Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2009, 2(4), 449-455

О рациональности многомерных возвратных степенных рядов

Евгений К.Лейнартас*
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный 79, Красноярск, 660041,
Россия

Александр П.Ляпин†
Институт педагогики, психологии и социологии,
Сибирский федеральный университет,
Свободный 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 28.09.2009, окончательный вариант 27.10.2009, принята к печати 10.11.2009

В работе выделен класс решений многомерного разностного уравнения, для которых производящая функция рациональна.

Ключевые слова: разностные уравнения, производящая функция.

А.Муавр рассмотрел под названием возвратных рядов степенные ряды $F(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_k z^k + ...$ с коэффициентами $a_1, a_2, ..., a_k, ...$, образующими возвратные последовательности, т.е. удовлетворяющими соотношению вида

$$c_0 a_{m+p} + c_1 a_{m+p-1} + ... + c_m a_p = 0,\ p = 0, 1, 2...,$$

где c_j — некоторые постоянные. Оказалось, что такие ряды всегда изображают рациональные функции. Точнее, справедливо следующее утверждение.

Теорема (Муавр, 1722). *Степенной ряд $F(z)$ является возвратным тогда и только тогда, когда он представляет правильную рациональную функцию.*

Доказательство этого факта можно найти, например, в [1], в главе, посвященной простейшему общему классу производящих функций — рациональным функциям.

В многомерном случае ситуация значительно сложнее. Так, производящий ряд решения разностного уравнения с постоянными коэффициентами в общем случае является расходящимся. Приведем необходимые обозначения и соответствующий пример.

Обозначим $x = (x_1, ..., x_n)$ точки n-мерной целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times ... \times \mathbb{Z}$, где $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, и $A = \{\alpha\}$ — конечное подмножество точек из $\mathbb{Z}^n$. Разностным уравнением относительно неизвестной функции $f(x)$ целочисленных аргументов $x = (x_1, ..., x_n)$ с постоянными коэффициентами $c_\alpha \in \mathbb{C}$ называется соотношение вида

$$\sum_{\alpha \in A} c_\alpha f(x + \alpha) = 0. \tag{1}$$

Обозначим через $P(z) = \sum\limits_{\alpha} c_\alpha z^\alpha$ характеристический многочлен уравнения (1). Под неравенством $\alpha \leqslant m$ будем понимать систему неравенств $\alpha_j \leqslant m_j, j = 1, ..., n$.

*e-mail: lein@mail.ru
†e-mail: LyapinAP@yandex.ru
© Siberian Federal University. All rights reserved

Производящая функция (z-преобразование) функции $f(x)$ целочисленных аргументов $x \in \mathbb{Z}_+^n$ определяется следующим образом:

$$F(z) = \sum_{x \geqslant 0} \frac{f(x)}{z^{x+I}}, \qquad \text{где } I = (1, 1, ..., 1).$$

Если $f(x)$ — решение разностного уравнения (1), то его производящая функция $F(z)$ в случае $n > 1$ представляет собой, вообще говоря, расходящийся степенной ряд (см. [2]).

Пример 1. Решением разностного уравнения

$$f(x_1 + 1, x_2 + 1) - f(x_1 + 1, x_2) - f(x_1, x_2 + 1) + f(x_1, x_2) = 0$$

является функция вида $f(x_1, x_2) = \varphi(x_1) + \psi(x_2)$, где φ и ψ — произвольные функции целочисленного аргумента, а соответствующий производящий ряд будет, вообще говоря, расходящимся.

Будем рассматривать уравнения (1), для которых множество $A = \{\alpha\}$ лежит в положительном октанте $\mathbb{Z}_+^n$ целочисленной решетки и удовлетворяет условию: существует точка $m = (m_1, ..., m_n) \in A$, такая что для всех $\alpha \in A$ справедливы неравенства

$$\alpha_j \leqslant m_j, \quad j = 1, 2, ..., n. \tag{$*$}$$

Множество, на котором будем задавать "начальные данные" разностного уравнения (1), удовлетворяющего условию (*), определим следующим образом:

$$X_0 = \{\tau \in \mathbb{Z}^n : \tau \geqslant 0, \tau \ngeqslant m\},$$

где символ $\ngeqslant$ означает, что точка τ лежит в дополнении к множеству, определяемому системой неравенств $\tau_j \geqslant m_j, j = 1, ..., n$.

Сформулируем задачу Коши: найти решение $f(x)$ уравнения (1), которое на множестве X_0 совпадает с заданной функцией $\varphi(x)$:

$$f(x) = \varphi(x), \ x \in X_0. \tag{2}$$

Нетрудно показать (см., например, [3]), что если выполнено условие (*), то задача (1)–(2) имеет единственное решение. Вопрос о разрешимости задачи (1)–(2) без ограничений вида (*) рассмотрен в [4].

Отметим, что в данной работе будем рассматривать только такие решения разностного уравнения (1)*, для которых соответствующий производящий ряд сходится в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки.*

Приведем несколько формул, в которых производящая функция решения задачи (1)–(2) выражается через начальные данные.

Теорема 1. *Производящая функция $F(z)$ решения $f(x)$ задачи* (1)–(2) *удовлетворяет сле-*

дующим соотношениям:

$$P(z)F(z) = \sum_{0\leqslant\alpha\leqslant m} c_\alpha \left(\sum_{\substack{\tau\geqslant 0\\ \tau\not\geqslant\alpha}} \frac{\varphi(\tau)}{z^{\tau-\alpha+I}} \right); \tag{3}$$

$$P(z)F(z) = \sum_{\substack{\tau\leqslant m\\ \tau\not\leqslant 0}} \left(\sum_{\tau\leqslant\alpha\leqslant m} c_\alpha \varphi(\alpha-\tau) \right) z^\tau; \tag{4}$$

$$P(z)F(z) = P(z) \sum_{\substack{\tau\geqslant 0\\ \tau\not\geqslant m}} \frac{\varphi(\tau)}{z^{\tau+I}} - \sum_{\substack{\tau\geqslant 0\\ \tau\not\geqslant m}} \left(\sum_{0\leqslant\alpha\leqslant\tau} c_\alpha z^\alpha \right) \frac{\varphi(\tau)}{z^{\tau+I}}; \tag{5}$$

$$P(z)F(z) = \sum_{\substack{\tau\geqslant 0\\ \tau\not\geqslant m}} \left(\sum_{\substack{\alpha\leqslant m\\ \alpha\not\leqslant\tau}} c_\alpha z^\alpha \right) \frac{\varphi(\tau)}{z^{\tau+I}}. \tag{6}$$

Замечание 1. *В одномерном случае в правых частях всех формул* (3)–(6) *стоят конечные суммы, в частности, из формулы* (4) *следует, что произведение* $P(z)F(z)$ *является многочленом. Таким образом, производящая функция* $F(z)$ *является рациональной, что, собственно, и доказывает теорему Муавра.*

Для формулировки многомерного варианта теоремы Муавра о рациональности производящей функции решения разностного уравнения нам потребуются следующие обозначения.

Пусть $J = (j_1, ..., j_n)$, где $j_k \in \{0, 1\}$, $k = 1, ..., n$, — упорядоченный набор из нулей и единиц. Каждому такому набору сопоставим "грань целочисленного прямоугольника" $\Pi_m = \{x \in \mathbb{Z}^n : 0 \leqslant x_k \leqslant m_k, k = 1, ..., n\}$ следующим образом:

$$\Gamma_J = \{x \in \Pi_m : x_k = m_k, \text{ если } j_k = 1, \text{ и } x_k < m_k, \text{ если } j_k = 0\}.$$

Например, $\Gamma_{(1,1,...,1)} = \{m\}$, а $\Gamma_{(0,0,...,0)} = \{x \in \mathbb{Z}^n : 0 \leqslant x_k < m_k, k = 1, ..., n\}$.

Нетрудно проверить, что $\Pi_m = \bigcup\limits_J \Gamma_J$ и для различных J, J' соответствующие грани не пересекаются: $\Gamma_J \cap \Gamma_{J'} = \varnothing$.

Пусть $\Phi(z) = \sum\limits_{\substack{\tau\geqslant 0\\ \tau\not\geqslant m}} \frac{\varphi(\tau)}{z^{\tau+I}}$ – производящая функция начальных данных задачи (1)-(2) и каждой точке $\tau \in \Gamma_J$ сопоставим ряд $\Phi_{\tau,J}(z) = \sum\limits_{y\geqslant 0} \frac{\varphi(\tau+Jy)}{z^{\tau+Jy+I}}$, а грани Γ_J — ряд $\Phi_J(z) = \sum\limits_{\tau\in\Gamma_J} \Phi_{\tau,J}(z)$. Если функцию $\varphi(x)$ начальных данных продолжить на $\mathbb{Z}^n_+ \setminus X_0$ нулем, тогда производящую функцию начальных данных можно записать в виде $\Phi(z) = \sum\limits_J \Phi_J(z) = \sum\limits_J \sum\limits_{\tau\in\Gamma_J} \Phi_{\tau,J}(z)$.

Теорема 2. *Производящая функция* $F(z)$ *решения задачи* (1)-(2) *и производящая функция начальных данных* $\Phi(z)$ *связаны соотношением*

$$P(z)F(z) = \sum_J \sum_{\tau\in\Gamma_J} \Phi_{\tau,J}(z) P_\tau(z), \tag{7}$$

где многочлены $P_\tau(z)$ *имеют вид* $P_\tau(z) = \sum\limits_{\substack{\alpha \leqslant m \\ \alpha \not\leqslant \tau}} c_\alpha z^\alpha$.

Отметим, что для случая $n = 2$ теорема 2 доказана в работе [7] в связи с изучением рациональных последовательностей Риордана. Проиллюстрируем применение теоремы на примере из [8].

Пример 2. Рассмотрим последовательности из x элементов $a_1 a_2 ... a_x$, причем $a_1 = 0$ и $a_j \in \{0, 1\}$ для $2 \leqslant j \leqslant x$. Элемент последовательности a_j назовем изолированным, если он отличен от всех элементов, стоящих на соседних местах. Обозначим $r(x, y)$ число таких последовательностей, содержащих y изолированных элементов. Очевидно, что $r(x, y) = 0$, если $x < y$.

Данная последовательность является решением задачи Коши для разностного уравнения

$$r(x+2, y+1) - r(x+1, y+1) - r(x+1, y) - r(x, y+1) + r(x, y) = 0$$

с начальными данными $\varphi(0, 0) = 1, \varphi(1, 0) = 0, \varphi(x, 0) = \varphi(x-1, 0) + \varphi(x-2, 0), x \geqslant 2$, $\varphi(1, 1) = 1$, $\varphi(0, y) = 0, y \geqslant 1$ и $\varphi(1, y) = 0, y \geqslant 2$.

Используя теорему 2, построим для каждого набора J разбиение прямоугольника $\Pi_{(2,1)}$ на множества: $\Gamma_{(0,0)} = \{(0, 0), (1, 0)\}$, $\Gamma_{(0,1)} = \{(0, 1), (1, 1)\}$, $\Gamma_{(1,0)} = \{(2, 0)\}$, $\Gamma_{(1,1)} = \{(2, 1)\}$. Для каждого элемента множества Γ_J построим ряды $\Phi_{\tau,J}$ (ниже в обозначении $\Phi_{\tau,J}$ индекс J опущен для краткости записи) коэффициентами из соответствующих начальных данных и многочлены P_τ:

$$\begin{aligned}
\Phi_{0,0}(z, w) &= \frac{1}{zw}, \quad P_{0,0}(z, w) = z^2 w - zw - z - w, \\
\Phi_{1,0}(z, w) &= 0, \quad P_{1,0}(z, w) = z^2 w - zw - w, \\
\Phi_{0,1}(z, w) &= 0, \quad P_{0,1}(z, w) = z^2 w - zw - z, \\
\Phi_{1,1}(z, w) &= \frac{1}{z^2 w^2}, \quad P_{1,1}(z, w) = z^2 w, \\
\Phi_{2,0}(z, w) &= \frac{1}{zw(z^2 - z - 1)}, \quad P_{2,0}(z, w) = z^2 w - zw - w.
\end{aligned}$$

Теперь, используя формулу из теоремы 2, легко записать производящую функцию последовательности $r(x, y)$:

$$F(z, w) = \frac{z - 1}{z^2 w - zw - w - z + 1}.$$

Из теоремы 2 получается многомерный аналог теоремы Муавра.

Теорема 3. *Производящая функция* $F(z)$ *решения задачи* (1)–(2) *рациональна тогда и только тогда, когда рациональна производящая функция* $\Phi(z)$ *начальных данных.*

Приведем еще одно следствие из теоремы 2. Дискретной функцией Грина $f_{\tau_0}(x), \tau_0 \in X_0$, называется решение задачи (1)–(2) с начальными данными

$$\varphi_{\tau_0}(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x = \tau_0, \\ 0, \text{ если } x \neq \tau_0. \end{cases} \tag{8}$$

Отметим, что асимптотические свойства дискретной функции Грина играют важную роль при исследовании устойчивости линейной однородной двуслойной разностной схемы (см., например, [9]).

Предложение 1. *Производящая функция $F_{\tau_0}(z)$ дискретной функции Грина $f_{\tau_0}(x)$ задачи* (1)–(2) *рациональна и имеет вид*

$$F_{\tau_0}(z) = \left(\sum_{\substack{\alpha \leqslant m \\ \alpha \not\leqslant \tau_0}} c_\alpha z^{\alpha - \tau_0 - I} \right) / P(z).$$

Приведем доказательства сформулированных утверждений.

Доказательство теоремы 1. Умножим ряд $F(z) = \sum\limits_{x \geqslant 0} \dfrac{f(x)}{x^{x+I}}$ на характеристический многочлен $P(z) = \sum\limits_{\alpha} c_\alpha z^\alpha$ и после перегруппировки с учетом уравнения (1) получим

$$P(z)F(z) = \left(\sum_\alpha c_\alpha z^\alpha \right) \left(\sum_{x \geqslant 0} \frac{f(x)}{z^{x+I}} \right) = \sum_\alpha \left(c_\alpha \sum_{x \geqslant \alpha} \frac{f(x)}{z^{x-\alpha+I}} \right) + \sum_\alpha \left(c_\alpha z^\alpha \sum_{x \not\geqslant \alpha} \frac{f(x)}{z^{x+I}} \right) =$$

$$= \sum_\alpha \left(c_\alpha \sum_{x \geqslant 0} \frac{f(x+\alpha)}{z^{x+I}} \right) + \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha \sum_{x \not\geqslant \alpha} \frac{f(x)}{z^{x+I}} = \sum_{x \geqslant 0} \frac{P(\delta) f(x)}{z^{x+I}} + \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha \sum_{x \not\geqslant \alpha} \frac{f(x)}{z^{x+I}} =$$

$$= \sum_\alpha c_\alpha z^\alpha \sum_{x \not\geqslant \alpha} \frac{f(x)}{x^{x+I}}.$$

Формула (3) доказана. Формулы (4) и (5) получаются из формулы (3) группировкой слагаемых в правой части соответственно относительно z^τ и $\varphi(\tau)$. Формула (6) есть простое следствие формулы (5). □

Доказательство теоремы 2. Воспользуемся формулой (6):

$$P(z)F(z) = \sum_{\substack{\tau \geqslant 0 \\ \tau \not\geqslant m}} P_\tau(z) \frac{\varphi(\tau)}{z^{\tau+I}} = \sum_J \sum_{\tau \in \Gamma_J} \sum_{y \geqslant 0} P_{\tau+Jy}(z) \cdot \frac{\varphi(\tau+Jy)}{z^{\tau+Jy+I}}.$$

Из определения многочлена $P_\tau(z)$ следует, что для любого $\tau \in \Gamma_J$ и любого $y \geqslant 0$ справедливо равенство $P_{\tau+Jy}(z) = P_\tau(z)$, а используя определение $\Phi_{\tau,J}(z)$, получим

$$P(z)F(z) = \sum_J \sum_{\tau \in \Gamma_J} P_\tau(z) \Phi_{\tau,\,J}(z).$$

□

Для доказательства теоремы 3 нам потребуются следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. 1^0. *Пусть степенной ряд $\Phi(\xi) = \sum\limits_{x \geqslant 0} \varphi(x) z^x$ сходится в некоторой окрестности $U = \{\xi : |\xi_j| < \rho_j, j = 1, ..., n\}$ начала координат. Тогда для любого $\tau \in \mathbb{Z}_+^n$ и любого набора $J = \{j_1, ..., j_n\}, j_k \in \{0, 1\}$ для функции $\Phi_{\tau,J}(z) = \sum\limits_{y \geqslant 0} \varphi(\tau + Jy) z^{\tau+Jy}$ справедлива интегральная формула*

$$\Phi_{\tau,J}(z) = \frac{z^\tau}{(2\pi i)^n} \int\limits_\gamma \frac{\Phi(\xi) d\xi}{(\xi - z)^J \xi^{\tau - J + I}},$$

где $\gamma = \{\xi \in \mathbb{C}^n : |\xi_j| = R_j < \rho_j, j = 1, ..., n\}, (\xi - z)^J = (\xi_1 - z_1)^{j_1} \cdot ... \cdot (\xi_n - z_n)^{j_n}$. *Формула справедлива для таких* z, *что* $|z_j| < R_j, j = 1, ..., n$.

2^0. *Если функция* $\Phi(z)$ *рациональна, то функции* $\Phi_{\tau,J}(z)$ *также рациональны.*

Доказательство. Для доказательства интегрального представления функции разложим $\Phi_{\tau,J}(z)$ подынтегральную функцию в степенной ряд

$$\frac{\Phi(\xi)}{(\xi - z)^J} \cdot \frac{1}{\xi^{\tau - J + I}} = \sum_{x \geqslant 0} \varphi(x)\xi^x \cdot \sum_{y \geqslant 0} \frac{z^{Jy}}{\xi^{Jy}} \cdot \frac{1}{\xi^{\tau + I}},$$

сходящийся абсолютно и равномерно на множестве γ, и почленно проинтегрируем его.

Для доказательства рациональности функции $\Phi_{\tau,J}(z)$ достаточно применить к полученному выражению для функции через интеграл повторное интегрирование и воспользоваться теоремой о вычетах. Так, при интегрировании по первой переменной нужно будет найти вычеты в полюсах $\xi = 0$ и $\xi = z_1$ (если $j_1 = 1$). При этом важно, что рациональность подынтегральной функции сохраняется при каждом интегрировании. □

Замечание 2. *Утверждение* 2^0 *леммы также можно доказать, используя понятие сечения кратного степенного ряда (см. [5]) и теорему о рациональности сечения ряда, представляющего собой рациональную функцию.*

Замечание 3. *Если вместо степенного ряда* $\Phi(z) = \sum\limits_{x \geqslant 0} \varphi(x) z^x$ *рассматривать ряд Лорана* $\Phi(\xi) = \sum\limits_{x \geqslant 0} \frac{\varphi(x)}{z^{x+I}}$ *и, соответственно, функцию* $\Phi_{\tau,J}(z) = \sum\limits_{y \geqslant 0} \frac{\varphi(\tau + Jy)}{z^{\tau + Jy + I}}$, *то утверждение* 2^0 *леммы 1 о ее рациональности остается справедливым.*

Доказательство теоремы 3. Пусть производящая функция $F(z) = \sum\limits_{x \geqslant 0} \frac{f(x)}{z^{x+I}}$ решения задачи (1)–(2) для разностного уравнения рациональна и $\Phi(z) = \sum\limits_{\substack{x \geqslant 0 \\ x \ngeqslant m}} \frac{\varphi(x)}{z^{x+I}}$ — производящая функция начальных данных. В силу леммы (а точнее, замечания к ней) функция $\Phi_{m,J}(z) = \sum\limits_{x \geqslant 0} \frac{\varphi(x)}{z^{x+I}}$ рациональна (для $J = (1, ..., 1)$), но тогда $\Phi(z) = F(z) - \Phi_{m,J}(z)$ — рациональна.

Для доказательства достаточности воспользуемся теоремой 2, согласно которой для производящей функции $F(z)$ решения задачи (1)–(2) справедливо соотношение

$$P(z)F(z) = \sum_J \sum_{\tau \in \Gamma_J} \Phi_{\tau,J} P_\tau(z),$$

где $P_\tau(z)$ — многочлены. Если производящая функция $\Phi(z)$ начальных данных рациональна, то в силу леммы будут рациональными и функции $\Phi_{\tau,J}(z)$. Таким образом, производящая функция $F(z)$ решения задачи (1)–(2) рациональна. □

Доказательство предложения 1 сразу следует из формулы (6).

Первый автор поддержан грантами президента РФ НШ-2427.2008.1 и РФФИ 08-01-00844, второй автор поддержан грантом РФФИ и Государственного фонда естественных наук Китая (ГФЕН) в рамках совместного проекта "Комплексный анализ и его приложения" (проект N 08-01-92208_ГФЕН).

Список литературы

[1] Р.Стенли, Перечислительная комбинаторика, М., Мир, 1990.

[2] Е.К.Лейнартас, Кратные ряды Лорана и разностные уравнения, *Сиб. мат. журн.*, **45**(2004), №2, 387-393.

[3] Е.К.Лейнартас, Кратные ряды Лорана и фундаментальные решения линейных разностных уравнений, *Сиб. мат. журн.*, **48**(2007), №2, 335-340.

[4] M.Bousquet-Mélou, M.Petkovšek, Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case, *Discr. Math.*, **225**(2000), 51-75.

[5] L.Lipshits, D-finite power series, *J. Algebra*, **122**(1989), 353-373.

[6] Е.К.Лейнартас, М.Пассаре, А.К.Цих, Многомерные версии теоремы Пуанкаре для разностных уравнений, *Мат. сб.*, **199**(2008), №10, 87-104.

[7] А.П.Ляпин, Последовательности Риордана и двумерные разностные уравнения, *Журнал СФУ. Математика и физика*, **2**(2009), №2, 210-220.

[8] D.M.Bloom, Singles in a Sequence of Coin Tosses, *The College Mathematics Journal*, **29**(1998), 307-344.

[9] М.В.Федорюк, Асимптотика. Интегралы и ряды., М., Наука, 1987.

On the Rationality of Multidimentional Recusive Series

Evgeny K.Leinartas
Alexander P.Lyapin

In this paper we identify a class of solutions to multidimentional difference equation with rational generating function.

Keywords: difference equation, generating function.