Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2009, 2(4), 410-425

УДК 517.54+537.2

Характеристические мультиполи эллипса и решение задачи о проводящем эллипсе во внешних электрических полях

Владимир П.Казанцев
Евгений Н.Шляхтич*
Институт инженерной физики и радиоэлектроники,
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 08.09.2009, окончательный вариант 25.10.2009, принята к печати 10.11.2009

Получено и представлено в комплексных переменных решение задачи о проводящем эллипсе во внешних электрических полях с помощью аппарата характеристических мультиполей. Рассмотрены как общая схема решения задачи так и конкретные примеры. Построены комплексные функции Грина для внешней и внутренней областей эллипса. Показана возможность ввести понятия "мнимый заряд" и "эллипс сходимости" ряда.

Ключевые слова: комплексная функция Грина, характеристические мультиполи, проводящий эллипс, эллипс сходимости, мнимый заряд, электростатика.

1. Характеристические мультиполи эллипса

Для решения электростатических задач о проводящем эллипсе наиболее удобо, на наш взгляд, применение аппарата характеристических мультиполей.

Впервые понятие о характеристических мультиполях проводников было введено в работе [1]. В работах [2, 3] оно получило свое развитие для электростатики на плоскости и в пространстве.

Характеристическими мультиполями эллипса будем называть базисные распределения плотностей зарядов по поверхности проводящего эллипса. Вначале рассмотрим некоторые общие соотношения, необходимые для решения задачи о проводящем эллипсе во внешнем электрическом поле.

Функция

$$G(z) = \frac{1}{2}\Big(z + \sqrt{z^2 - c^2}\Big)$$

конформно отображает внешнюю к эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \;\; c = \sqrt{a^2 - b^2}$$

область на область, внешнюю к окружности комплексной плоскости G:

$$|G(z)| = A = \frac{a+b}{2}.$$

*e-mail: Shlyahtich2005@yandex.ru

Базисные комплексные потенциалы, соответствующие единичным значениям компонент мультипольных моментов минимальных порядков поляризационных зарядов эллипса, могут быть выражены через $G(z)$:

$$\Pi_{kr}(z) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o k}\begin{cases} \dfrac{1}{G^k(z)} & \text{при} \quad z \in |G(z)| > A \\ \dfrac{c^k}{2^{k-1}\Big(A^{2k} + (c/2)^{2k}\Big)}T_k(z/c) & \text{при} \quad z \in |G(z)| < A \end{cases};$$

$$\Pi_{ki}(z) = \frac{i}{2\pi\varepsilon_o k}\begin{cases} \dfrac{1}{G^k(z)} & \text{при} \quad z \in |G(z)| > A \\ -\dfrac{c^k}{2^{k-1}\Big(A^{2k} - (c/2)^{2k}\Big)}T_k(z/c) & \text{при} \quad z \in |G(z)| < A \end{cases}. \tag{1}$$

Заметим, что

$$T_k(z/c) = \frac{2^{k-1}}{c^k}\left(G^k(z) + \left(\frac{c^2}{4G(z)}\right)^k\right) \tag{2}$$

— это многочлен Чебышева первого рода.

Источниками комплексных потенциалов (1) служат заряды, распределенные по эллипсу с плотностями

$$\sigma_{kr} = \frac{A^k}{\pi(A^{2k} + (c/2)^{2k})}\frac{\cos(k\alpha)}{\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}};$$
$$\sigma_{ki} = \frac{A^k}{\pi(A^{2k} - (c/2)^{2k})}\frac{\sin(k\alpha)}{\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}}; \tag{3}$$

где $\alpha = \arg G(z)$.

Приведем выражения для базисных электрических полей:

$$E^*_{kr}(z) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{z^2 - c^2}G^k(z)} & \text{при} \quad z \in |G(z)| > A \\ -\dfrac{c^{k-1}}{2^{k-1}k\Big(A^{2k} + (c/2)^{2k}\Big)}T'_k(z/c) & \text{при} \quad z \in |G(z)| < A \end{cases};$$

$$E^*_{ki}(z) = \frac{i}{2\pi\varepsilon_o}\begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{z^2 - c^2}G^k(z)} & \text{при} \quad z \in |G(z)| > A \\ \dfrac{c^{k-1}}{2^{k-1}k\Big(A^{2k} - (c/2)^{2k}\Big)}T'_k(z/c) & \text{при} \quad z \in |G(z)| < A \end{cases}. \tag{4}$$

$E^*_{kr}(z)$ и $E^*_{ki}(z)$, как видно из соотношений (4), могут быть аналитически продолжены из области $|G(z)| > A$ внутрь эллипса вплоть до отрезка оси абсцисс, соединяющего фокусы эллипса. Рассматривая эти аналитические продолжения как электрические поля, можно найти плотности электрических зарядов

$$\tilde{\sigma}_{kr} = \frac{2^k}{\pi c^k} \frac{T_k(x/c)}{\sqrt{c^2 - x^2}}; \quad \tilde{\sigma}_{ki} = i\sigma_{kr}, \tag{5}$$

которые служат источниками аналитических продолжений полей и лежат на отрезке оси абсцисс $-c < x < c$. Таким образом, находим источники электрического поля внутри эллипса, создающие такие же электрические поля вне эллипса, что и электрические заряды, распределенные по эллипсу, то есть решаем задачу "заметания" зарядов с границы эллиптической области внутрь ее. Интересно, что решением задачи заметания электрических зарядов, распределенных по эллипсу с плотностью σ_{ki}, служат мнимые электрические заряды, распределенные по отрезку $-c < x < c$ с плотностью $\tilde{\sigma}_{ki}$, так что мнимые заряды появляются здесь как эквивалентные, создающие такое же электрическое поле вне эллипса, как и электрические заряды эллипса.

2. Общая схема решения задачи о проводящем эллипсе во внешнем электрическом поле

При решении задач об электрически нейтральном проводящем эллипсе, находящемся во внешнем электрическом поле с комплексным потенциалом $\pi(z)$, можно представить комплексный потенциал наведенных на эллипсе зарядов суммой потенциалов характеристических мультиполей эллипса:

$$\Pi(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_{kr}\Pi_{kr}(z) + x_{ki}\Pi_{ki}(z)); \tag{6}$$

$$x_{kr} = -2\pi\varepsilon_o k(A^{2k} + (c/2)^{2k}) \,\mathrm{Re} \int\limits_{|G|=A} \pi(z)\sigma_{kr}\, dl; \tag{7}$$

$$x_{ki} = -2\pi\varepsilon_o k(A^{2k} - (c/2)^{2k}) \,\mathrm{Re} \int\limits_{|G|=A} \pi(z)\sigma_{ki}\, dl. \tag{8}$$

При этом для расчета значения электрической энергии наведенных зарядов

$$\sigma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_{kr}\sigma_{kr}(z) + x_{ki}\sigma_{ki}(z)) \tag{9}$$

может быть использована формула

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{x_{kr}^2}{A^{2k} + (c/2)^{2k}} + \frac{x_{ki}^2}{A^{2k} - (c/2)^{2k}} \right). \tag{10}$$

Заметим, что если источником внешнего поля служит распределение зарядов $d\lambda(z)$, расположенных вне эллипса, то есть

$$\pi(z) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_o} \int \ln\left(\frac{z-\xi}{R}\right) d\lambda(\xi),$$

то коэффициенты x_{kr} и x_{ki} могут быть определены как

$$x_{kr} = -(A^{2k} + (c/2)^{2k}) \operatorname{Re} \int \frac{d\lambda(\xi)}{G^k(\xi)};$$

$$x_{ki} = -(A^{2k} - (c/2)^{2k}) \operatorname{Re} i \int \frac{d\lambda(\xi)}{G^k(\xi)}. \tag{11}$$

Обратим внимание на то, что все приведенные здесь ряды (6), (9) и (10) сходятся, коль скоро $\pi(z)$ — аналитическая функция в какой-либо области, включающей в себя эллипс. В частности, это условие будет выполнено для элементарных функций комплексного аргумента

$$E^* z^n; \quad E^* \cos(\gamma z); \quad E^* \sin(\gamma z); \quad E^* \exp(\gamma z); \tag{12}$$

$$-\frac{\lambda_o}{2\pi\varepsilon_o} \ln\left(\frac{z - z_o}{R}\right); \quad \frac{\lambda_n}{2\pi\varepsilon_o n(z - z_o)^n} \tag{13}$$

при условиях, что точка z_o лежит вне эллипса, а E^*, γ, λ_o и λ_n — постоянные.

Если источники внешнего поля $d\lambda(z)$ лежат внутри эллипса, то коэффициенты x_{kr} и x_{ki} могут быть определены как

$$x_{kr} = -\operatorname{Re} \int \frac{c^k}{2^{k-1}} T_k(z/c) d\lambda(\xi);$$

$$x_{ki} = \operatorname{Re} i \int \frac{c^k}{2^{k-1}} T_k(z/c) d\lambda(\xi). \tag{14}$$

В этом случае ряды (6), (9) и (10) сходятся, коль скоро $\pi(z)$ — аналитическая функция в какой-либо области, полученной исключением из C какой-либо внутренней области эллипса. В частности, это условие будет выполнено для элементарных функций комплексного аргумента, определенных формулами (13), если z_0 лежит в области эллипса.

Когда поддерживаемый при нулевом потенциале проводящий эллипс находится в электрическом поле зарядов, расположенных внутри него, для описания электрического поля наведенных зарядов наряду с характеристическими мультиполями эллипса (3) необходимо будет использовать и мультиполь нулевого порядка, то есть заряды, распределенные по эллипсу с плотностью

$$\sigma_o = \frac{1}{2\pi\sqrt{a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha}}. \tag{15}$$

Комплексный потенциал этого мультиполя

$$\Pi_o(z) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_o} \begin{cases} \ln\left(\dfrac{G(z)}{R}\right) & \textbf{при} \quad z \in |G(z)| > A \\[2ex] \ln\left(\dfrac{A}{R}\right) & \textbf{при} \quad z \in |G(z)| < A \end{cases}. \tag{16}$$

При решении задачи об электрически проводящем эллипсе, находящемся в электрическом поле распределенных внутри эллипса зарядов $d\lambda(z)$ с комплексным потенциалом

$$\pi(z) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_o} \int \ln\left(\frac{z - \tilde{z}}{R}\right) d\lambda(\tilde{z}), \tag{17}$$

комплексный потенциал наведенных на эллипсе зарядов можно представить суммой потенциалов характеристических мультиполей эллипса:

$$\Pi(z) = \lambda_o \Pi_o(z) + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{kr}\Pi_{kr}(z) + \lambda_{ki}\Pi_{ki}(z)); \tag{18}$$

$$\lambda_o = -\frac{2\pi\varepsilon_o}{\ln\Bigl(R/A\Bigr)} \operatorname{Re} \int\limits_{|G|=A} \pi(z)\sigma_o\, dl; \tag{19}$$

$$\lambda_{kr} = -2\pi\varepsilon_o k(A^{2k} + (c/2)^{2k}) \operatorname{Re} \int\limits_{|G|=A} \pi(z)\sigma_{kr}\, dl; \tag{20}$$

$$\lambda_{ki} = -2\pi\varepsilon_o k(A^{2k} - (c/2)^{2k}) \operatorname{Re} \int\limits_{|G|=A} \pi(z)\sigma_{ki}\, dl. \tag{21}$$

При этом для расчета значения электрической энергии наведенных зарядов

$$\sigma(z) = \lambda_o\sigma_o(z) + \sum_{k=1}^{\infty} (\lambda_{kr}\sigma_{kr}(z) + \lambda_{ki}\sigma_{ki}(z)) \tag{22}$$

может быть использована формула

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{\lambda_{kr}^2}{A^{2k} + (c/2)^{2k}} + \frac{\lambda_{ki}^2}{A^{2k} - (c/2)^{2k}} \right) + \frac{\lambda_0^2}{4\pi\varepsilon_o} \ln\left(\frac{R}{A}\right). \tag{23}$$

Учитывая, что источниками комплексного потенциала (16) служат заряды, расположенные внутри эллипса, для λ_o, λ_{kr} и λ_{ki} будем иметь

$$\lambda_o = -\int d\lambda(\tilde{z});$$

$$\lambda_k = \lambda_{kr} + i\lambda_{ki} = -\int \frac{c^k}{2^{k-1}} T_k(\tilde{z}/c) d\lambda(\tilde{z}). \tag{24}$$

Вне эллипса комплексный потенциал наведенных зарядов

$$\Pi(z) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_o} \left(\lambda_o \ln\left(\frac{G(z)}{R}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k}{kG^k(z)} \right), \tag{25}$$

а внутри эллипса

$$\Pi(z) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_o} \left(\lambda_o \ln\left(\frac{A}{R}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^k}{2^{k-1}k} \frac{\lambda_k^* A^{2k} - \lambda_k (c/2)^{2k}}{A^{4k} - (c/2)^{4k}} T_k(z/c) \right). \tag{26}$$

Принимая во внимание, что вне эллипса $\Pi(z) = -\pi(z)$, учитывая также формулу (23), соотношение (24) можно представить в форме

$$\pi(z) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o} \int \left(-\ln\left(\frac{G(z)}{R}\right) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{c^k T_k(\tilde{z}/c)}{2^{k-1}kG^k(z)} \right) d\lambda(\tilde{z}), \tag{27}$$

удобной для получения разложений электрических полей зарядов, распределенных внутри эллипса, по его характеристическим мультиполям. Эти разложения проводятся, как видно из (27), по степеням $G^{-1}(z)$. Перейдем теперь к рассмотрению некоторых примеров использования полученных общих соотношений.

3. Комплексная функция Грина внешней области эллипса и ее источники

На основе представленных соотношений решим задачу о проводящем эллипсе в электрическом поле точечного заряда, расположенного вне эллипса.

Задача об эллипсе в электрическом поле одного точечного заряда, расположенного вне эллипса в точке $\tilde{z}$, эквивалентна задаче о функции Грина внешней к эллипсу области. Принимая во внимание важность такой задачи, исследуем ее подробно.

Учитывая, что внешнее электрическое поле создается точечным зарядом λ_o, расположенным в точке $\tilde{z}$, лежащей вне эллипса, используя соотношение (11), находим

$$x_{kr} = -\left(A^{2k} + (c/2)^{2k}\right) \operatorname{Re} \frac{\lambda_o}{G^k(\tilde{z})}; \;\; x_{ki} = \left(A^{2k} - (c/2)^{2k}\right) \operatorname{Im} \frac{\lambda_o}{G^k(\tilde{z})}. \tag{28}$$

Вне эллипса для потенциала зарядов, наведенных на нейтральном в целом проводящем эллипсе, с помощью (1) и (6) получим

$$\Pi(z) = -\frac{\lambda_o}{2\pi\varepsilon_o} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{A^{2k} + (c/2)^{2k}}{G^k(z)} \operatorname{Re} \frac{1}{G^k(\tilde{z})} - i \frac{A^{2k} - (c/2)^{2k}}{G^k(z)} \operatorname{Im} \frac{1}{G^k(\tilde{z})} \right) =$$

$$= -\frac{\lambda_o}{2\pi\varepsilon_o} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{A^{2k}}{G^{*\,k}(\tilde{z}) G^k(z)} + \frac{(c/2)^{2k}}{G^k(\tilde{z}) G^k(z)} \right) =$$

$$= \frac{\lambda_o}{2\pi\varepsilon_o} \ln \left(\left(1 - \frac{A^2}{G^*(\tilde{z}) G(z)}\right) \left(1 - \frac{(c/2)^2}{G(\tilde{z}) G(z)}\right) \right). \tag{29}$$

Внутри эллипса

$$\Pi(z) = -\frac{\lambda_o}{2\pi\varepsilon_o} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kG^k(\tilde{z})} \frac{c^k}{2^{k-1}} T_k(z/c). \tag{30}$$

Комплексному потенциалу $\Pi(z)$, определенному формулами (29) и (30), соответствует электростатическая энергия

$$W(\Pi(z)) = \frac{\lambda_o^2}{4\pi\varepsilon_o} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left((A^{2k} + (c/2)^{2k}) \left(\operatorname{Re} \frac{1}{G^k(\tilde{z})} \right)^2 + \right.$$

$$\left. + (A^{2k} - (c/2)^{2k}) \left(\operatorname{Im} \frac{1}{G^k(\tilde{z})} \right)^2 \right) = \frac{\lambda_o^2}{4\pi\varepsilon_o} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{A^{2k}}{|G(\tilde{z})|^{2k}} + \operatorname{Re} \frac{(c/2)^{2k}}{G(\tilde{z})^{2k}} \right) =$$

$$= -\frac{\lambda_o^2}{4\pi\varepsilon_o} \ln \left(\left(1 - \frac{A^2}{|G(\tilde{z})|^2}\right) \left|1 - \frac{A^2}{G(\tilde{z})^2}\right| \right). \tag{31}$$

Отметим также, что из соотношения (30) следует:

$$-\ln\left(1 - \frac{z}{\tilde{z}}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{kG^k(\tilde{z})} \frac{c^k}{2^{k-1}} (T_k(z/c) - \operatorname{Re}(i)^k). \tag{32}$$

Обсудим теперь полученные результаты.

Комплексную функцию Грина области, внешней к эллипсу, для нейтрального в целом эллипса найдем, добавляя к комплексному потенциалу наведенных зарядов (29) при $\lambda_o = 1$ комплексный потенциал единичного точечного зряда

$$\pi(z) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{z-\tilde{z}}{R}\right). \tag{33}$$

В результате получим

$$\Gamma_-(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{R\Big(G(z) - A^2/G^*(\tilde{z})\Big)\Big(G(z) - c^2/4G(\tilde{z})\Big)}{G^2(z)(z-\tilde{z})}\right). \tag{34}$$

Учитывая, что

$$z - \tilde{z} = G(z) + \frac{c^2}{4G(z)} - G(\tilde{z}) - \frac{c^2}{4G(\tilde{z})} = \frac{(G(z)-G(\tilde{z}))(G(z)-c^2/4G(\tilde{z}))}{G(z)},$$

представим функцию Грина (34) как функцию $G(z)$:

$$\Gamma_-(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{\Big(G(z)-G(\tilde{z})\Big)G(z)}{R\Big(G(z) - A^2/G^*(\tilde{z})\Big)}\right). \tag{35}$$

Через эту функцию Грина можно, в частности, выразить энергию взаимодействия двух точечных зарядов $\lambda_o^{(1)}$ и $\lambda_o^{(2)}$, расположенных вне проводящего нейтрального в целом эллипса в точках z_1 и z_2:

$$W_{\text{вз}} = \lambda_o^{(1)}\lambda_o^{(2)}\operatorname{Re}\Gamma_-(z_1,z_2,z_2^*) =$$
$$= -\frac{\lambda_o^{(1)}\lambda_o^{(2)}}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left|\frac{\Big(G(z_1)-G(z_2)\Big)G(z_1)G^*(z_2)}{R\Big(G(z_1)G^*(z_2) - A^2\Big)}\right|. \tag{36}$$

Очевидно, что эта функция, как и должно быть, не изменяется при перестановке зарядов.

Через $\Gamma_-(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)$ можно также выразить комплексный потенциал точечного диполя λ_1, расположенного вне проводящего нейтрального в целом эллипса в точке $\tilde{z}$:

$$\Pi_1(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) = (\lambda_1\partial_{\tilde{z}} + \lambda_1^*\partial_{\tilde{z}^*})\Gamma_-(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) =$$
$$= \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\left(\frac{\lambda_1 G'(\tilde{z})}{G(z)-G(\tilde{z})} + \frac{\lambda_1^* A^2 G'^*(\tilde{z})}{G^*(\tilde{z})(G^*(\tilde{z})G(z) - A^2)}\right). \tag{37}$$

Заметим, что при проведении конкретных вычислений может оказаться полезной формула

$$G'(z) = \frac{G(z)}{\sqrt{z^2-c^2}} = \frac{G^2(z)}{G^2(z) - c^2/4}. \tag{38}$$

Представляет интерес функция Грина, нормированная на нуль в бесконечно удаленной точке. Ее можно получить добавлением к $\Gamma_-(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)$ комплексного потенциала проводящего эллипса, заряженного единичным отрицательным зарядом:

$$\Gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{G(z)-G(\tilde{z})}{G(z) - A^2/G^*(\tilde{z})}\right). \tag{39}$$

Эта функция — аналитическая вне эллипса, включая бесконечно удаленную точку, ее реальная часть на эллипсе принимает постоянное значение. Функция

$$\gamma(z,\tilde z,\tilde z^*) = \Gamma(z,\tilde z,\tilde z^*) + \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{z-\tilde z}{R}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{R\Big(G(z)-G(\tilde z)\Big)}{(z-\tilde z)\Big(G(z)-A^2/G^*(\tilde z)\Big)}\right) \quad (40)$$

определяет комплексный потенциал зарядов эллипса. Собственная энергия зарядов эллипса будет равна

$$W_{\text{соб}} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left|A\frac{RG'(\tilde z)}{|G(\tilde z)|^2-A^2}\right|. \quad (41)$$

Отметим, что величина

$$A(\tilde z) = \frac{|G(\tilde z)|^2-A^2}{A\Big|G'(\tilde z)\Big|} \quad (42)$$

— это сопряженный с точкой $\tilde z$ внутренний конформный радиус внешней к эллипсу области, поскольку должным образом нормированная функция

$$\tilde G(z,\tilde z,\tilde z^*) = \frac{|G(\tilde z)|^2-A^2}{G^*(\tilde z)G'(\tilde z)}\exp\Big(-2\pi\varepsilon_o\Gamma(z,\tilde z,\tilde z^*)\Big) =$$

$$= \frac{|G(\tilde z)|^2-A^2}{G'(\tilde z)}\,\frac{G(z)-G(\tilde z)}{\tilde G^*(\tilde z)G(z)-A^2} \quad (43)$$

конформно отображает внешнюю к эллипсу область на круг $|\tilde G(z,\tilde z,\tilde z^*)| < A(\tilde z)$, причем

$$\tilde G(\tilde z,\tilde z,\tilde z^*) = 0; \quad \partial_z\tilde G(z,\tilde z,\tilde z^*)\Big|_{z=\tilde z} = 1.$$

Источники аналитического продолжения внутрь эллипса комплексного потенциала наведенных на эллипсе зарядов, казалось бы, лежат на отрезке, соединяющем фокусы эллипса, поскольку на нем расположены источники всех характеристических мультиполей эллипса. Однако, это утверждение не всегда справедливо. Чтобы убедиться в этом, формулу (29) для комплексного потенциала наведенных зарядов представим в виде

$$\Pi(z) = \frac{\lambda_o}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{\Big(G(z)-A^2/G^*(\tilde z)\Big)\Big(G(z)-c^2/4G(\tilde z)\Big)}{G^2(z)}\right), \quad (44)$$

позволяющем интерпретировать этот потенциал на комплексной плоскости G как суперпозицию комплексных потенциалов точечных зарядов $2\lambda_o$, $-\lambda_o$ и λ_o, расположенных в точках с комплексными координатами $G=0$, $G=c^2/4G(\tilde z)$ и $G=A^2/G^*(\tilde z)$. Так как функция $G(z)$ осуществляет конформное отображение комплексной плоскости z с выброшенным отрезком оси абсцисс $|x|<c$ на внешнюю область окружности $|G|=c/2$ комплексной плоскости G, то $\Pi(z)$ будет аналитической функцией z вне отрезка оси абсцисс $|x|<c$, коль скоро

$$|A^2/G^*(\tilde z)| < c/2. \quad (45)$$

В этом случае можно считать, что все источники потенциала $\Pi(z)$ лежат на отрезке, соединяющем фокусы эллипса, и распределены по этому отрезку с плотностью

$$\tilde{\sigma}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_{kr}\tilde{\sigma}_{kr}(x) + x_{ki}\tilde{\sigma}_{ki}(x)),$$

представляющей собой комплексную величину. Подставляя в это соотношение x_{kr} и x_{ki} из (28), а $\tilde{\sigma}_{kr}$ и $\tilde{\sigma}_{ki}$ из (5), будем иметь

$$\tilde{\sigma}(x) = -\frac{\lambda_o}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\left(\frac{2A^2}{cG^*(\tilde{z})} \right)^k + \left(\frac{c}{2G(\tilde{z})} \right)^k \right) T_k(x/c) =$$

$$= -\frac{\lambda_o}{\pi\sqrt{c^2 - x^2}} \left(\frac{1 - (2A^2/cG^*(\tilde{z}))(x/c)}{1 - 2(2A^2/cG^*(\tilde{z}))(x/c) + (2A^2/cG^*(\tilde{z}))^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1 - x/2G(\tilde{z})}{1 - x/G(\tilde{z}) + (c/2G(\tilde{z}))^2} - 2 \right). \tag{46}$$

Отметим, что плотность зарядов $\tilde{\sigma}(x)$ будет вещественной величиной, только когда вещественна $G(\tilde{z})$, то есть когда создающий внешнее поле точечный заряд находится на оси абсцисс.

При выполнении неравенства

$$|A^2/G^*(\tilde{z})| > c/2, \tag{47}$$

обратного неравенству (45), в точке

$$G_o = A^2/G^*(\tilde{z})$$

комплексной плоскости G, как было уже указано ранее, расположен точечный заряд $-\lambda_o$. Если при справедливости неравенства (45) этой точке на комплексной плоскости z не соответствовало какой-либо точки, то теперь ей будет отвечать логарифмически особая точка потенциала (44)

$$z_o = G_o + \frac{c^2}{4G_o} = A^2/G^*(\tilde{z}) + \frac{c^2}{4A^2} G^*(\tilde{z}). \tag{48}$$

Выделим эту особенность, добавив к потенциалу (67)

$$\frac{\lambda_o}{2\pi\varepsilon_o} \ln \left(\frac{z - z_o}{R} \right)$$

и вычитая из него

$$\frac{\lambda_o}{2\pi\varepsilon_o} \ln \left(\frac{z - z_o}{R} \right) = \frac{\lambda_o}{2\pi\varepsilon_o} \ln \left(\frac{(G(z) - A^2/G^*(\tilde{z}))(G(z) - c^2 G^*(\tilde{z})/4A^2)}{G(z)R} \right).$$

В результате такого тождественного преобразования будем иметь

$$\Pi(z) = \frac{\lambda_o}{2\pi\varepsilon_o} \ln \left(\frac{z - z_o}{R} \right) + \frac{\lambda_o}{2\pi\varepsilon_o} \ln \left(\frac{R\Big(G(z) - c^2/4G(\tilde{z})\Big)}{(G(z) - c^2 G^*(\tilde{z})/4A^2)G(z)} \right). \tag{49}$$

Второе слагаемое в правой части этой формулы, обозначим его $\Pi_1(z)$, не имеет особенностей вне отрезка, соединяющего фокусы эллипса. Своими источниками оно имеет заряды, распределенные по этому отрезку с плотностью

$$\tilde{\sigma}_1(x) = -\frac{\lambda_o}{\pi\sqrt{c^2-x^2}}\left(\frac{1-x/2G(\tilde{z})}{1-x/G(\tilde{z})+(c/2G(\tilde{z}))^2}-\right.$$

$$\left.-\frac{1-(cG^*(\tilde{z})/2A^2)(x/c)}{1-2(cG^*(\tilde{z})/2A^2)(x/c)+(cG^*(\tilde{z})/2A^2)^2}-1\right). \tag{50}$$

Таким образом, здесь была решена задача заметания источников потенциала (44), распределенных по эллипсу с плотностью

$$\sigma(\alpha) = -\frac{\lambda_o}{\pi\sqrt{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha}}\left(\frac{A^2-A|\tilde{G}|\cos(\alpha-\tilde{\alpha})}{A^2+|\tilde{G}|^2-2A|\tilde{G}|\cos(\alpha-\tilde{\alpha})}\right), \tag{51}$$

с эллипса внутрь его. Интересно, что при приближении точечного заряда к эллипсу, из первоначально распределенных по отрезку, соединяющему фокусы эллипса, зарядов, формируется точечный заряд величины $-\lambda_o$ как источник потенциала (44), который отрывается от первоначального распределения зарядов и изменяет свое положение в зависимости от положения внешнего заряда.

Заметим, что выражение (51) для плотности наведенных на эллипсе зарядов может быть найдено как

$$\sigma(\alpha) = \sum_{k=1}^{\infty}(x_{kr}\sigma_{kr}(x)+x_{ki}\sigma_{ki}(x)).$$

Подставляя в это соотношение x_{kr} и x_{ki} из (28), а σ_{kr} и σ_{ki} из (3), будем иметь

$$\sigma(\alpha) = -\frac{\lambda_o}{\pi\sqrt{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha}}\sum_{k=1}^{\infty}A^k\left(\cos(k\alpha)\operatorname{Re}\frac{1}{G^k(\tilde{z})}-\sin(k\alpha)\operatorname{Im}\frac{1}{G^k(\tilde{z})}\right)=$$

$$=-\frac{\lambda_o}{\pi\sqrt{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha}}\operatorname{Re}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{A}{|G(\tilde{z})|}e^{i(\tilde{\alpha}-\alpha)}\right)^k=$$

$$=-\frac{\lambda_o}{\pi\sqrt{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha}}\operatorname{Re}\frac{A/|G(\tilde{z})|}{e^{i(\alpha-\tilde{\alpha})}-A/|G(\tilde{z})|}. \tag{52}$$

После вычисления реальной части в правой части последнего равенства приходим к соотношению (51).

Понятие об эллипсе сходимости естественным образом возникает при рассмотрении аналитического продолжения комплексного потенциала (30) за пределы эллипса в форме ряда, определенного правой частью соотношения (30), то есть при решении задачи об области сходимости этого ряда. Обращаясь к уравнению связи полиномов Чебышева с функцией $G(\tilde{z})$ (2), видим, что ряд (30) будет сходиться, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{G^k(z)}{kG^k(\tilde{z})},$$

который представляет собой степенной ряд по $G(\tilde{z})$, очевидно сходящийся при

$$|G(z)| < |G(\tilde{z})|. \tag{53}$$

Заметим, что неравенство

$$|G(z)| < H$$

определяет область, ограниченную эллипсом

$$|G(z)| = H,$$

софокусным с рассматриваемым здесь. Таким образом, проведя через точку $\tilde{z}$ эллипс, софокусный с основным, получим область сходимости ряда (30), то есть эллипс сходимости этого ряда. Внешний конформный радиус этого эллипса будет равен $|G(\tilde{z})|$.

Чтобы найти эллипс сходимости ряда

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \frac{c^k}{2^{k-1}} T_k(z/c), \tag{54}$$

в общем случае нужно перейти к степенному ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k G^k(z),$$

определить его радиус сходимости в комплексной плоскости G,

$$R_G = \left(\overline{\lim_{k\to\infty}} \sqrt[k]{|b_k|} \right)^{-1}, \tag{55}$$

а затем установить эллипс сходимости

$$|G(z)| < R_G. \tag{56}$$

Для определения эллипса сходимости можно было обратиться к выражению электростатической энергии, соответствующей комплексному потенциалу $f(z)$,

$$W(f(z)) = \frac{1}{2} 2\pi\varepsilon_o \sum_{k=1}^{\infty} k\Big((A^{2k} + (c/2)^{2k}) b_{kr}^2 + (A^{2k} - (c/2)^{2k}) b_{ki}^2 \Big). \tag{57}$$

В этом выражении внешний конформный радиус эллипса $A > c/2$ считаем переменным и находим его максимальное значение, при котором ряд для энергии сходится. В этом случае также приходим к

$$\max A = R_G.$$

Можно придать процессу определения эллипса сходимости физический смысл, для чего, фиксируя внешний конформный радиус, выделим отдельный эллипс из семейства софокусных. Затем зададимся вопросом о том, может ли электрический заряд, распределенный по этому эллипсу, создать электрическое поле с комплексным потенциалом (54). Ответ на этот вопрос будет положительным, если рассчитанная по формуле (57) электростатическая энергия окажется конечной, и отрицательной, если ряд (54) для энергии будет расходящимся.

Отметим, что с точки зрения электростатики разложения аналитической функции в степенной ряд и в ряд по многочленам Чебышева — это ее представление в базисах характеристических мультиполей окружности и, соответственно, эллипса.

Представление некоторых элементарных функций в виде ряда по полиномам Чебышева можно получить с помощью соотношения (32). Так, заменяя в правой и левой частях (32) z на $-z$, получим

$$-\ln\left(1+\frac{z}{\tilde{z}}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{kG^k(\tilde{z})}\frac{c^k}{2^{k-1}}(T_k(-z/c)-\mathrm{Re}(i)^k). \tag{58}$$

Вычитая из правой части (32) правую часть (58), а из левой — левую, будем иметь

$$\ln\left(\frac{\tilde{z}+z}{\tilde{z}-z}\right)=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p-1)G^{2p-1}(\tilde{z})}\frac{c^{2p-1}}{2^{2p-3}}T_{2p-1}(z/c). \tag{59}$$

Принимая во внимание, что

$$\mathrm{arctg}\,\frac{z}{d}=\frac{i}{2}\ln\left(\frac{id+z}{id-z}\right),$$

находим

$$\mathrm{arctg}\,\frac{z}{d}=i\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{(2p-1)G^{2p-1}(id)}\frac{c^{2p-1}}{2^{2p-2}}T_{2p-1}(z/c)=$$

$$=2\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}c^{2p-1}}{(2p-1)(d+\sqrt{d^2+c^2})^{2p-1}}T_{2p-1}(z/c). \tag{60}$$

Заметим, что эллипс сходимости этого ряда

$$|G(z)|=\frac{1}{2}(d+\sqrt{d^2+c^2})$$

включает в себя круг сходимости степенного ряда арктангенса

$$\mathrm{arctg}\,\frac{z}{d}=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{(-1)^{p+1}}{2p-1}\left(\frac{z}{d}\right)^{2p-1}.$$

Задачу о проводящем эллипсе в электрическом поле, комплексный потенциал которого

$$\pi(z)=E^*\,\mathrm{arctg}\,\frac{z}{d}=-\frac{i\pi\varepsilon_o E^*}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{id+z}{id-z}\right);\quad d>b, \tag{61}$$

можно формально интерпретировать как задачу о проводящем эллипсе, находящемся в электрическом поле двух отличающихся знаками комплексных зарядов

$$\lambda_{o1}=i\pi\varepsilon_o E^*;\quad \lambda_{o2}=-i\pi\varepsilon_o E^*,$$

расположенных, соответственно в точках $z_1=-id$ и $z_2=id$. Такая интерпретация удобна для определения вне эллипса комплексного потенциала наведенных зарядов. Однако плотность наведенных на эллипсе зарядов, найденная с помощью соотношения (51)

$$\sigma(\alpha)=-\frac{i\pi\varepsilon_o E^*}{\pi\sqrt{a^2\sin^2\alpha+b^2\cos^2\alpha}}\left(\frac{A^2+A|\tilde{G}|\sin\alpha}{A^2+|\tilde{G}|^2+2A|\tilde{G}|\sin\alpha}-\right.$$

$$\left.-\frac{A^2-A|\tilde{G}|\sin\alpha}{A^2+|\tilde{G}|^2-2A|\tilde{G}|\sin\alpha}\right);\quad |\tilde{G}|=\frac{1}{2}(d+\sqrt{d^2+c^2}), \tag{62}$$

оказывается комплексной величиной. С точки зрения классической электростатики задача об эллипсе во внешнем элетрическом поле с комплексным потенцалом (61) будет иметь физический смысл только при мнимых значениях E, поскольку в этом случае наведенные на эллипсе заряды действительны.

4. Комплексная функция Грина внутренней области эллипса и ее источники

Теперь рассмотрим функцию Грина внутренней области эллипса и конформное отображение внутренней области эллипса на круг.

Напомним, что комплексная функция Грина представляет собой комплексный потенциал находящегося внутри эллипса единичного точечного заряда, экранированного проводящим эллипсом. Поэтому плотность наведенных на эллипсе зарядов будем искать в виде (21), вычисляя $\lambda_{k\gamma}$ по формулам (23) и полагая полный заряд эллипса равным -1, как это следует из условия экранировки точечного заряда проводящим эллипсом. В результате получим

$$\lambda_o = -1; \quad \lambda_k = \frac{c^k}{2^{k-1}} T_k(\tilde{z}). \tag{63}$$

Для плотности наведенных на эллипсе зарядов имеем

$$\sigma = -\frac{1}{2\pi\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}}\Biggl(1+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{A^k c^k}{2^{k-2}}\left(\frac{\operatorname{Re}T_k(\tilde{z}/c)\cos(k\alpha)}{A^{2k}+(c/2)^{2k}} + \frac{\operatorname{Im}T_k(\tilde{z}/c)\sin(k\alpha)}{A^{2k}-(c/2)^{2k}}\right)\Biggr). \tag{64}$$

Комплексный потенциал зарядов, наведенных на эллипсе, внутри него

$$\gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\left(\ln\left(\frac{A}{R}\right) - \sum_{k=1}^{\infty}\frac{c^{2k}(T_k(\tilde{z}^*/c)A^{2k} - (c/2)^{2k}T_k(\tilde{z}/c))}{2^{2k-2}k(A^{4k}-(c/2)^{4k})}T_k(z/c)\right). \tag{65}$$

Собственная энергия поляризационных зарядов эллипса

$$W_{\mathsf{соб}} = -\frac{1}{2}\operatorname{Re}\gamma(\tilde{z},\tilde{z},\tilde{z}^*) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\Biggl(\ln\left(\frac{R}{A}\right)+$$

$$+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c^{2k}}{2^{2k-2}k}\left(\frac{|\operatorname{Re}T_k(\tilde{z}/c)|^2}{A^{2k}+(c/2)^{2k}} + \frac{|\operatorname{Im}T_k(\tilde{z}/c)|^2}{A^{2k}-(c/2)^{2k}}\right)\Biggr). \tag{66}$$

Величина

$$A(\tilde{z}) = A\exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c^{2k}}{2^{2k-2}k}\left(\frac{|\operatorname{Re}T_k(\tilde{z}/c)|^2}{A^{2k}+(c/2)^{2k}} + \frac{|\operatorname{Im}T_k(\tilde{z}/c)|^2}{A^{2k}-(c/2)^{2k}}\right)\right) \tag{67}$$

— это не что иное, как отнесенный к точке $\tilde{z}$ внутренний конформный радиус ограниченной эллипсом области. Из формулы (66), в частности, видно, что любой внутренний конформный радиус меньше внешнего.

Функция Грина для внутренней области эллипса совпадает с комплексным потенциалом экранированного проводящим эллипсом точечного заряда, то есть

$$\Gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{z-\tilde{z}}{R}\right) + \gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{z-\tilde{z}}{A}\right) -$$

$$-\frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c^{2k}(T_k(\tilde{z}^*/c)A^{2k} - (c/2)^{2k}T_k(\tilde{z}/c))}{2^{2k-2}k(A^{4k}-(c/2)^{4k})}T_k(z/c). \tag{68}$$

Функция

$$\tilde{G}(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) = A\exp\Big(-2\pi\varepsilon_o(\Gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) - \gamma(\tilde{z},\tilde{z},\tilde{z}^*))\Big) \tag{69}$$

осуществляет конформное отображение внутренней области эллипса на круг $|\tilde{G}| < A(\tilde{z})$, причем $\tilde{G}(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)$ нормирована так, что

$$\tilde{G}(\tilde{z},\tilde{z},\tilde{z}^*) = 0; \quad \tilde{G}(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)\Big|_{z=\tilde{z}} = 1.$$

В частности, при $\tilde{z} = 0$ в определяющие функцию Грина соотношения войдут только многочлены Чебышева с четными номерами. Принимая во внимание, что

$$\operatorname{Re} T_{2m}(0) = (-1)^m; \quad \operatorname{Im} T_{2m}(0) = 0,$$

записываем

$$\sigma = -\frac{1}{2\pi\sqrt{a^2\sin^2\alpha + b^2\cos^2\alpha}}\left(1 + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{A^{2m}c^{2m}}{2^{2m-2}}\frac{(-1)^m\cos(2m\alpha)}{A^{4m} + (c/2)^{4m}}\right);$$

$$\gamma(z,0,0) = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\left(\ln\left(\frac{A}{R}\right) - \sum_{m=1}^{\infty}\frac{c^{4m}}{2^{4m-1}m}\frac{(-1)^m}{A^{4m} + (c/2)^{4m}}T_{2m}(z/c)\right);$$

$$W_{\text{соб}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\left(\ln\left(\frac{R}{A}\right) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{c^{4m}}{2^{4m-1}m}\frac{1}{A^{4m} + (c/2)^{4m}}\right);$$

$$A(0) = A\exp\left(-\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c^{4m}}{2^{4m-1}m}\frac{1}{A^{4m} + (c/2)^{4m}}\right); \tag{70}$$

$$\Gamma(z,0,0) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{z}{A}\right) - \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c^{4m}}{2^{4m-1}m}\frac{(-1)^m}{A^{4m} + (c/2)^{4m}}T_{2m}(z/c);$$

$$\tilde{G}_o(z) = \tilde{G}(z,0,0) = z\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{c^{4m}}{2^{4m-1}m}\frac{1}{A^{4m} + (c/2)^{4m}}\Big((-1)^m T_{2m}(z/c) - 1\Big)\right).$$

Заметим, что через функцию $\tilde{G}_o(z)$ можно выразить функцию $\tilde{G}(z,\tilde{z},\tilde{z}^*)$, используя дробно-линейное преобразование

$$\tilde{G}(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) = \frac{|\tilde{G}_o(\tilde{z})|^2 - A^2(0)}{\tilde{G}_o'(\tilde{z})}\frac{\tilde{G}_o(z) - \tilde{G}_o(\tilde{z})}{\tilde{G}_o(z)\tilde{G}_o^*(\tilde{z}) - A^2(0)}, \tag{71}$$

при этом

$$A(\tilde{z}) = \frac{A^2(0) - |\tilde{G}_o(\tilde{z})|^2}{A(0)|\tilde{G}_o'(\tilde{z})|};$$

$$\Gamma(z,\tilde{z},\tilde{z}^*) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(A(0)\frac{\tilde{G}_o(z) - \tilde{G}_o(\tilde{z})}{\tilde{G}_o(z)\tilde{G}_o^*(\tilde{z}) - A^2(0)}\right).$$

Обратим внимание на то, что собственная энергия поляризационных зарядов эллипса может быть представлена в форме

$$W_{\text{соб}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{R}{A(\tilde{z})}\right), \tag{72}$$

копирующей форму представления энергии уединенного заряженного проводника, поэтому величину

$$C(\tilde{z}) = 2\pi\varepsilon_o \Big/ \ln\left(\frac{R}{A(\tilde{z})}\right) \tag{73}$$

по аналогии с емкостью уединенного проводника будем называть емкостью проводника относительно точки $\tilde{z}$.

С помощью соотношения (26) можно найти, что вне эллипса комплексный потенциал единичного точечного заряда

$$-\frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{z-\tilde{z}}{R}\right) = -\frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{G(z)}{R}\right) + \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c^k}{2^{k-1}k}\,\frac{T_k\big(\tilde{z}/c\big)}{G^k(z)}. \tag{74}$$

Это разложение имеет место для любых z и $\tilde{z}$, лежащих соответственно вне и внутри эллипса. Продифференцировав левую и правую части этого соотношения по $\tilde{z}$, получим разложение по характеристическим мультиполям эллипса комплексного потенциала единичного точечного диполя

$$\frac{1}{2\pi\varepsilon_o(z-\tilde{z})} = \frac{1}{2\pi\varepsilon_o}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c^{k-1}}{2^{k-1}}\,\frac{U_{k-1}\big(\tilde{z}/c\big)}{G^k(z)}, \tag{75}$$

где $U_{k-1}\big(\tilde{z}/c\big)$ — многочлены Чебышева второго рода.

Полезной в дальнейшем может оказаться формула для энергии взаимодействия двух экранированных внутри проводящего эллипса точечных зарядов $\lambda_o^{(1)}$ и $\lambda_o^{(2)}$, расположенных в точках z_1 и z_2:

$$W_{oo}^{(12)} = -\operatorname{Re}\frac{\lambda_o^{(1)}\lambda_o^{(2)}}{2\pi\varepsilon_o}\ln\left(\frac{z_2-z_1}{A}\right) -$$

$$\operatorname{Re}\frac{\lambda_o^{(1)}\lambda_o^{(2)}}{2\pi\varepsilon_o}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c^{2k}(T_k(z_1^*/c)A^{2k}-(c/2)^{2k}T_k(z_1/c))}{2^{2k-2}k(A^{4k}-(c/2)^{4k})}\,T_k(z_2/c). \tag{76}$$

5. Заключение

Обратим внимание на то, что при рассмотрении электростатических задач для эллипса с использованием аппарата характеристических мультиполей целесообразно было ввести такие понятия, как мнимый заряд и эллипс сходимости. Интересен также эффект рождения точечной особенности в распределении эквивалентных зарядов. В заключение отметим, что аппарат характеристических мультиполей весьма эффективен при рассмотрении электростатических задач для эллипса, в связи с чем возникает задача распространения этого аппарата на другие геометрические фигуры. В случае удачного решения поставленной задачи богатые возможности аппарата характеристических мультиполей смогут раскрыться в полной мере.

Список литературы

[1] В.П.Казанцев, Понятие о высших поляризуемостях уединенных проводников в плоских задачах электростатики, Красноярск, 1996, Деп. в ВИНИТИ 2291 – В96.

[2] В.П.Казанцев, Вариационные принципы и высшие поляризуемости уединенных проводников в плоских задачах электростатики, *Докл. РАН*, **361**(1998), №4, 469-473.

[3] В.П.Казанцев, Вариационные принципы, электрические характеристические мультиполи и высшие поляризуемости в теории поля, *Теоретическая и математическая физика*, **119**(1999), №3, 441-454.

Characteristic Multipoles of Ellipse and a Solution of the Electrostatic Problem for a Conductive Ellipse in Applied Electric Fields

Vladimir P.Kazantsev
Evgeny N.Shlyahtich

A method of the general problem of electrostatics solution for conductive ellipse in applied electric fields is obtained in complex form in terms of "characteristic multipole". Both a general scheme of the solution and particular examples are considered. Complex Green functions for the outside and the inside of an ellipse are constructed. The terms "imaginary charge" and "ellipse of convergence" are established.

Keywords: complex Green function, characteristic multipole, conductive ellipse, ellipse of convergence, imaginary charge, electrostatic.