенциальной скорости v и давления p допускаются.

Групповая классификация уравнений в лагранжевых координатах по функции начального распределения момента импульса

Групповая классификация в общем случае

Введем лагранжевые координаты с помощью решения задачи Коши:

$$\frac{dr}{dt}=u(r,z,t), \quad \frac{dz}{dt}=w(r,z,t), \quad r|_{t=0}=\eta \quad z|_{t=0}=\zeta. \tag{5}$$

Тогда второе уравнение системы (2) интегрируется:

$$rv=\eta v_0, \tag{6}$$

где $v_0(\eta,\zeta)$ — значение v при $t=0$. Равенство (6) выражает закон сохранения момента импульса жидкой частицы относительно оси z во вращательно-симметричном движении. Система (2) в лагранжевых координатах сводится к системе трех неизвестных функций $r(\eta,\zeta,t)$, $z(\eta,\zeta,t)$, $p(\eta,\zeta,t)$:

$$r_\eta\left(r_{tt}-\frac{V(\eta,\zeta)}{r^3}\right)+z_\eta z_{tt}+p_\eta=0,\quad r_\zeta\left(r_{tt}-\frac{V(\eta,\zeta)}{r^3}\right)+z_\zeta z_{tt}+p_\zeta=0,\quad r(r_\eta z_\zeta-r_\zeta z_\eta)=\eta. \tag{7}$$

В уравнениях (7) для удобства записи введено обозначение $V(\eta,\zeta)\equiv\eta^2v_0^2(\eta,\zeta)$.

Лемма 1. *Ядро алгебры Ли для системы (7) определяется бесконечномерным базисом операторов:*

$$L_0:\quad Y_1=\partial_t,\quad Y_5(g_1)=g_1(t)\partial_z-g_1''(t)z\partial_p\,,\quad Y_6(g_2)=g_2(t)\partial_p\,, \tag{8}$$

где $g_1(t),g_2(t)$ *— произвольные функции времени* t.

Доказательство. Инфинитезимальный оператор для системы (7) будем искать в виде

$$Y=\mu^1\partial_t+\mu^2\partial_\eta+\mu^3\partial_\zeta+\nu^1\partial_r+\nu^2\partial_z+\nu^3\partial_p\,,$$

где $\mu^i,\ \nu^i (i=1,2,3)$ — функции переменных t,η,ζ,r,z,p. После продолжения оператора Y на вторые производные из критерия инвариантности многообразия, задаваемого системой (7), $Y((7))|_{(7)}=0$, получаем представления для координат оператора Y:

$$\mu^1=C_1+C_2t,\quad \mu^2=\mu^2(\eta,\zeta),\quad \mu^3=\mu^3(\eta,\zeta),$$

$$\nu^1=C_3r,\quad \nu^2=C_3z+g_1(t),\quad \nu^3=2(C_3-C_2)p+\frac{C_4}{r^2}-g_1''(t)z+g_2(t) \tag{9}$$

с произвольными функциями $g_1,g_2\in C^\infty$; $C_1,\ C_2,\ C_3,\ C_4$ — постоянные. Кроме того, функции $\mu^2,\ \mu^3$ являются решениями двух определяющих уравнений

$$(\eta\mu^2)_\eta+(\eta\mu^3)_\zeta=3C_3\eta,\quad \mu^2V_\eta+\mu^3V_\zeta=(4C_3-2C_2)V-2C_4. \tag{10}$$

Здесь функция V определена в уравнениях (7).

При произвольной (нефиксированной) функции $V(\eta,\zeta)$ система (10) совместна, только если $\mu^2=\mu^3=0,\ C_2=C_3=C_4=0$. Обращаясь к координатам (9) оператора Y, получим базис основной алгебры L_0 системы (7). Оператор Y_1 определяет сдвиг по времени t, оператор $Y_5(g_1)$ определяет сдвиг по оси z, зависящий от $g_1(t)$, и сдвиг давления p, зависящего от $g_1(t)$ и z, а оператор $Y_6(g_2)$ определяет сдвиг, зависящий от $g_2(t)$. □

Далее решается задача групповой классификации по отношению к произвольному элементу — функции $V(\eta,\zeta)$.

Лемма 2. *Для системы уравнений* (7) *преобразования эквивалентности состоят из групповых преобразований, соответствующих ядру* L_0 *операторов* (8)*, и из преобразований*

$$\begin{gathered}\bar\eta=a_3\alpha(\eta,\zeta),\quad \bar\zeta=a_3\beta(\eta,\zeta),\quad \bar t=a_2^{-1}t,\quad \bar r=a_3r,\\ \bar z=a_3z,\quad \bar p=a_3^2a_2^2p+a_4a_3^{-2}r^{-2},\quad \bar V=a_3^4a_2^2V(\bar\eta,\bar\zeta)-2a_4\end{gathered} \tag{11}$$

с произвольными параметрами $a_2>0$, $a_3>0$, a_4. *Функции* α,β *удовлетворяют уравнению неразрывности* $\alpha_\eta\beta_\zeta-\alpha_\zeta\beta_\eta=\eta/\alpha$, *в остальном они также произвольны.*

Доказательство. Преобразования эквивалентности (не меняющие структуру уравнений (7)) находятся из определяющих уравнений при действии оператором $Y^{\text{экв}} = Y + \sigma\partial_V$ на уравнения (7) и на требование $\partial V/\partial t = 0$. Функция V выступает как независимая переменная. Тогда из определяющих уравнений (10) остается только первое уравнение, а координата σ оператора $Y^{\text{экв}}$ будет $\sigma = (4C_3 - 2C_2)V - 2C_4$. К базису операторов основной алгебры Ли L_0 (8) добавляются операторы

$$Y_2^{\text{экв}} = t\partial_t - 2p\partial_p - 2V\partial_V, \quad Y_3^{\text{экв}} = \eta\partial_\eta + \zeta\partial_\zeta + r\partial_r + z\partial_z + 2p\partial_p + 4V\partial_V,$$

$$Y_4^{\text{экв}} = r^{-2}\partial_p - 2\partial_V, \quad Y_*^{\text{экв}} = \eta^{-1}\varphi_\zeta\partial_\eta - \eta^{-1}\varphi_\eta\partial_\zeta,$$

где $\varphi(\eta,\zeta)$ — произвольная гладкая функция. Преобразования эквивалентности, соответствующие ядру L_0, определены в лемме 1.

Преобразования эквивалентности, соответствующие оператору $Y_2^{\text{экв}}$, определяют растяжение по t, p, V, на операторе $Y_3^{\text{экв}}$ получаем растяжения по η, ζ, r, z, p, V, оператор $Y_4^{\text{экв}}$ дает сдвиг для V и сдвиг, зависящий от r, для p. Индексы операторов соответствуют индексам параметров a_2, a_3, a_4.

Докажем, что преобразования $\bar\eta = \alpha(\eta,\zeta)$, $\bar\zeta = \beta(\eta,\zeta)$ с условием являются преобразованиями эквивалентности для уравнений (7), если $\alpha_\eta\beta_\zeta - \alpha_\zeta\beta_\eta = \eta/\alpha$.

При переходе от переменных (η,ζ) к $(\bar\eta,\bar\zeta)$ производные преобразуются по правилу

$$\frac{\partial}{\partial\eta} = \alpha_\eta\frac{\partial}{\partial\bar\eta} + \beta_\eta\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}, \quad \frac{\partial}{\partial\zeta} = \alpha_\zeta\frac{\partial}{\partial\bar\eta} + \beta_\zeta\frac{\partial}{\partial\bar\zeta}.$$

Уравнение неразрывности системы (7) после замены переменных преобразуется к виду $r(r_{\bar\eta}z_{\bar\zeta} - r_{\bar\zeta}z_{\bar\eta})(\alpha_\eta\beta_\zeta - \alpha_\zeta\beta_\eta) = \alpha(\alpha_\eta\beta_\zeta - \alpha_\zeta\beta_\eta)$ или $r(r_{\bar\eta}z_{\bar\zeta} - r_{\bar\zeta}z_{\bar\eta}) = \bar\zeta$. Таким образом, уравнение неразрывности инвариантно относительно данной замены.

Первое и второе уравнения системы (7) после замены переменных имеют следующий вид:

$$\alpha_\eta\left[r_{\bar\eta}\left(r_{tt} - \frac{V(\eta,\zeta)}{r^3}\right) + z_{\bar\eta}z_{tt} + p_{\bar\eta}\right] + \beta_\eta\left[r_{\bar\zeta}\left(r_{tt} - \frac{V(\eta,\zeta)}{r^3}\right) + z_{\bar\zeta}z_{tt} + p_{\bar\zeta}\right] = 0,$$

$$\alpha_\zeta\left[r_{\bar\eta}\left(r_{tt} - \frac{V(\eta,\zeta)}{r^3}\right) + z_{\bar\eta}z_{tt} + p_{\bar\eta}\right] + \beta_\zeta\left[r_{\bar\zeta}\left(r_{tt} - \frac{V(\eta,\zeta)}{r^3}\right) + z_{\bar\zeta}z_{tt} + p_{\bar\zeta}\right] = 0.$$

Умножим первое уравнение на β_ζ, второе — на β_η и вычтем из первого второе. В результате получим

$$(\alpha_\eta\beta_\zeta - \alpha_\zeta\beta_\eta)\left[r_{\bar\eta}\left(r_{tt} - \frac{V(\eta,\zeta)}{r^3}\right) + z_{\bar\eta}z_{tt} + p_{\bar\eta}\right] = 0.$$

Умножим второе уравнение на α_η, первое — на α_ζ и вычтем из второго первое:

$$(\alpha_\eta\beta_\zeta - \alpha_\zeta\beta_\eta)\left[r_{\bar\eta}\left(r_{tt} - \frac{V(\eta,\zeta)}{r^3}\right) + z_{\bar\eta}z_{tt} + p_{\bar\eta}\right] = 0.$$

Для замены $\bar\eta = \alpha(\eta,\zeta)$, $\bar\zeta = \beta(\eta,\zeta)$ якобиан перехода отличен от нуля $\alpha_\eta\beta_\zeta - \alpha_\zeta\beta_\eta = \eta/\alpha \neq 0$, следовательно, замена обратима. Функция $V(\eta,\zeta)$ преобразуется в некоторую функцию $\bar V(\bar\eta,\bar\zeta)$, а структура уравнений сохранится. Значит, указанная замена переменных является преобразованием эквивалентности для уравнений (7). □

Теорема 2. *Для системы уравнений* (7) *имеют место следующие случаи классификации по функции начального распределения момента импульса* $V(\eta,\zeta)$ *[3] :*
1) *если* $V(\eta,\zeta)$ *— произвольная функция, то базис ядра* L_0 *определяется операторами* (8)*;*
2) *если* $V = 0$ (*или* $V = \text{const}$), *то происходит расширение основной алгебры* L_0 *операторами*

$$\eta\partial_\eta + \zeta\partial_\zeta + r\partial_r + z\partial_z + 2p\partial_p, \quad t\partial_t - 2p\partial_p, \quad \eta^{-1}(\varphi_\zeta\partial_\eta - \varphi_\eta\partial_\zeta) \tag{12}$$

с произвольной функцией $\varphi(\eta,\zeta) \in C^\infty$*;*
3) *при* $V_\eta \neq 0$ *или* $V_\zeta \neq 0$: *если представителем класса функций выбрать функцию* $V(\eta,\zeta) = \eta$*, то базис ядра* L_0 *расширяется операторами*

$$t\partial_t - 2\eta\partial_\eta + 4\zeta\partial_\zeta - 2p\partial_p, \quad 2\eta\partial_\eta - 5\zeta\partial_\zeta + r\partial_r + z\partial_z + 2p\partial_p,$$
$$-2\partial_\eta + (2\zeta/\eta)\,\partial_\zeta + (1/r^2)\,\partial_p, \quad b(\eta)\partial_\zeta;$$

если представителем выбрать функцию $V(\eta,\zeta) = \zeta$*, то базис ядра* L_0 *расширяется операторами*

$$t\partial_t + \eta\partial_\eta - 2\zeta\partial_\zeta - 2p\partial_p, \quad -(\eta/2)\,\partial_\eta + 4\zeta\partial_\zeta + r\partial_r + z\partial_z + 2p\partial_p,$$
$$-2\partial_\zeta + (1/r^2)\,\partial_p, \quad (f(\zeta)/\eta)\,\partial_\eta.$$

Доказательство. Случай, когда $V(\eta,\zeta)$ – произвольная функция, рассмотрен в лемме 1. Условие $V = 0$ является классифицирующим, или в силу (11) $V = \text{const}$. В этом случае согласно (9), (10) получаем операторы (12).

Если $V_\eta \neq 0$ или $V_\zeta \neq 0$, то система (10) интегрируется в квадратурах, содержащих одну произвольную функцию от V. Поэтому для заданной $V(\eta,\zeta)$ выписывается базис операторов алгебры Ли, расширяющей L_0:

$$Y_2 = t\partial_t + \mu^2\partial_\eta + \mu^3\partial_\zeta - 2p\partial_p, \quad Y_3 = \mu^2\partial_\eta + \mu^3\partial_\zeta + r\partial_r + z\partial_z + 2p\partial_p,$$
$$Y_4 = \mu^2\partial_\eta + \mu^3\partial_\zeta + \frac{1}{r^2}\,\partial_p, \quad Y_*(\psi) = \frac{1}{\eta}\,\psi_\zeta(V)\partial_\eta - \frac{1}{\eta}\,\psi_\eta(V)\partial_\zeta, \tag{13}$$

$\psi(V)$ — произвольная гладкая функция. Функции μ^2, μ^3 находятся из (10), где надо положить $C_2 = 1$, $C_3 = C_4 = 0$ для Y_2; $C_2 = 0$, $C_3 = 1$, $C_4 = 0$ для Y_3; $C_2 = C_3 = 0$, $C_4 = 1$ для Y_4; $C_2 = C_3 = C_4 = 0$ для оператора Y_*. Например, если $V = V(\eta)$, $V_\eta \neq 0$, то операторы (13) специализируются следующим образом:

$$\widetilde{Y}_3 = \frac{4V}{V_\eta}\,\partial_\eta + \left[3 - \frac{4}{\eta}\left(\frac{\eta V}{V_\eta}\right)_\eta\right]\zeta\partial_\zeta + r\partial_r + z\partial_z + 2p\partial_p, \tag{14}$$

$$\widetilde{Y}_2 = t\partial_t - \frac{2V}{V_\eta}\,\partial_\eta + \frac{2}{\eta}\left(\frac{\eta V}{V_\eta}\right)_\eta \zeta\partial_\zeta - 2p\partial_p, \quad \widetilde{Y}_4 = -\frac{2}{V_\eta}\,\partial_\eta + \frac{2}{\eta}\left(\frac{\eta}{V_\eta}\right)_\eta \zeta\partial_\zeta + \frac{1}{r^2}\,\partial_p, \quad \widetilde{Y}_* = g(\eta)\partial_\zeta$$

с произвольной функцией $g(\eta) \in C^\infty$.

В лемме 2 показано, что замена переменных $\bar{\eta} = \alpha(\eta,\zeta)$, $\bar{\zeta} = \beta(\eta,\zeta)$ с требованием $\alpha_\eta\beta_\zeta - \alpha_\zeta\beta_\eta = \eta/\alpha \neq 0$ является преобразованием эквивалентности для уравнений (7). Структура уравнений сохраняется, а функция $V(\eta,\zeta)$ преобразуется в некоторую функцию $\bar{V}(\bar{\eta},\bar{\zeta})$. Сделаем замену вида $\bar{\eta} = \alpha(\eta,\zeta) \equiv V(\eta,\zeta)$, $\bar{\zeta} = \beta(\eta,\zeta)$. Функцию β найдем из требования $V(V_\eta\beta_\zeta - V_\zeta\beta_\eta) = \eta$. Функция $V(\eta,\zeta)$ преобразуется в функцию $\bar{V}(\bar{\eta},\bar{\zeta}) = \bar{\eta}$, которую можно считать представителем всех функций с условием $V_\eta \neq 0$ или $V_\zeta \neq 0$. Базисные операторы (14) тогда существенно упрощаются.

В качестве представителя можно было бы выбрать функцию $\bar{V}(\bar{\eta},\bar{\zeta}) = \bar{\zeta}$, если сделать замену вида $\bar{\eta} = \alpha(\eta,\zeta)$, $\bar{\zeta} = \beta(\eta,\zeta) \equiv V(\eta,\zeta)$. □

Инвариантность начальных условий

Потребуем, чтобы наряду с инвариантностью уравнений (7) относительно допустимых групповых преобразований были инвариантны и начальные условия:

$$F_0: \quad r=\eta, \quad z=\zeta \ \text{ при } \ t=0. \tag{15}$$

Лемма 3. *Ядро алгебры Ли операторов для уравнений (7) и начальных условий (15) определяется бесконечномерным базисом операторов*

$$L_0^0: \quad Y_5^0(g_1)=g_1(t)\partial_z-g_1''(t)z\partial_p, \quad Y_6^0(g_2)=g_2(t)\partial_p, \tag{16}$$

где $g_1(t)$, $g_2(t)$ — произвольные гладкие функции, $g_1(0)=0$.

Доказательство. Инфинитезимальный оператор Y^0 ищем в том же виде, как в лемме 1. Из критерия инвариантности многообразия, задаваемого (7) и (15), следует, что $Y^0(F_0)|_{F_0}=0$. Откуда находим координаты (9) и получаем следующее представление инфинитезимального оператора:

$$Y^0=C_2t\partial_t+C_3\eta\partial_\eta+(C_3\zeta+g_1(0))\,\partial_\zeta+C_3r\partial_r+(C_3z+g_1(t))\,\partial_z+$$
$$+\left(2(C_3-C_2)p+\frac{C_4}{r^2}-g_1''(t)z+g_2(t)\right)\partial_p. \tag{17}$$

Первое из определяющих уравнений в (10) будет выполнено тождественно, а классифицирующее уравнение примет вид

$$C_3\eta V_\eta+(C_3\zeta+g_1(0))\,V_\zeta=(4C_3-2C_2)V-2C_4. \tag{18}$$

Обозначения C_i, $i=2,3,4$, $g_1(t)$, $g_2(t)$ те же самые, что и в (9).

Предположение произвольности выбора функции $V(\eta,\zeta)$ реализуется в (18), если $C_2=C_3=C_4=g_1(0)=0$. Тем самым определяется базис ядра алгебры Ли допустимых операторов (16) для многообразия (7), (15). $\square$

Лемма 4. *Для системы (7), (15) преобразования эквивалентности состоят из групповых преобразований, соответствующих ядру L_0^0 операторов (16), и из преобразований*

$$\bar\eta=a_3\eta, \quad \bar\zeta=a_3(\zeta+a_1), \quad \bar t=a_2^{-1}t, \quad \bar r=a_3r,$$
$$\bar z=a_3(z+a_1), \quad \bar p=a_3^2a_2^2p+a_4a_3^{-2}r^{-2}, \quad \bar V=a_3^4a_2^2V(\bar\eta,\bar\zeta)-2a_4 \tag{19}$$

с произвольными постоянными $a_2>0$, $a_3>0$, a_4, a_1.

Доказательство. Так же как и в лемме 2, преобразования эквивалентности, не меняющие структуру (7), (15), находятся из определяющих уравнений при действии оператором $Y^{\text{экв}}=Y^0+\sigma\partial_V$ на (7), (15) и на требование $\partial V/\partial t=0$. Функция V выступает как независимая переменная. Из определяющих уравнений получаем $\sigma=(4C_3-2C_2)V-2C_4$. К базису операторов алгебры Ли L_0^0 (16) добавляются операторы

$$Y_2^{\text{экв}}=t\partial_t-2p\partial_p-2V\partial_V, \quad Y_3^{\text{экв}}=\eta\partial_\eta+\zeta\partial_\zeta+r\partial_r+z\partial_z+2p\partial_p+4V\partial_V,$$
$$Y_4^{\text{экв}}=r^{-2}\partial_p-2\partial_V, \quad Y_g^{\text{экв}}=\partial_\zeta+g(t)\partial_z-g''(t)z\partial_p, \tag{20}$$

где $g(t)$ — произвольная гладкая функция, $g(0)=1$.

Заметим, что для оператора $Y_g^{\text{экв}}$ из (20) с произвольной функцией $g(t)$, $g(0)=1$ найдется оператор $Y_5^0(g_1)$ из (16) с функцией $g_1(t)=1-g(t)$, $g_1(0)=0$. Поэтому оператор $Y_g^{\text{экв}}$ из (20) можно заменить оператором $Y_1^{\text{экв}}=Y_g^{\text{экв}}+Y_5(g_1)=\partial_\zeta+\partial_z$.

Преобразования эквивалентности, соответствующие ядру L_0^0, аналогичны преобразованиям в лемме 1. Преобразования эквивалентности, соответствующие операторам $Y_2^{\text{экв}}$, $Y_3^{\text{экв}}$, $Y_4^{\text{экв}}$, описаны в лемме 2. Оператор $Y_1^{\text{экв}}$ определяет сдвиг по переменным ζ, z. При этом группа эквивалентностей (11) сужается, а именно, нужно положить $\alpha(\eta,\zeta)\equiv\eta$, $\beta(\eta,\zeta)\equiv\zeta+a_1$. Тогда $\bar\eta=a_3\eta$, $\bar\zeta=a_3(\zeta+a_1)$, $\bar z=a_3(z+a_1)$, остальные переменные преобразуются по тому же самому закону (11). Индексы операторов соответствуют индексам групповых параметров a_1,a_2,a_3,a_4.

Нетрудно проверить, что классифицирующее уравнение (18) будет инвариантным относительно преобразований эквивалентности (19), если коэффициенты $C_2,...,C_5$ (здесь $C_5=g_1(0)$) преобразуются по закону:

$$\bar C_2=C_2a_3^{-4}a_2^{-2},\quad \bar C_4=C_4-(4C_3-2C_3)a_3^{-4}a_2^{-2}a_4,$$
$$\bar C_3=C_3a_3^{-4}a_2^{-2},\quad \bar C_5=(C_5-C_3a_1)a_3^{-3}a_2^{-2}. \tag{21}$$

□

Введем обозначения

$$Y_1^0=\partial_\zeta+\partial_z,\quad Y_2^0=t\partial_t-2p\partial_p\,,\quad Y_3^0=\eta\partial_\eta+\zeta\partial_\zeta+r\partial_r+z\partial_z+2p\partial_p\,,\quad Y_4^0=r^{-2}\partial_p\,. \tag{22}$$

Теорема 3. *Для системы уравнений (7) с учетом инвариантности начальных условий (15) имеют место следующие случаи классификации по функции начального распределения момента импульса $V(\eta,\zeta)$:*
1) если $V(\eta,\zeta)$ – произвольная функция, то базис ядра L_0^0 определяется операторами (16);
2) если $V=0$ (или $V=const$), то происходит расширение алгебры L_0^0 операторами Y_1^0,Y_2^0,Y_3^0;
3) если $V=\pm ln\eta$, то L_0^0 расширяется операторами $Y_1^0, 4Y_2^0+2Y_3^0\mp Y_4^0$;
4) если $V=\eta^\beta$, то L_0^0 расширяется операторами $Y_1^0,(4-\beta)Y_2^0+2Y_3^0$;
5) если $V=\varepsilon\zeta+F(\eta)$, то L_0^0 расширяется операторами $2Y_1^0-\varepsilon Y_4^0$;
6) если $V=\varepsilon\zeta+\eta$, то L_0^0 расширяется операторами $3Y_2^0+2Y_3^0,-\varepsilon Y_4^0+2Y_1^0$;
7) если $V=F(\eta)exp(\varepsilon\zeta)$, то L_0^0 расширяется операторами $-\varepsilon Y_2^0+2Y_1^0$;
8) если $V=(\eta\zeta)^\gamma G(\zeta/\eta)$, то L_0^0 расширяется операторами $(2-\gamma)Y_2^0+Y_3^0$;
9) если $V=\varepsilon ln|\eta\zeta|+H(\zeta/\eta)$, то L_0^0 расширяется операторами $2Y_2^0+Y_3^0-\varepsilon Y_4$,
где $g_1(t),g_2(t),F(\eta),G(\zeta/\eta),H(\zeta/\eta)$ — произвольные функции, $\gamma=\mathrm{const}$; $\beta=\mathrm{const}\neq 0$; $\varepsilon=\{0;\pm1\}$; операторы определены в (16) и (22) [3].

Доказательство. Случай, когда $V(\eta,\zeta)$ – произвольная функция, приведен в лемме 3. Согласно преобразованиям эквивалентности (19) первая классифицирующая возможность рассматривается при $V=0$ (или $V=\mathrm{const}$). Тогда из (18) следует, что $C_4=0$, а (17) определяет систему базисных операторов. Алгебра L_0^0 из (16) расширяется операторами Y_1, Y_2, Y_3 из (22).

Другая возможность возникает при $V\neq\mathrm{const}$. Классификация уравнений (7) относительно функции $V(\eta,\zeta)$ свелась к решению классифицирующего уравнения (18). Уравнение (18) решается перебором различных вариантов постоянных $C_2,C_3,C_4,g_1(0)$ с использованием преобразований эквивалентности (19) и преобразований коэффициентов (21). □

Инвариантные решения

Приведенные ниже решения являются новыми.

Пример 1. Рассмотрим оператор $\widetilde{Y}_3$ из (14). Положим $V = \eta^4$, тогда оператор $\widetilde{Y}_3 = \eta\partial_\eta + \zeta\partial_\zeta + r\partial_r + z\partial_z + 2p\partial_p$ определяет группу растяжений по всем переменным, кроме t. Базисные инварианты данного оператора $J = \left\{t, \dfrac{\eta}{\zeta}, \dfrac{r}{\eta}, \dfrac{z}{\eta}, \dfrac{p}{\eta^2}\right\}$ показывают, что инвариантное решение уравнений (7) можно искать в виде

$$r = R(t,\xi)\eta, \quad z = Z(t,\xi)\eta, \quad p = P(t,\xi)\eta^2,$$

где $\xi = \dfrac{\eta}{\zeta}$. Из $V = \eta^4$ и обозначения $V \equiv \eta^2 {v_0}^2$ найдем начальное распределение азимутальной скорости $v_0 = \eta$. Переходя к новым функциям в уравнениях (7), получаем фактор-систему

$$R\left(R_{tt} - \frac{1}{R^3}\right) + ZZ_{tt} + 2P = 0, \quad R_\xi\left(R_{tt} - \frac{1}{R^3}\right) + Z_\xi Z_{tt} + P_\xi = 0, \quad \xi^2 R\left(R_\xi Z - Z_\xi R\right) = 1.$$

Предположим, что $R_\xi = 0$, то есть $R = R(t)$, тогда

$$-\xi^2 R^2 Z_\xi = 1, \quad Z_\xi Z_{tt} + P_\xi = 0, \quad R\left(R_{tt} - \frac{1}{R^3}\right) + ZZ_{tt} + 2P = 0. \tag{23}$$

Продифференцируем последнее уравнение системы (23) по ξ и, учитывая второе уравнение, исключим P_ξ. Получим уравнение $ZZ_{tt\xi} - Z_\xi Z_{tt} = 0$, которое после умножения на $\dfrac{1}{Z^2}$ легко интегрируется $\dfrac{Z_{tt}}{Z} = \mu(t)$, $\mu(t)$ – произвольная функция. Итак,

$$Z_{tt} - \mu(t)Z = 0. \tag{24}$$

Из первого уравнения системы (23) имеем $Z_\xi = -\dfrac{1}{\xi^2}R^{-2}(t)$, тогда

$$Z = \frac{1}{\xi}R^{-2}(t) + C(t), \tag{25}$$

где $C(t)$ – произвольная функция. Подставим (25) в (24): $\left(\dfrac{1}{\xi}R^{-2} + C\right)_{tt} - \mu\left(\dfrac{1}{\xi}R^{-2} + C\right) = 0$. Так как $\mu = \mu(t), R = R(t)$, то это уравнение можно расщепить относительно переменной ξ:

$$(R^{-2})_{tt} - \mu(t)R^{-2} = 0, \quad C_{tt} - \mu(t)C = 0. \tag{26}$$

В литературе часто встречаются уравнения вида (26) при различных функциях $\mu(t)$ [4], например, уравнение Эйри с $\mu(t) = t$, уравнения с $\mu(t) = t^n$, уравнения гидродинамики для стоксовых течений и другие. Рассмотрим простейший случай, когда $\mu = -\alpha^2 < 0$. Тогда уравнения системы (26) разрешаются в виде

$$R^{-2}(t) = D_1 \sin\alpha t + D_2 \cos\alpha t, \quad C(t) = C_1 \sin\alpha t + C_2 \cos\alpha t, \quad \alpha = const, \tag{27}$$

где C_1, C_2, D_1, D_2 – произвольные постоянные. Подстановка (27) в (25) дает

$$Z(t,\xi) = \left(C_1 + \frac{D_1}{\xi}\right)\sin\alpha t + \left(C_2 + \frac{D_2}{\xi}\right)\cos\alpha t.$$

Начальные условия $r|_{t=0} = \eta,\ z|_{t=0} = \varsigma$ и представление $r = R(t)\eta,\ z = Z(t,\xi)\eta$ определяют $R(0) = 1, C(0) = 0$, следовательно, $C_2 = 0,\ D_2 = 1$.

Из последнего уравнения системы (23) находим функцию $P(t,\xi) = = \frac{1}{2}\left(-ZZ_{tt} - RR_{tt} + R^{-2}\right)$. После подстановки $R(t),\ Z(t,\xi)$ получаем

$$P(t,\xi) = \frac{\alpha^2}{2}\left(C_1 \sin\alpha t + +\frac{1}{\xi}\left(D_1 \sin\alpha t + \cos\alpha t\right)\right)^2 +$$

$$+\frac{\alpha^2}{2}\left(D_1 \sin\alpha t + \cos\alpha t\right)^2 + \frac{1}{2}\left(D_1 \sin\alpha t + \cos\alpha t\right)^{-2}.$$

Возвращаясь к исходным переменным $\xi = \dfrac{\eta}{\zeta}$, имеем решение

$$r = \eta\left(D_1 \sin\alpha t + \cos\alpha t\right)^{-1/2}, \quad z = \left(C_1\eta \sin\alpha t + \zeta\left(D_1 \sin\alpha t + \cos\alpha t\right)\right),$$

$$p = \frac{\alpha^2}{2}\left(C_1\eta \sin\alpha t + +\zeta\left(D_1 \sin\alpha t + \cos\alpha t\right)\right)^2 +$$

$$+\frac{\alpha^2\eta^2}{2}\left(D_1 \sin\alpha t + \cos\alpha t\right)^2 + \frac{\eta^2}{2}\left(D_1 \sin\alpha t + \cos\alpha t\right)^{-2}.$$

Ясно, что решение разрушается в момент, когда $(D_1 \sin\alpha t + \cos\alpha t) = 0$. Это решение "взрывного" типа.

Возьмем $\mu(t) \equiv 0$. Тогда легко увидеть, что решением уравнений (7) являются функции

$$r = \eta R = \frac{\eta}{\sqrt{D_1 t + 1}}, \quad z = \eta Z = \zeta(D_1 t+1)+C_1 t\eta, \quad p = \eta^2 P = \frac{\eta^2}{2}\left[-\frac{3}{4(D_1 t+1)^3} + D_1 t + 1\right].$$

Пример 2. В уравнениях (7) полагаем $V = \alpha\zeta + F(\eta)$, $\alpha = \text{const}$. Решение системы будем искать на операторе $\left\langle 2(\partial\eta + \partial\zeta) - \dfrac{\alpha}{r^2}\partial p\right\rangle$. Базис инвариантов данного оператора будет таким: $J = \{t,\ \eta,\ r,\ z-\zeta,\ \dfrac{\alpha}{2r^2}\zeta + p\}$. Поэтому инвариантное решение ищем в виде

$$r = R(t,\eta), \quad z = \zeta + Z(t,\eta), \quad p = P(t,\eta) - \frac{\alpha\zeta}{2R^2(t,\eta)}.$$

Требование $r = \eta,\ z = \zeta$ при $t = 0$ влечет $R(0,\eta) = \eta,\ Z(0,\eta) = 0$ при $t = 0$.

После подстановки в уравнения системы (7) приходим к фактор-системе

$$R_\eta\left(R_{tt} - \frac{F(\eta)}{R^3}\right) + Z_\eta Z_{tt} + P_\eta = 0, \quad Z_{tt} - \frac{\alpha}{2R^2} = 0, \quad RR_\eta = \eta. \tag{28}$$

Из третьего уравнения (28) находим $R = \sqrt{\eta^2 + \varphi(t)}$.
Из второго уравнения получаем

$$Z = \int\int \frac{\alpha}{2(\eta^2 + \varphi(t))} dtdt + h(\eta)t,\ Z(0,\eta) = 0.$$

Из первого уравнения определяем

$$P = -\int\left[R_\eta\left(R_{tt} - \frac{F(\eta)}{R^3}\right) + Z_\eta Z_{tt}\right] d\eta + \psi(t).$$

Здесь $\varphi(t),\ h(\eta),\ \psi(t)$ — произвольные функции.

Предположим, что $\varphi(t)=0$, тогда

$$R=\eta, \quad Z=\frac{\alpha t^2}{4\eta^2}+h(\eta)t, \quad P=\int \frac{F(\eta)}{\eta^3}-\frac{\alpha^2t^2}{16\eta^4}-\frac{\alpha t}{2}\int \frac{h'(\eta)}{\eta^2}d\eta+\psi(t).$$

В физических переменных решение выглядит так:

$$r=\eta, \quad z=\zeta+\frac{\alpha t^2}{4\eta^2}+h(\eta)t, \quad p=-\frac{\alpha\zeta}{2\eta^2}+\int \frac{F(\eta)}{\eta^3}-\frac{\alpha^2t^2}{16\eta^4}-\frac{\alpha t}{2}\int \frac{h'(\eta)}{\eta^2}d\eta+\psi(t).$$

Так как $r=\eta$, то возможна следующая интерпретация решения. Все цилиндрические поверхности все время состоят из одних и тех же частиц. Движение происходит вдоль направления z с азимутальной скоростью $v=\dfrac{1}{\eta}\sqrt{\alpha\zeta+F(\eta)}$. Цилиндрические поверхности можно считать твердой стенкой.

Пример 3. Пусть $V=\alpha\zeta+F(\eta)$, $\alpha=\mathrm{const}$, как и в примере 2. Рассмотрим двухпараметрическую подгруппу на операторах $\left\langle 2(\partial\eta+\partial\zeta)-\dfrac{\alpha}{r^2}\partial p, \quad \partial p\right\rangle$. Базис инвариантов будет таким: $J=\langle t,\ \eta,\ r,\ z-\zeta\rangle$.

Поэтому здесь возможен поиск частично инвариантного решения в виде

$$r=R(t,\eta), \quad z=\zeta+Z(t,\eta), \quad p=P(t,\eta,\zeta)$$

с требованием $R(0,\eta)=\eta,\ Z(0,\eta)=0$.

Подстановка в основные уравнения движения жидкости, так же как в примере 2, приводит к интегрируемой системе уравнений. Получается решение, обобщающее решение примера 2, оно содержит дополнительную произвольную функцию времени.

Осесимметричное движение в лагранжевых координатах

Для осесимметричных движений азимутальная компонента вектора скорости $v=0$. Пусть $\omega_1=u_z-w_r$ — единственная ненулевая компонента вектора завихренности. Положим $\omega=\omega_1/r$ и исключим из уравнений (1) давление p. В результате получим систему

$$\omega_t+u\omega_r+w\omega_z=0, \quad u_z-w_r=r\omega, \quad u_r+\frac{1}{r}u+w_z=0. \tag{29}$$

Если ввести лагранжевы координаты по формулам (5), то из первого уравнения системы (29) вытекает соотношение

$$\omega=\frac{\omega_1}{r}=\frac{\omega_{10}(\eta,\zeta)}{\eta}=\frac{1}{\eta}\left(u_{0\zeta}-w_{0\eta}\right)\equiv\omega_0(\eta,\zeta), \tag{30}$$

где u_0,w_0 — значения u,w при $t=0$. Используя закон сохранения (30), из системы (29) можно вывести два уравнения для новых неизвестных функций $r(\eta,\zeta,t),\ z(\eta,\zeta,t)$:

$$r_\eta r_{\zeta t}-r_\zeta r_{\eta t}+z_\eta z_{\zeta t}-z_\zeta z_{\eta t}=\eta\omega_0(\eta,\zeta), \quad r(r_\eta z_\zeta-r_\zeta z_\eta)=\eta. \tag{31}$$

Для уравнений (31) также ставится задача групповой классификации относительно функции $\omega_0(\eta,\zeta)$. Аналогично уравнениям вращательно-симметричного движения жидкости здесь можно сформулировать ряд утверждений группового анализа.

Теорема 4. *Для системы уравнений* (31) *с учетом инвариантности начальных условий* (15) *имеют место следующие случаи классификации по функции начального распределения завихренности* ω_0:
1) *если* $\omega_0(\eta,\zeta)$ *— произвольная функция, то базис ядра* L_0 *определяется операторами* $Z_0(n) = n(t)\partial_z, \quad n(0) = 0, \quad n(t) \in C^\infty$;
2) *если* $\omega_0 = 0$, *то базис операторов будет таким*:

$$Z_0(n),\ Z_1 = \partial_\zeta + \partial_z,\ Z_2 = \eta\partial_\eta + \zeta\partial_\zeta + r\partial_r + z\partial_z,\ Z_3(\mu) = \mu(t)\partial_t,$$

где $\mu(t) \in C^\infty$ *— произвольная функция,* $\mu(0) = 0$;
3) *если* $\omega_0 = \mathrm{const} \neq 0$ (*или* $\omega_0 = 1$), *то базис состоит из операторов*

$$Z_0(n),\ Z_1,\ Z_2 + Z_3(-t);$$

4) *если* $\omega_0(\eta,\zeta) \neq \mathrm{const}$, *то возможны два случая, расширяющие базис операторов*: *при* $\omega_0(\eta,\zeta) = \Phi(\eta)e^{\varepsilon\zeta}$ *базис операторов представим в виде*

$$Z_0(n),\ Z_1 + Z_3(\varepsilon t);$$

при $\omega_0(\eta,\zeta) = F(\eta/\zeta)(\eta\zeta)^\gamma$ *в базис включаются операторы*

$$Z_0(n),\ Z_2 + Z_3(-(2\gamma+1)t).$$

Здесь $n(t)$, $\mu(t)$, $\Phi(\eta)$, $F(\zeta/\eta)$ *— произвольные гладкие функции,* $n(0) = 0$, $\mu(0) = 0$; $\gamma = \mathrm{const}$; $\varepsilon = \{0; \pm 1\}$.

Используем результат теоремы 4 для нахождения инвариантных решений системы (31).
Пример 4. Положим $\omega_0(\eta,\zeta) = \Phi(\eta)e^{\alpha\zeta}$, где $\alpha = \mathrm{const}$. Решение уравнений ищем на операторе $Z_1 + Z_3(\alpha t) = \partial_\zeta + \partial_z + \alpha t\partial_t$. Инвариантами оператора являются функции $J = \{r, z-\zeta, \eta, te^{-\alpha\zeta}\}$. Обозначим $\lambda = te^{-\alpha\zeta}$, тогда инвариантное решение уравнений можно искать в виде

$$r = R(\eta,\lambda), \quad z = \zeta + Z(\eta,\lambda),$$

причем $R(\eta,0) = \eta, Z(\eta,0) = 0$. Последнее требование следует из начальных условий (15). Подстановка в систему (31) приводит к фактор - системе

$$\alpha\left[-R_\eta\left(R_\lambda + \lambda R_{\lambda\lambda}\right) - Z_\eta\left(Z_\lambda + \lambda Z_{\lambda\lambda}\right) + \lambda R_\lambda R_{\eta\lambda} + \lambda Z_\lambda Z_{\eta\lambda}\right] - Z_{\eta\lambda} = \eta\Phi(\eta),$$

$$R\left[R_\eta - \alpha\lambda\left(R_\eta Z_\lambda - R_\lambda Z_\eta\right)\right].$$

Уравнения все еще остаются достаточно сложными для интегрирования. Рассмотрим частный случай, когда $\alpha = 0$. Тогда $\lambda = t,\ \omega_0 = \Phi(\eta)$, уравнения упрощаются и легко интегрируются. Решение для уравнений (31) получается таким:

$$r = \sqrt{\eta^2 + \varphi(t)}, \quad z = \zeta - t\int \eta\Phi(\eta)d\eta + \chi(t),$$

где $\varphi(t), \chi(t)$ — произвольные гладкие функции, $\varphi(0) = 0,\ \chi(0) = 0$. Зная последнее, можно получить решение уравнений (2) в эйлеровых координатах для скорости и давления:

$$u = \frac{dr}{dt} = \frac{\varphi'(t)}{2r}\ , \quad v = 0, \quad w = \frac{dz}{dt} = -\int \eta\Phi(\eta)d\eta + \chi'(t), \quad \eta = \sqrt{r^2 - \varphi(t)},$$

$$p = -\chi''(t)z - \frac{\varphi'^2(t)}{4r^2} - \frac{\varphi''(t)}{2}\ln r + \psi(t),$$

$\psi(t)$ — произвольная функция.

Список литературы

[1] Л.В.Овсянников, Групповой анализ дифференциальных уравнений, М., Наука, 1978.

[2] А.А.Бучнев, Группа Ли, допускаемая уравнениями движения идеальной несжимаемой жидкости, *Динамика сплошной среды,* Новосибирск, ИГ СОАН СССР, (1971), №7, 212-214.

[3] В.К.Андреев, О.В.Капцов, В.В.Пухначев, А.А.Родионов, Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике, Новосибирск, Наука, 1994.

[4] В.Ф.Зайцев, А.Д.Полянин, Справочник: обыкновенные дифференциальные уравнения, М., Физматлит, 2001.

The Equations of the Rotationally-Symmetric Motions in Lagrangian Coordinates and the Invariant Solutions

Alexander A.Rodionov

The group properties for the systems of the equations of the rotationally-symmetric motions in Lagrangian coordinates are presented. Some new examples of the invariant solutions for these equations are considered. A physical interpretation of the solutions is given.

Keywords: group analysis, algebra Li of operators, invariant solution.