УДК 517.55

Об асимптотике коэффициентов Лорана и ее применении в статистической механике

Дмитрий Ю.Почекутов*
Август К.Цих*
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 28.09.2009, окончательный вариант 28.10.2009, принята к печати 10.11.2009

В статье исследуется асимптотика коэффициентов ряда Лорана для мероморфных функций многих комплексных переменных. В основе исследования лежат понятия амебы для комплексной гиперповерхности и логарифмического отображения Гаусса. Ряд Лорана интерпретируется как статистическая сумма, возникающая в квантовой термодинамике. Основной результат является обобщением на векторно-энергетический спектр известного метода Дарвина-Фаулера. Доказано, что если спектр конечен и порождает решетку, то для всех усредненных энергий, взятых из выпуклой оболочки спектра, средние значения распределений ансамбля совпадают с наиболее вероятными. Выдвигается гипотеза о верности этого утверждения и для бесконечного спектра.

Ключевые слова: коэффициент Лорана, асимптотика, амеба гиперповерхности, логарифмическое отображение Гаусса, термодинамические соотношения, наиболее вероятное состояние.

Введение

Исходная идея статистической физики — получить термодинамику из механики. Например, рассматривая газ в сосуде как механическую систему, состоящую из огромного числа слабо взаимодействующих хаотически движущихся частиц, можно найти его внутренную энергию, связать среднюю кинетическую энергию частиц с температурой газа, найти давление и энтропию.

Метод Дарвина-Фаулера в статистической механике [1, 2] дает возможность привлечь к вопросам термодинамики мощные средства теорий аналитических функций и контурных интегралов. Он позволил избавиться от некоторых допущений в методе Больцмана описания распределения частиц по элементарным ячейкам фазового пространства (см. [3] или [4, с. 52]). При этом оказалось более естественным применение метода Дарвина-Фаулера в квантовой термодинамике [5].

Когда мы хотим представить себе все возможные состояния данной системы, можно либо следить за ее эволюцией во времени, либо мыслить себе ансамбль из идентичных копий нашей системы, взятых в один и тот же момент времени и представляющих все возможные ее состояния. Здесь мы следуем второй точке зрения, которая, по словам Шредингера [5], обладает внутренним изяществом и применимостью самым общим образом к любой физической системе.

*e-mail: potchekutov@gmail.com
*e-mail: tsikh@lan.krasu.ru

Итак, мы стартуем с ансамбля из N идентичных систем (или из N копий одной системы). Система предполагается квантово-механической: ее состояние определяется одним из конечного или счетного числа значений энергии

$$0 = \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \dots,$$

причем с физической точки зрения можно считать все ε_j целыми числами. Каждый такой выбор энергий из всего спектра $\{0, \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots\}$ характеризует состояние ансамбля. Требуется найти распределение ансамбля по состояниям, в которых этот ансамбль может находиться, при условии, что энергия ансамбля постоянна.

Состояния ансамбля можно классифицировать разными способами. Так, можно рассматривать задачу [5] нахождения наиболее вероятного состояния ансамбля при $N >> 1$, т.е. наиболее вероятных распределений энергий по системам, когда заданы N и суммарная энергия E ансамбля. Дарвин и Фаулер [1] предложили другой метод по описанию распределений энергий, основанный на асимптотическом описании средних значений для распределений. В данной статье рассматривается подход Дарвина-Фаулера для случая, когда энергетический спектр $\{\varepsilon_k\}$ из скалярных величин заменяется на *мультиэнергетический спектр*, т.е. последовательность $\{\varepsilon_k = (\varepsilon_k^1, \dots, \varepsilon_k^n)\}$ векторных величин $\varepsilon_k \in \mathbb{N}^n$, где n фиксировано. Аналогично скалярному случаю полагаем $\varepsilon_0 = (0, \dots, 0)$.

Для уточнения задачи введем величину

$$W(a) = W(a_0, a_1, \dots) = \frac{N!}{a_0! a_1! a_2! \dots}, \tag{1}$$

выражающую число различных состояний ансамбля, в которых уровень энергии ε_k достигается ровно в a_k системах ансамбля (мы также говорим, что a_k — *число заполнения энергии* ε_k в ансамбле). Очевидно, в (1)

$$\sum_k a_k = N, \tag{2}$$

$$\sum_k a_k \varepsilon_k = E, \tag{3}$$

где $E = (E_1, \dots, E_n)$ — энергия ансамбля, а суммы берутся по индексу k нумерации спектра $\{\varepsilon_k\}$. Набор чисел $a = (a_k)$ назовем *допустимым*, если он удовлетворяет условиям (2) и (3).

По определению, *наиболее вероятные распределения* энергий по системам ансамбля (при $N >> 1$) соответствуют тем a, которые наиболее часто встречаются, т.е. реализуют максимум

$$\max_a W(a)$$

по всем допустимым наборам a.

В поисках экстремальных наборов a в §1 выводятся основные соотношения термодинамики в мультиэнергетическом случае. Для $z = (z_1, \dots, z_n)$ вводится статистическая сумма

$$Z = Z(z, \varepsilon) = \sum_k z^{\varepsilon_k},$$

в терминах которой основные соотношения имеют вид

$$U_j = z_j \frac{Z'_{z_j}}{Z}, \; j = 1, \dots, n, \tag{4}$$

$$a_k = N\frac{z^{\varepsilon_k}}{Z}, \tag{5}$$

где $U = (U_1, \ldots, U_n) = E/N$ — средняя энергия системы ансамбля.

Определение 1. *Средним значением $\overline{a}_k$ для чисел a_k заполнения энергии ε_k называется отношение*

$$\overline{a}_k = \frac{\sum\limits_a a_k W(a)}{\sum\limits_a W(a)},$$

где суммирования ведутся по всем допустимым наборам $a = (a_k)$.

Наряду со статистической суммой удобно рассматривать ее вариации

$$f = f(z, w) = \sum_k w_k z^{\varepsilon_k}.$$

Основные результаты статьи следующие.

Теорема 1. *Предположим, что спектр $\{\varepsilon_k\}$ порождает решетку $\mathbb{Z}^n$ и точка $z = z(U) \in \mathbb{R}^n_+$ удовлетворяет системе (16). Тогда при $N \to \infty$ средние значения имеют вид*

$$\bar{a}_k \approx N \cdot \frac{z^{\varepsilon_k}}{Z}\bigg|_{z=z(U)},$$

они совпадают с наиболее вероятными значениями a_k.

Вопрос о допустимых значениях средних энергий U, т.е. обеспечивающих существование решения $z(U) \in \mathbb{R}^n_+$ для системы (4), частично решается теоремой 2.

Обозначим через $\mathcal{N}$ внутренность выпуклой оболочки в $\mathbb{R}^n$ последовательности $\{\varepsilon_k\} \subset \mathbb{N}^n \subset \mathbb{R}^n$.

Теорема 2. *Если спектр $\{\varepsilon_k\}$ порождает решетку $\mathbb{Z}^n$ и конечен, то для всякого $U \in \mathcal{N}$ система (4) имеет решение $z = z(U)$ в $\mathbb{R}^n_+$, причем единственное.*

Гипотеза 1. *Теорема 2 верна и для бесконечного спектра $\{\varepsilon_k\}$.*

Прототипом условия "$\{\varepsilon_k\}$ порождает решетку $\mathbb{Z}^n$" в оригинальном (скалярном) результате Дарвина-Фаулера является то, что числа ε_k взаимно просты. Вопрос о допустимых средних энергиях U у Дарвина и Фаулера (а также в последующих работах [3–6]) не изучался. Видимо, впервые он был рассмотрен в ([8], п. 4.5.1), где было замечено, что если статистическая сумма является полиномом степени d, то допустимые средние энергии надо брать из интервала $0 < U < d$, т.е. из внутренности $\mathcal{N}$ выпуклой оболочки чисел $0 = \varepsilon_0 < \varepsilon_1 < \ldots < \varepsilon_k = d$.

1. Основные соотношения термодинамики и наиболее вероятные распределения

Найдем основные соотношения термодинамики в мультиэнергетическом случае. Наши рассуждения почти дословно повторяют изложение для скалярного случая в [5].

Поскольку величины $W(a)$ и $\log W(a)$ имеют одни и те же экстремальные точки a (логарифм строго возрастает), будем рассматривать задачу об отыскании максимума для функции $\log W(a)$ с ограничениями (2), (3). По методу Лагранжа надо искать абсолютный максимум выражения

$$\widetilde{W} = \log W - \lambda \sum_k a_k - \sum_k a_k \langle \mu, \varepsilon_k \rangle, \tag{6}$$

где $\mu = (\mu_1, \ldots, \mu_n)$ — вектор из множителей Лагранжа μ_i, отвечающих покоординатным связям (3) между переменными a_k. Будем пользоваться формулой Стирлинга $s! \approx \sqrt{2\pi s} s^s e^{-s}$ при $s \to \infty$, согласно которой

$$\log s! \approx \frac{1}{2}(\log 2\pi + \log s + s \log s - s) \approx s(\log s - 1).$$

Следовательно,

$$\log W \approx \log N! - \sum_k \log a_k! = \log N! - \sum_k a_k(\log a_k - 1).$$

Дифференциал выражения (6) равен

$$d\widetilde{W} = -\sum_k [(\log a_k - 1) + 1]\, da_k - \lambda \sum_k da_k - \sum_k \langle \mu, \varepsilon_k \rangle\, da_k,$$

и $d\widetilde{W} = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\log a_k + \lambda + \langle \mu, \varepsilon_k \rangle = 0.$$

Отсюда

$$a_k = e^{-\lambda - \langle \mu, \varepsilon_k \rangle},$$

где λ и μ должны удовлетворять добавочным условиям (в соответствии с (2) и (3)):

$$\sum_k e^{-\lambda - \langle \mu, \varepsilon_k \rangle} = N, \quad \sum_k \varepsilon_k e^{-\lambda - \langle \mu, \varepsilon_k \rangle} = E.$$

Делением второго (векторного) равенства на первое (скалярное) получаем *основные соотношения термодинамики для мультиэнергетического спектра* $\{\varepsilon_k\}$:

$$\frac{E}{N} = \frac{\sum_k \varepsilon_k e^{-\langle \mu, \varepsilon_k \rangle}}{\sum_k e^{-\langle \mu, \varepsilon_k \rangle}} = -\nabla_\mu \log Z(\mu, \varepsilon),\ a_k = \frac{N}{Z} e^{-\langle \mu, \varepsilon_k \rangle},$$

где

$$Z(\mu, \varepsilon) = \sum_k e^{-\langle \mu, \varepsilon_k \rangle}$$

— *статистическая сумма*, а $\nabla_\mu = \left(\frac{\partial}{\partial \mu_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial \mu_n}\right)$ — градиент. Величина $\frac{E}{N}$ — *средняя энергия ансамбля*, обозначим ее через $U = (U_1, \ldots, U_n)$.

При замене $z_j = e^{-\mu_j}$, статистическая сумма превращается в ряд

$$Z(z, \varepsilon) = \sum_k z^{\varepsilon_k}, \tag{7}$$

а оператор $\dfrac{\partial}{\partial \mu_j}$ переходит в $z_j \dfrac{\partial}{\partial z_j}$, поэтому основные соотношения термодинамики приобретают вид (4) и (5). Эти соотношения интерпретируются следующим образом: *значения* *заполнений a_k, вычисленные по формуле (5) в решениях $z = z(U) = z(U, \varepsilon)$ системы уравнений (4), являются координатами критических точек для функции $W(a)$; в частности, наиболее вероятные распределения $a = (a_k)$ (реализующие максимум для $W(a)$) вычисляются по указанной формуле для подходящих решений $z(U)$.*

2. Суммарное число состояний и формула для средних $\overline{a}_k$

Напомним, что средним значением $\overline{a}_k$ для чисел a_k заполнения энергии ε_k называется отношение

$$\overline{a}_k = \frac{\sum\limits_a a_k W(a)}{\sum\limits_a W(a)},$$

где суммирования ведутся по всем допустимым наборам $a = (a_k)$. Нам потребуется вспомогательная формула для средних $\overline{a}_k$, для чего введем в рассмотрение сумму

$$\sum_a W(a, \omega) = \sum_a \frac{N!}{a_0!a_1! \ldots a_k! \ldots} \omega_0^{a_0} \omega_1^{a_1} \ldots \omega_k^{a_k} \ldots, \tag{8}$$

где суммирование ведется по всем допустимым наборам $a = (a_k)$, а ω_j — вещественные параметры, каждый из которых меняется в некоторой окрестности единицы. Отметим, что $W(a, I) = W(a)$, где $I = (1, 1, \ldots)$ — вектор из единиц, поэтому при $\omega = I$ (8) выражает *суммарное число состояний ансамбля.*

В силу того, что

$$\frac{\partial}{\partial \omega_k} \ln \sum_a W(a, \omega) = \frac{1}{\sum\limits_a W(a, \omega)} \sum_a a_k \frac{N!}{a_0! \ldots a_k! \ldots} \omega_0^{a_0} \ldots \omega_{k-1}^{a_{k-1}} \omega_k^{a_k - 1} \omega_{k+1}^{a_{k+1}} \ldots,$$

мы можем переписать среднее значение $\overline{a}_k$ для числа заполнения энергии ε_k в виде

$$\overline{a}_k = \omega_k \frac{\partial}{\partial \omega_k} \ln \sum_a W(a, \omega) \bigg|_{\omega = I}. \tag{9}$$

Чтобы эффективно работать с формулой (9), найдем интерпретацию для суммы (8). Для этого рассмотрим степенной ряд

$$f(z) = f(z, \omega) = \sum_k \omega_k z^{\varepsilon_k} = \sum_k \omega_k z_1^{\varepsilon_k^1} \cdot \ldots \cdot z_n^{\varepsilon_k^n}$$

с переменными коэффициентами ω_k (в случае $\omega = I$ ряд $f(z)$ совпадает со статистической суммой). Его N-я степень $f^N(z)$ равна

$$\sum_{a_0 + a_1 + \ldots = N} W(a) \left[(\omega_0 z^{\varepsilon_0})^{a_0} (\omega_1 z^{\varepsilon_1})^{a_1} \cdot \ldots \right] = \sum_{a_0 + a_1 + \ldots = N} W(a, \omega) z^{a_0 \cdot \varepsilon_0 + a_1 \cdot \varepsilon_1 + \ldots}.$$

Приводя подобные в последней сумме, получим

$$f^N(z) = \sum_E \left(\sum_{\substack{a_0 + a_1 + \ldots = N \\ a_0 \varepsilon_0 + a_1 \varepsilon_1 + \ldots = E}} W(a, \omega) \right) z^E.$$

Итак, рассматриваемая сумма (8) есть коэффициент степенного ряда $f^N(z)$ при мономе $z^E = z_1^{E_1} \cdot \ldots \cdot z_n^{E_n}$. Следовательно, для него справедливо интегральное представление

$$\sum_a W(a,\omega) = \frac{1}{(2\pi\imath)^n} \int\limits_{T_r} f^N(z) z^{-E} \bigwedge_1^n \frac{dz_j}{z_j}, \tag{10}$$

где $T_r = \{|z_1| = r_1, \ldots, |z_n| = r_n\}$, причем r_j выбраны настолько малыми, что ряд $f(z)$ сходится на T_r (по условию $0 < \omega_j < 1+\delta$, поэтому область сходимости этого ряда непустая и содержит начало координат $z = 0$).

3. Доказательство теоремы 1: асимптотическая формула для суммарного числа состояний

Интеграл (10) будем изучать в ситуации, когда N и E стремятся к бесконечности при фиксированной целочисленной средней энергии $U = E/N$. Интеграл в таком случае приобретает вид осциллирующего:

$$\sum_a W(a,\omega) = \frac{1}{(2\pi\imath)^n} \int\limits_{T_r} \left(f(z) z^{-U}\right)^N \bigwedge_1^n \frac{dz_j}{z_j} \tag{11}$$

с фазой $\varphi(z) = \ln f(z) - \langle U, \ln z\rangle$ и параметром N, где $\ln z = (\ln z_1, \ldots, \ln z_n)$.

Зафиксируем вектор средней энергии U в соответствии с условием теоремы 1, т.е. такой, для которого система (16) имеет решение $z_* = z(U)$ в $\mathbb{R}^n_+$. Леммы 2 и 1 гарантируют, что точка z_* является точкой перевала: $\nabla_z \varphi(z_*) = 0$, причем такая точка единственная на соответствующем торе T_r. Если спектр энергий $\{\varepsilon_k\}$ порождает решетку $\mathbb{Z}^n$, то по лемме 4 z_* — невырожденная точка перевала. Поэтому согласно [8, п. 5.1.3, теорема 1.1] для суммарного числа состояний справедливо следующее асимптотическое равенство при $N \to \infty$:

$$\sum_a W(a,\omega) \approx \frac{1}{\prod\limits_1^n z_{*j}} \exp(N \cdot \varphi(z_*)) \frac{1}{\sqrt{(2\pi N)^n} \sqrt{-\mathrm{Hess}\ \varphi(z_*)}},$$

где $\mathrm{Hess}\ \varphi = \det\left(\dfrac{\partial^2 \varphi}{\partial z_i z_j}\right)$ — гессиан функции φ. Выбор ветви для корня гессиана не поясняем, поскольку в нашем исследовании это не будет иметь значения. Из этого асимптотического равенства находим, что при

$$\ln \sum_a W(a,\omega) \approx -N\,\langle U, \ln z_*\rangle + N \ln f(z_*) - \frac{n}{2} \ln 2\pi N + \mathrm{const},$$

где сумма последних двух слагаемых есть $O(\ln N)$ при $N \to \infty$.

Отсюда дифференцированием по ω_k получаем

$$\frac{\partial}{\partial \omega_k} \ln \sum_a W(a,\omega) \approx N \cdot \left[-\left\langle \frac{U}{z_*}, \nabla_\omega z_* \right\rangle + \frac{z_*^{\varepsilon_k}}{f(z_*)} + \left\langle \frac{\nabla_z f}{f}(z_*), \nabla_\omega z_* \right\rangle \right],$$

где U/z_* — результат покоординатного деления векторов. Перейдем к пределу при $\omega \to I$. При этом $f \to Z$, а положительное решение $z_* = z(U)$ системы (16) устремится к такому решению системы (4). Тогда ввиду (9) справедлива асимптотическая оценка для средних

$$\overline{a}_k \approx N\,\langle \nabla_z \varphi(z_*), \nabla_\omega z_* \rangle|_{\omega = I} + N \frac{z^{\varepsilon_k}(U)}{Z(z(U))}.$$

Поскольку $\nabla_z \varphi(z_*) = 0$, получаем искомую асимптотику

$$\overline{a}_k \approx N \left. \frac{z^{\varepsilon_k}}{Z} \right|_{z=z(U)}.$$

Теорема 1 доказана.

4. Доказательство теоремы 2: допустимые значения средних энергий

Для доказательства теоремы 2 воспользуемся еще одной интерпретацией суммарного числа состояний. А именно, $\sum\limits_a W(a,\omega)$ является коэффициентом $C_{E,-N}$ разложения в ряд Лорана мероморфной фукнции $F(z,w) = w/(w-f(z))$ в области $|w| > |f(z)|$:

$$\frac{w}{w-f(z)} = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{f^N}{w^N} = \sum_N \sum_E C_{E,-N} z^E w^{-N}. \tag{12}$$

Действительно, для такого коэффициента справедливо интегральное представление

$$C_{E,-N} = \frac{1}{(2\pi\imath)^{n+1}} \int\limits_{T_r \times C} \frac{w}{w-f(z)} z^{-E} w^N \bigwedge_1^n \frac{dz_j}{z_j} \wedge \frac{dw}{w},$$

где C — окружность $|w| = R$, причем R больше, чем максимальное значение $|f(z)|$ на T_r. Интегрируя в последнем интеграле по w, немедленно получаем (10).

Таким образом, задача об асимптотике суммы $\sum\limits_a W(a,\omega)$ равносильна задаче описания асимптотического поведения коэффициента Лорана $C_{E,-N}$ функции $n+1$ переменных при $E = U \cdot N,\ N \to \infty$, где $U = (U_1, \ldots, U_n)$ — вектор средних энергий.

Пусть спектр энергий $\{\varepsilon_k\} \subset \mathbb{N}^n$ является конечным, тогда ряд $f(z) = \sum\limits_k \omega_k z^{\varepsilon_k}$ — полином. Для описания множества допустимых средних энергий U нам понадобится понятие амебы.

Определение 2 ([9], п. 6.1)**.** *Амебой $\mathcal{A}_V$ алгебраической гиперповерхности*

$$V = \{z \in (\mathbb{C} \setminus 0)^n : Q(z) = 0\}$$

(или полинома Q) называется образ V при отображении $\mathrm{Log} : (\mathbb{C}\setminus 0)^n \to \mathbb{R}^n$*, определенном формулой*

$$\mathrm{Log} : (z_1, \ldots, z_n) \to (\log|z_1|, \ldots, \log|z_n|).$$

Обозначим через $N(Q)$ многогранник Ньютона полинома Q, т.е. выпуклую оболочку в $\mathbb{R}^n$ всех показателей мономов, участвующих в полиноме Q. Известно [10], что на множестве связных компонент $\{E\}$ дополнения $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$ существует инъективная функция порядка

$$\nu : \{E\} \to \mathbb{Z}^n \cap N(Q),$$

такая, что двойственный конус $C^\vee_{\nu(E)}$ к многограннику Ньютона в точке $\nu(E)$ есть конус рецессии компоненты E (напомним, что конус рецессии выпуклого множества E — это наибольший конус, который некоторым сдвигом можно поместить в E). Таким образом, дополнение $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$ состоит из конечного числа связных выпуклых компонент, которые можно перечислять (кодировать) в виде E_ν с помощью целочисленных векторов $\nu \in N(Q)$. Имеется взаимнооднозначное соответствие между связными компонентами $\{E_\nu\}$ дополнения $\mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}_V$ и разложениями Лорана (с центром в нуле) несократимой дроби $F(z) = P(z)/Q(z)$ (см. [9], п. 6.1).

Мы будем рассматривать амебу полинома $Q = w - f(z)$, полярного для функции (12). Таким образом, гиперповерхность $V = \{Q = 0\}$ есть не что иное, как график в $\mathbb{C}^{n+1}$ полинома $f(z)$.

Точки $(r, f(r))$, где $r \in \mathbb{R}^n_+$ — решение системы (16), в силу леммы 1 при логарифмическом проектировании переходят в $\partial E_{0,\dots,0,1}$ — границу компоненты дополнения амебы $E_{0,\dots,0,1}$. Такая компонента является открытым выпуклым в $\mathbb{R}^{n+1}$ множеством, ее конус рецессии является двойственным конусом $C^\vee_\nu$ к многограннику Ньютона полинома $w - f(z)$ в вершине $\nu = (0, \dots, 0, 1)$ (см. [10]). Напомним, что $\varepsilon_0 = 0$, поэтому многогранник Ньютона имеет ν в качестве вершины. Как будет отмечено при доказательстве леммы 2 п. 4, точка $(r, f(r))$ является точкой касания логарифмических образов графика Γ_f и уровня монома $z^{-U}w$, который в логарифмической шкале представляет собой гиперплоскость с нормальным вектором $(-U, 1)$. Все такие нормали содержатся в многогранном угле, образованном продолжениями сходящихся в вершине ν ребер многогранника Ньютона, т.е $q = (-U, 1)$, где $U \in \mathcal{N}$.

Тем самым мы доказали теорему 2.

5. Вспомогательные утверждения

Будем рассматривать ряд Лорана

$$f(z) = \sum_{\alpha \in S \subset \mathbb{Z}^n} \omega_\alpha z^\alpha,$$

где свободный член ω_0 не равен нулю, и все входящие в него коэффициенты ω_α положительны. Множество S может быть конечным.

Лемма 1. *Пусть $f(z)$ сходится на вещественном торе*

$$T_r = \{|z_1| = r_1, \dots, |z_n| = r_n\}.$$

Тогда максимум $|f(z)|$ достигается в точке $z = r$:

$$\max_{T_r} |f(z)| = f(r). \tag{13}$$

Значение $z = r$ является единственной точкой максимума на T_r, если S порождает решетку $\mathbb{Z}^n$.

Доказательство. Пусть $z_l = r_l e^{\imath\varphi_l}$, $\varphi_l \in [0, 2\pi)$. Поскольку все $\omega_\alpha > 0$, имеем

$$|f(z)| = \left| \sum_{\alpha \in S} \omega_\alpha r^\alpha e^{\imath\langle \alpha, \varphi \rangle} \right| \leqslant \sum_{\alpha \in S} \omega_\alpha r^\alpha. \tag{14}$$

Таким образом, (13) выполняется.

Предположим, что кроме $z = r$ есть другая точка $z = re^{\imath\varphi}$, $0 \neq \varphi \in [0, 2\pi)^n$, в которой (14) превращается в равенство. Тогда

$$\langle \alpha, \varphi \rangle = 2\pi s_\alpha, s_\alpha \in \mathbb{Z} \; \forall \; \alpha \in S. \tag{15}$$

Выберем в S какой-либо набор $\alpha^1, \ldots, \alpha^n$ из n линейно независимых векторов. Тогда, в соответствии с (15) и правилом Крамера, φ можно представить в виде $\varphi = 2\pi q$ с некоторым ненулевым рациональным $q \in [0, 1)^n$. Тем самым по (15) опять получаем, что

$$\langle \alpha, q \rangle \in \mathbb{Z} \; \forall \alpha \in S.$$

Если S порождает решетку $\mathbb{Z}^n$, то для всех базисных векторов e_j также должно быть $\langle e_j, q \rangle \in \mathbb{Z}$, что противоречит свойству $q \in [0, 1)^n$. □

Лемма 2. *Предположим, что носитель S ряда f лежит в $\mathbb{N}^n$ и порождает целочисленную решетку $\mathbb{Z}^n$, а сам ряд имеет непустую область сходимости $\mathcal{G}$. Пусть $|\mathcal{G}|$ – изображние $\mathcal{G}$ на диаграмме Рейнхардта. Тогда минимум $\min\limits_{r \in \mathbb{R}^n_+ \cap |\mathcal{G}|} f(r) r^{-U}$ достигается в единственной точке $r = r(U) \in \mathbb{R}^n_+ \cap |\mathcal{G}|$, которая удовлетворяет системе уравнений*

$$r_j \frac{f'_j}{f} = U_j, \; j = 1, \ldots, n. \tag{16}$$

Доказательство. Будучи областью сходимости степенного ряда с неотрицательными показателями, $\mathcal{G}$ является полной, n-круговой и логарифмически выпуклой областью. Согласно лемме 1 значение $f(r)$ выражает максимум модуля функции f на торе T_r :

$$f(r) = \max_{T_r} |f(z)|.$$

Следовательно, (см. [7], §11.6 и §10.5) функция $f(r)$ выпукла относительно координат $\ln r = (\ln r_1, \ldots, \ln r_n)$ в области $\mathbb{R}^n_+ \cap |\mathcal{G}|$.

Отметим, что в логарифмической шкале

$$(\ln |z_1|, \ldots, \ln |z_n|, \ln |w|) = (\ln r_1, \ldots, \ln r_n, \ln R)$$

уровень монома $wz^{-U} = t$ представляет собой гиперплоскость с нормальным вектором $(-U_1, \ldots, -U_n, 1)$. Функция $g(r) = f(r) r^{-U}$ есть сужение монома wz^{-U} на график $\Gamma_f = \{(r, f(r))\}$. Она достигает минимума в точке $r = r(U)$, где логарифмический образ $\ln f(r) - \langle U, \ln r \rangle = \ln t$ указанного уровня монома касается графика Γ_f. В силу строгой выпуклости $f(r)$ такая точка будет единственной.

Вычисляя частные производные функции $g(r)$ и приравнивая их нулю, получим, что точка минимума $r = r(U)$ удовлетворяет системе (16). □

Для дальнейшего повествования нам понадобится слегка усиленное утверждение о биголоморфности ростка голоморфного инъективного отображения ([11], п. 9): *если росток $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ голоморфен и биективен, то он биголоморфен.*

Лемма 3. *Если росток отображения $f : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ голоморфен и для каждого $w \in \mathbb{R}^n \cap U_0$, где $U_0 \subset \mathbb{C}^n$ – достаточно малая окрестность нуля, прообраз $f^{-1}(w)$ состоит ровно из одной точки, то f биголоморфен, и поэтому $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0) \neq 0$.*

Доказательство. По формуле логарифмического вычета ([12], п. 1.4) координата $z_j(w)$ для прообраза $f^{-1}(w)$ точки $w \in \mathbb{R}^n \cap U_0$ выражается интегралом

$$z_j(w) = \frac{1}{(2\pi\imath)^n} \int\limits_{\Gamma} z_j \frac{df_1}{f_1 - w_1} \wedge \ldots \wedge \frac{df_n}{f_n - w_n},\ j = 1, \ldots, n,$$

где Γ — остов $\{z \in U_0 : |f_1(z)| = r_1, \ldots, |f_n(z)| = r_n\}$. Этот интеграл определен не только для вещественных w, но и для всех w из поликруга $\{|w_1| < r_1, \ldots, |w_n| < r_n\}$. Он голоморфен по w, как интеграл по компакту с голоморфным параметром. Из того, что $\dfrac{\partial f}{\partial z}\dfrac{\partial f^{-1}}{\partial z} \equiv 1$, следует $\dfrac{\partial f}{\partial z}(0) \neq 0$. □

Напомним, что для всякой комплексной гиперповерхности $V = \{Q(z) = 0\}$ логарифмическое отображение Гаусса $\gamma : \mathrm{reg}\, V \to \mathbb{CP}^{n-1}$ определяется по формуле [13]:

$$(z_1, \ldots, z_n) \mapsto \left(z_1 \frac{\partial Q}{\partial z_1} : \ldots : z_n \frac{\partial Q}{\partial z_n} \right).$$

Мы будем применять понятие логарифмического отображения Гаусса к графику функции f, т.е. к комплексной гиперповерхности $\{(z, w) : w = f(z)\}$ в $\mathbb{C}^{n+1}$. Переменная $z \in \mathbb{C}^n$ является локальной координатой на графике Γ_f.

Лемма 4. *Точка $r \in \mathbb{R}^n_+$, удовлетворяющая системе (16), является морсовской точкой для фазы*

$$\varphi(z) = \ln f(z) - \langle U, \ln z \rangle \tag{17}$$

осциллирующего интеграла (11).

Доказательство. Докажем вначале, что якобиан $\dfrac{\partial \gamma}{\partial z}$ логарифмического отображения Гаусса $\gamma : \Gamma_f \to \mathbb{CP}^n$ удовлетворяет свойству

$$\left. \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right|_{z = \gamma^{-1}(q)} \neq 0 \iff \mathrm{Hess}\, \varphi|_{z = \gamma^{-1}(q)} \neq 0. \tag{18}$$

Введем в рассмотрение определитель

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{f_{z_1}}{f_{z_1}} + \frac{1}{z_1} & \frac{f_{z_1 z_2}}{f_{z_1}} & \ldots & \frac{f_{z_1 z_n}}{f_{z_1}} \\ \frac{f_{z_2 z_1}}{f_{z_2}} & \frac{f_{z_2 z_2}}{f_{z_2}} + \frac{1}{z_2} & \ldots & \frac{f_{z_2 z_n}}{f_{z_2}} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{f_{z_n z_1}}{f_{z_n}} & \frac{f_{z_n z_2}}{f_{z_n}} & \ldots & \frac{f_{z_n z_n}}{f_{z_n}} + \frac{1}{z_n} \end{vmatrix}.$$

Простым вычислением якобиана логарифмического отображения и указанного выше гессиана с последующим сужением полученных выражений для них на $z = \gamma^{-1}(q)$ показывается, что

$$\left. \frac{\partial \gamma}{\partial z} \right|_{z = \gamma^{-1}(q)} = q_1 \cdot \ldots \cdot q_n f^n \left. \Delta \right|_{z = \gamma^{-1}(q)}, \quad \mathrm{Hess}\, \varphi|_{z = \gamma^{-1}(q)} = \frac{q_1^n \cdot \ldots \cdot q_n^n}{z_1^n \cdot \ldots \cdot z_n^n} \left. \Delta \right|_{z = \gamma^{-1}(q)}.$$

Следовательно, якобиан и гессиан не обращаются в нуль одновременно.

Система (16) при вещественных U локально имеет единственное вещественное решение. Отсюда следует локальная инъективность отображения γ^{-1}, обратного к логарифмическому отображению Гаусса γ. Тогда согласно лемме 3 якобиан $\left. \dfrac{\partial \gamma}{\partial z} \right|_{\gamma^{-1}(U, -1)} \neq 0$. В силу (18) получаем утверждение леммы. □

Авторы поддержаны грантом президента РФ НШ-2427.2008.1, грантом РФФИ 09-01-00762, а также грантом Сибирского федерального университета.

Список литературы

[1] C.G.Darwin, R.H.Fowler, On the partition of energy, *Phil. Mag.*, **44**(1922), 450-479.

[2] C.G.Darwin, R.H.Fowler, On the partition of energy — Part II Statistical principles and thermodynamics, *Phil. Mag.*, **44**(1922), 823-842.

[3] R.H.Fowler, Statistical Mechanics, Cambridge, 1929.

[4] M.Born, Natural philosophy of cause and chance, Oxford, 1949.

[5] E.Shrödinger, Statistical thermodynamics, Cambridge, 1948.

[6] В.А.Зорич, Математический анализ задач естествознания, М., МЦНМО, 2008.

[7] В.С.Владимиров, Методы теории функций многих комплексных переменных, М., Наука, 1964.

[8] М.В.Федорюк, Асимптотика: интегралы и ряды, М., Наука, 1987.

[9] I.Gelfand, M.Kapranov, A.Zelevinsky, Discriminants, Resultants and Multidimentional Determinants, Boston, Bikhäuser, 1994.

[10] M.Forsberg, M.Passare, A.Tsikh, Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas, *Adv. in Math.*, **151**(2000), 45-70.

[11] Б.В.Шабат, Введение в комплексный анализ, т. 2, М., Наука, 1985.

[12] Л.А.Айзенберг, А.П.Южаков, Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе, Новосибирск, Наука, 1979.

[13] M.Passare, A.K.Tsikh, Amoebas: their spines and their contours, *Contemporary Math.*, **377**(2005), 275-288.

On the Asymptotics of Laurent Coefficients and its Application in Statistical Mechanics

Dmitry Yu.Pochekutov
Avgust K.Tsikh

We study asymptotics of the Laurent coefficients for meromorphic functions of several complex variables. We employ notions of complex hypersurface amoeba and logarithmic Gauss map. The main result of this note is the generalization of the Darwin-Fowler method for the vector energy spectrum case.

Keywords: Laurent coefficient, asymptotics, amoeba of hypersurface, logarithmic Gauss map, most probable state.