Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2009, 2(4), 506-516

УДК 517.55

О задаче Коши для комплекса Дольбо в пространствах Соболева

Дмитрий П.Федченко*
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 18.09.2009, окончательный вариант 25.10.2009, принята к печати 10.11.2009

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$, имеющая дважды гладкую границу ∂D. В работе описаны необходимые и достаточные условия разрешимости задачи Коши для комплекса Дольбо в пространстве дифференциальных форм бистепени $(0, q)$, $0 < q < n$ с коэффициентами из пространства Соболева $H^1(D)$ в области D.

Ключевые слова: задача Коши, оператор Коши-Римана, комплекс Дольбо.

Введение

Хорошо известно, что задача Коши для системы Коши–Римана является некорректной. Тем не менее она часто возникает в приложениях: гидродинамике, теории передачи сигнала и т.д. (см., например, [1]). В настоящей работе представлено исследование задачи Коши для комплекса Дольбо, т.е. для комплекса совместности многомерного оператора Коши-Римана.

Внимание к такого рода задачам возросло после примера Х. Леви ([2]), в котором он построил дифференциальное уравнение без решения при помощи касательного оператора Коши-Римана.

В пространствах гладких функций эта задача изучалась в серии работ Андреотти и Хилла (см., например, [3]), где условия разрешимости были сформулированы в терминах исчезновения некоторых когомологий. Интерес к данной задаче Коши не ослабевает и сейчас ([4], [5], [6]).

Мы развиваем подход, предложенный Айзенбергом и Кытмановым в статье [7] (ср. также [8]) для многомерной задачи Коши для оператора Коши-Римана, который основан на применении интегральных представлений и гармонического анализа.

Итак, мы рассматриваем неоднородную задачу Коши для комплекса Дольбо в пространстве Соболева $H^1(D)$. В данной работе мы получим критерий ее разрешимости.

1. Постановка задачи

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное евклидово пространство, а $\mathbb{C}^n$ — n-мерное комплексное пространство, точками которого являются упорядоченные наборы n комплексных чисел $z = (z_1, \ldots, z_n)$, где $z_j = x_j + \sqrt{-1}\,x_{j+n}$, $j = 1, \ldots, n$, а $\sqrt{-1}$ — мнимая единица, $x = (x_1, \ldots, x_{2n}) \in \mathbb{R}^{2n}$.

*e-mail: dfedchenko@sfu-kras.ru

Пусть D — ограниченная область в $\mathbb{R}^{2n}$, то есть открытое связное множество, а $\overline{D}$ — ее замыкание. Кроме того, пусть Γ — связное открытое (в топологии ∂D) подмножество границы области D. Мы предполагаем, что граница $\partial\Gamma$ поверхности Γ является кусочно-гладкой.

Зафиксируем какую-нибудь определяющую функцию $\rho \in C^2$ для области D, т.е. вещественнозначную бесконечно гладкую функцию с условием $|d\rho| \neq 0$ на ∂D и такую, что

$$D = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < 0\}.$$

Для открытого множества $D \subset \mathbb{C}^n$ обозначим через $C^\infty(D)$ пространство бесконечно дифференцируемых функций в D, а через $C^\infty(\overline{D})$ — пространство бесконечно дифференцируемых функций в D, любые производные которых непрерывно продолжаются на $\overline{D}$. Также обозначим через $C^\infty_{comp}(D \cup \Gamma)$ множество функций из $C^\infty(\overline{D})$, имеющих компактный носитель в $D \cup \Gamma$.

Далее, пусть $L^2(D)$ будет пространство Лебега, т.е. множество (комплекснозначных) функций в области D, квадрат которых интегрируем по Лебегу в D. Как известно, это гильбертово пространство со скалярным произведением:

$$(u, v)_{L^2(D)} = \int\limits_D u(z)\,\overline{v}(z)\frac{d\overline{z} \wedge dz}{(2\pi\sqrt{-1})^n}.$$

Как обычно, пространство Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{N}$, состоит из измеримых функций, чьи частные производные до порядка s включительно принадлежат пространству Лебега $L^2(D)$, а пространство Соболева $H^s_{loc}(D \cup \Gamma)$ состоит из измеримых функций, принадлежащих $H^s(\sigma)$ для каждого измеримого множества $\sigma \Subset D \cup \Gamma$.

Обозначим через $\overline{\partial}$ оператор Коши-Римана в пространстве $\mathbb{C}^n$. Как известно, оператор Коши-Римана индуцирует дифференциальный комплекс совместности

$$0 \longrightarrow \Lambda^{0,0} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{0,1} \xrightarrow{\overline{\partial}_1} \Lambda^{0,2} \xrightarrow{\overline{\partial}_2} \ldots \xrightarrow{\overline{\partial}_{n-1}} \Lambda^{0,n} \longrightarrow 0,$$

который называется комплексом Дольбо (см., например, [9] или [10]). Аналогично получают комплексы

$$0 \longrightarrow \Lambda^{r,0} \xrightarrow{\overline{\partial}} \Lambda^{r,1} \xrightarrow{\overline{\partial}_{r,1}} \Lambda^{r,2} \xrightarrow{\overline{\partial}_{r,2}} \ldots \xrightarrow{\overline{\partial}_{r,n-1}} \Lambda^{r,n} \longrightarrow 0,$$

где $\Lambda^{(r,q)}$ — множество дифференциальных форм бистепени (r, q), а $\overline{\partial}_{r,q}$ — операторы Коши-Римана на дифференциальных формах; как обычно, если это не приводит к недоразумениям, мы будем писать просто $\overline{\partial}$ вместо $\overline{\partial}_{r,q}$. Пространство дифференциальных форм бистепени (r, q) с коэффициентами из какого-нибудь функционального пространства $\mathfrak{S}(D)$ обозначим через $\mathfrak{S}(D, \Lambda^{r,q})$.

По определению, оператор дифференцирования $\overline{\partial}$ индуцирует непрерывный линейный оператор:

$$\overline{\partial} : H^s(D, \Lambda^{r,q}) \to H^{s-1}(D, \Lambda^{r,q+1}), \quad s \in \mathbb{N}.$$

Следует отметить, что оператор $\overline{\partial}$ не меняет степени формы по переменным z (только по $\overline{z}$), поэтому, не теряя общности, будем рассматривать задачу Коши для форм бистепени $(0, q)$.

Дифференциальная форма $u \in H^s(D, \Lambda^{0,q})$, $s \in \mathbb{Z}_+$, называется $\overline{\partial}$-замкнутой, если она удовлетворяет следующему уравнению:

$$\overline{\partial} u = 0 \text{ в смысле распределений в } D,$$

т. е.

$$\int_D u \wedge \overline{\partial}\varphi = 0 \text{ для всех } \varphi \in C^\infty_{comp}(D, \Lambda^{n,n-q-1}).$$

Множество всех $\overline{\partial}$-замкнутых форм из пространства $H^s(D, \Lambda^{0,q})$ обозначим $Z_q(H^s(D))$.

Как известно (см., например, [11]), для функций класса Соболева $H^s(D)$, $s \in \mathbb{N}$, хорошо определены следы на границе области D. Множество всех $\overline{\partial}$-замкнутых форм из $H^s(D, \Lambda^{0,q})$, следы коэффициентов которых исчезают на Γ, обозначим через $Z_q(H^s(D), \Gamma)$. Договоримся, что $Z_q(H^s(D), \varnothing) = Z_q(H^s(D))$.

Далее, форму $v \in Z_q(H^s(D)$, $q \geqslant 1$, будем называть $\overline{\partial}$-точной, если для нее найдется форма $w \in \mathcal{D}'(D, \Lambda^{0,q-1})$, удовлетворяющая уравнению

$$\overline{\partial} w = v \text{ в смысле распределений в } D.$$

Множество всех $\overline{\partial}$-точных форм из $H^s(D, \Lambda^{0,q})$ обозначим через $B_q(H^s(D))$, а через $H_q(H^s(D)) = Z_q(H^s(D))/B_q(H^s(D))$ обозначим когомологии.

Задача 1. *Для заданных дифференциальных форм $u_0 \in H^1(D, \Lambda^{0,q})$ и $f \in L^2(D, \Lambda^{0,q+1})$ найти (если это возможно) дифференциальную форму $u \in H^1(D, \Lambda^{0,q})$, такую, что*

$$\begin{cases} \overline{\partial} u = f & \text{в} \quad D, \\ u_I = (u_0)_I & \text{на} \quad \Gamma \quad \text{для всех} \quad \sharp I = q. \end{cases}$$

Как хорошо известно, при $q = 0$ эта задача, вообще говоря, некорректна, если Γ не совпадает с ∂D. Что касается теоремы единственности, то при $q = 0$ эта задача имеет не более одного решения (см., например, [7]), если внутренность Γ не пуста.

Обсудим вопрос единственности решения задачи Коши в положительных степенях комплекса. Ясно, что в этом случае задача Коши 1 может иметь более одного решения.

При $n = 2$ рассмотрим область $D = \{(x_1, x_2, y_1, y_2) \,|\, y_2 > 0\}$ (ее, конечно, можно сделать ограниченной, взяв пересечение D с некоторым шаром) и $\Gamma = \{y_2 = 0\}$. Тогда для двух не равных между собой дифференциальных форм

$$u = z_1 d\overline{z}_1 + z_2 d\overline{z}_2 \text{ и } v = z_1 d\overline{z}_1 + \overline{z}_2 d\overline{z}_2$$

мы имеем:

$$\overline{\partial}(z_1 d\overline{z}_1 + z_2 d\overline{z}_2) = \overline{\partial}(z_1 d\overline{z}_1 + \overline{z}_2 d\overline{z}_2) = 0,$$

а сужения соответствующих коэффициентов этих форм на Γ совпадают:

$$u_1 = v_1 = z_1 \text{ на } \Gamma, \quad u_2 = v_2 = x_2 \text{ на } \Gamma.$$

В положительных степенях комплекса, с точки зрения когомологий, естественной теоремой единственности было бы утверждение о том, что все элементы пространства $Z_q(H^1(D), \Gamma)$, $q \geqslant 1$, являются $\overline{\partial}$-точными формами. Так, в [4] была рассмотрена задача Коши для когомологий комплекса Дольбо. В частности, там указаны некоторые (достаточные) условия на $\partial D \setminus \Gamma$, при которых $\overline{\partial}$-замкнутые формы класса $C^1(\overline{D})$, исчезающие на

Γ, являются $\overline{\partial}$-точными. Например, это так, если $\partial D \setminus \Gamma$ — часть границы псевдовыпуклой области G, содержащей D. С учетом результатов [12] о разрешимости $\overline{\partial}$ - уравнения в псевдовыпуклых областях, в нашем случае это наблюдение также справедливо. В самом деле, если $v \in Z_q(H^1(D), \Gamma)$, то, продолжив эту форму нулем в G, мы получим элемент $Z_q(H^1(G))$, для которого, согласно [12], найдется форма $w \in H^1_{loc}(G)$, удовлетворяющая $\overline{\partial} w = v$ в G.

Далее предлагается рассмотреть еще две естественных задачи, которые также можно назвать задачами Коши для комплекса Дольбо.

Задача 2. *Для заданной дифференциальной формы $g \in L^2(D, \Lambda^{0,q+1})$ найти дифференциальную форму $v \in H^1(D, \Lambda^{0,q})$, такую, что*

$$\begin{cases} \overline{\partial} v = g & \text{в} \quad D, \\ v_I = 0 & \text{на} \quad \Gamma \quad \text{для всех} \quad \sharp I = q. \end{cases}$$

Ясно, что задача 2 есть частный случай задачи 1. Однако легко видеть, что задачу 1 достаточно просто свести к задаче 2. Более точно, задача 1 разрешима тогда и только тогда, когда разрешима задача 2 с данными $g = f - \overline{\partial} u_0$, а решения этих задач связаны равенством

$$u = u_0 + v.$$

Ниже будем рассматривать задачу 2.

Для того чтобы сформулировать еще одну разновидность задачи Коши, нам понадобятся понятия касательной и нормальной частей формы. С этой целью обозначим через $*$ оператор Ходжа для комплексных дифференциальных форм. Если v — дифференциальная форма бистепени (p,q) с коэффициентами класса $H^1(D)$, то говорят, что касательная часть $\tau(v)$ формы v равна нулю на части границы Γ области D, если

$$\int_{\partial D} v \wedge \varphi = 0$$

для всех форм φ типа $(n-p, n-q-1)$ с коэффициентами класса $C^\infty_{comp}(D \cup \Gamma)$. Это означает, что $v \wedge \overline{\partial} \rho = 0$ на Γ. Будем говорить, что нормальная часть $\nu(v)$ формы v равна нулю на Γ, если касательная часть $\tau(*v)$ формы $*v$ равна нулю на Γ.

Задача 3. *Для заданной дифференциальной формы $f \in L^2(D, \Lambda^{0,q+1})$ найти дифференциальную форму $u \in H^1(D, \Lambda^{0,q})$, такую, что*

$$\begin{cases} \overline{\partial} u = f & \text{в} \quad D, \\ \tau(u) = 0 & \text{на} \quad \Gamma. \end{cases}$$

Лемма 1. *Задачи Коши 2 и 3 эквивалентны.*

Доказательство. Ясно, что решение задачи 2 является также решением задачи 3. Пусть теперь v есть решение задачи 3. Мы докажем, что найдется такая дифференциальная форма $w \in H^2(D, \Lambda^{0,q-1})$, для которой $u = v - \overline{\partial} w$ есть решение задачи 2.

Обозначим через $\mathfrak{G}(\zeta, z)$ стандартное фундаментальное решение уравнения Лапласа в комплексной форме для $n > 1$:

$$\mathfrak{G}(\zeta, z) = -\frac{(n-2)!}{(2\pi\sqrt{-1})^n} \frac{1}{|\zeta - z|^{2n-2}}.$$

Поскольку $v \in H^1(D, \Lambda^{0,q})$, то $\chi_D v \in L^2(\mathbb{C}^n, \Lambda^{0,q})$, и

$$\mathfrak{G}\chi_D v \in H^2_{loc}(\mathbb{C}^n, \Lambda^{0,q}) \cap H^3(D, \Lambda^{0,q}) \cap H^3_{loc}(\mathbb{C}^n \setminus D, \Lambda^{0,q}).$$

Обозначим через $(\widetilde{\mathfrak{G}\chi_D v})^+$ продолжение формы $\mathfrak{G}\chi_D v$ из $\mathbb{C}^n \setminus D$ на все $\mathbb{C}^n$. По теореме Уитни это продолжение существует и принадлежит классу $H^3_{loc}(\mathbb{C}^n, \Lambda^{0,q})$. Тогда

$$w = \overline{\partial}^*(\mathfrak{G}\chi_D v - (\widetilde{\mathfrak{G}\chi_D v})^+) \in H^2_{loc}(\mathbb{C}^n, \Lambda^{0,q-1}).$$

Обозначим через $(\mathfrak{G}\chi_D v)^+$ сужение $\mathfrak{G}\chi_D v$ на $\mathbb{C}^n \setminus D$.

$$\partial^\alpha(\mathfrak{G}\chi_D v)^+\big|_{\partial D^+} = \partial^\alpha(\widetilde{\mathfrak{G}\chi_D v})^+\Big|_{\partial D^-}, \ |\alpha| \le 2.$$

В итоге получаем, что

$$\partial^\beta(\widetilde{\mathfrak{G}\chi_D v})^+\Big|_{\partial D^-} = \partial^\beta(\mathfrak{G}\chi_D v)^+\big|_{\partial D^+} = \partial^\beta(\mathfrak{G}\chi_D v)^-\big|_{\partial D^-}, \ |\beta| = 1.$$

Отсюда следует равенство нулю коэффициентов формы w на границе области D.

Далее, так как $w = 0$ на ∂D, получаем, что

$$\int\limits_{\partial D} \varphi \wedge w = 0$$

для всех форм φ бистепени $(n, n-q-1)$ с коэффициентами из класса $C^\infty(\overline{D})$. Это означает, что касательная часть $\tau(w) = 0$ на ∂D. Более того, касательная часть $\tau(\overline{\partial} w) = 0$ на ∂D. Действительно,

$$\int\limits_{\partial D} \psi \wedge \overline{\partial} w = \int\limits_{D} \overline{\partial}\psi \wedge \overline{\partial} w = -\int\limits_{\partial D} \overline{\partial}\psi \wedge w = 0$$

для всех форм ψ бистепени $(n, n-q-2)$ с коэффициентами из класса $C^\infty(\overline{D})$.

Кроме того, так как $\mathfrak{G}\chi_D v \in H^2_{loc}(\mathbb{C}^n, \Lambda^{0,q})$, форма $h = \overline{\partial}(\,\mathfrak{G}\chi_D v - (\widetilde{\mathfrak{G}\chi_D v})^+\,)$ бистепени $(0, q+1)$ также равна нулю на ∂D. В частности, $\nu(h) = 0$ на ∂D, так как

$$\int\limits_{\partial D} \varphi \wedge *h = 0$$

для всех форм φ бистепени $(q, 0)$ с коэффициентами из класса $C^\infty(\overline{D})$. Более того, нормальная часть $\nu(\overline{\partial}^* h) = 0$ на ∂D. Действительно,

$$\int\limits_{\partial D} \psi \wedge \partial * h = \int\limits_{D} \partial\psi \wedge \partial * h = \int\limits_{\partial D} \partial\psi \wedge *h = 0$$

для всех форм ψ бистепени $(q-1, 0)$ с коэффициентами из класса $C^\infty(\overline{D})$.

Поскольку $\mathfrak{G}(\zeta, z)$ есть фундаментальное решение оператора Лапласа, то $\Delta(\mathfrak{G}\chi_D v) = \chi_D v$. Форма $(\widetilde{\mathfrak{G}\chi_D v})^+ \in H^3_{loc}(\mathbb{C}^n, \Lambda^{0,q})$, а значит $\Delta(\widetilde{\mathfrak{G}\chi_D v})^+ \in H^1_{loc}(\mathbb{C}^n, \Lambda^{0,q})$, откуда следуют равенства

$$\Delta(\widetilde{\mathfrak{G}\chi_D v})^+\Big|_{\partial D^-} = \Delta(\widetilde{\mathfrak{G}\chi_D v})^+\Big|_{\partial D^+} = \Delta(\mathfrak{G}\chi_D v)^+\big|_{\partial D^+} = 0, \text{ т.е. } \Delta(\widetilde{\mathfrak{G}\chi_D v})^+ = 0 \text{ на } \partial D.$$

В итоге получаем следующие равенства на ∂D:

$$\nu(\overline{\partial}w) = \nu\,(\,\overline{\partial}\overline{\partial}^*(\mathfrak{G}\chi_D v - (\widetilde{\mathfrak{G}\chi_D v})^+)\,) =$$
$$= \nu\,(\,(\,\overline{\partial}\overline{\partial}^* + \overline{\partial}^*\overline{\partial}\,)(\mathfrak{G}\chi_D v - (\widetilde{\mathfrak{G}\chi_D v})^+) - \overline{\partial}^*\overline{\partial}\,(\mathfrak{G}\chi_D v - (\widetilde{\mathfrak{G}\chi_D v})^+)\,) =$$
$$= \nu\,(\,\Delta(\mathfrak{G}\chi_D v - (\widetilde{\mathfrak{G}\chi_D v})^+)\,) - \nu\,(\overline{\partial}^* h) = \nu(v) - \nu\,(\,\Delta(\widetilde{\mathfrak{G}\chi_D v})^+\,) = \nu(v).$$

Зная, что $\tau(\overline{\partial}w) = 0$ на ∂D и $\nu(\overline{\partial}w) = \nu(v)$ на ∂D, мы имеем

$$\tau(u) = \tau(v - \overline{\partial}w) = 0 \text{ на } \Gamma, \quad \nu(u) = \nu(v - \overline{\partial}w) = 0 \text{ на } \Gamma.$$

Это в свою очередь означает, что коэффициенты формы u равны нулю на Γ. □

При $q = 0$ задачи 2 и 3 совпадают.

2. Условия разрешимости задачи

Перейдем к изучению условий разрешимости задач 2 и 3.

Из свойств комплекса Дольбо следует, что необходимым условием разрешимости задач 1, 2 и 3 является равенство

$$\overline{\partial}f = 0 \text{ в смысле распределений в } D. \tag{1}$$

Кроме того, данные Коши задач 2 и 3 должны удовлетворять дополнительным условиям согласования на Γ.

Лемма 2. *Если задача 3 разрешима, то*

$$\int_D f \wedge \overline{\partial}\varphi = 0 \ \textit{для всех } \varphi \in C^\infty_{comp}(D \cup \Gamma, \Lambda^{n,n-q-2}). \tag{2}$$

Доказательство. Следует из формулы Стокса. □

Условие (2) означает, что форма f является $\overline{\partial}$-замкнутой в смысле распределений в D, а ее касательная часть равна нулю на Γ в некотором слабом смысле (если коэффициенты формы принадлежат, например, $H^1(D)$, то это справедливо и в смысле обычного понимания следов коэффициентов на Γ).

Ясно также, что условие (2) является необходимым и для разрешимости задачи 2.

Обозначим теперь через $U_{0,q}(\zeta, z)$ при $0 \leqslant q \leqslant n-1$ ядра Бохнера-Мартинелли-Коппельмана:

$$U_{0,q}(\zeta, z) = {\sum_I}' \sum_{k \notin I} \sigma(I,k)\,\frac{\partial\mathfrak{G}}{\partial\zeta_k}\,d\bar{\zeta}\,[I \cup k] \wedge d\zeta\, d\bar{z}_I,$$

где $I \cup k$ обозначает мультииндекс $I = (i_1, \ldots, i_q)$, к которому добавлен индекс k. Знак $\sigma(I,k)$ определяется равенством $d\bar{\zeta}_k \wedge d\bar{\zeta}_I \wedge d\bar{\zeta}[I \cup k] = \sigma(I,k)d\bar{\zeta}$. Форма $U_{0,q}$ понимается как двойная дифференциальная форма бистепени $(0,q)$ по z и бистепени $(n, n-q-1)$ по ζ. По определению $U_{0,-1} = U_{0,n} = 0$.

Для $u \in H^1(D, \Lambda^{0,q})$ рассмотрим интеграл Бохнера-Мартинелли-Коппельмана, определенный следующим образом:

$$(M_{\partial D}u)(z) = \int_{\partial D} u(\zeta) \wedge U_{0,q}(\zeta, z), \quad z \notin \partial D$$

(см., например, [13]). Хорошо известно, что он зависит только от касательной части формы u. Этот интеграл индуцирует непрерывный линейный оператор

$$M_{\partial D} : H^1(D, \Lambda^{0,q}) \to H^1(D, \Lambda^{0,q})$$

(см., например, [14, лемма 2.2]). Фактически он непрерывен, поскольку является производной потенциала простого слоя.

Кроме того, для $f \in L^2(D, \Lambda^{0,q+1})$ введем в рассмотрение интеграл

$$(P_D f)(z) = -\int_D f(\zeta) \wedge U_{0,q}(\zeta, z).$$

Этот интеграл индуцирует непрерывный линейный оператор

$$P_D : H^1(D, \Lambda^{0,q}) \to H^2(D, \Lambda^{0,q-1}),$$

(см., например, [14]). Он непрерывен, поскольку служит производной объемного потенциала. Отсюда, в частности, следует, что

$$P_D : L^2(D, \Lambda^{0,q}) \to H^1_{loc}(\mathbb{C}^n, \Lambda^{0,q-1}).$$

Легко понять, что эти операторы являются ограниченными и на ограниченных областях в дополнении $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$. Если мы хотим подчеркнуть, что операторы $M_{\partial D}$ и P_D рассматриваются в области D, то будем писать $M^-_{\partial D}$ и P^-_D, а вне области $M^+_{\partial D}$ и P^+_D.

Отметим также, что форма $M_{\partial D} u$ имеет гармонические коэффициенты вне границы ∂D, а форма $P_D f$ имеет гармонические коэффициенты вне замыкания области $\mathbb{C}^n \setminus \overline{D}$.

Лемма 3. *Для всякой дифференциальной формы $u \in H^1(D, \Lambda^{0,q})$ справедлива формула Бохнера-Мартинелли-Коппельмана:*

$$M_{\partial D} u + \overline{\partial} P_D u + P_D \overline{\partial} u = \chi_D u. \tag{3}$$

Доказательство. Подробное доказательство может быть найдено в работе [13]. □

С учетом формулы Бохнера-Мартинелли-Коппельмана интеграл $P_D f$ содержит достаточно информации о решении задачи Коши 2, если оно существует.

Дальнейшей целью будет получение критерия разрешимости задачи Коши с помощью интеграла $P_D f$. Для этого выберем область D^+ так, чтобы множество $\Omega = D \cup \Gamma \cup D^+$ было областью с кусочно-гладкой границей.

Обозначим через $(P_D f)^{\pm}$ сужение $P_D f$ на $D^{\pm}$. Тогда, в силу вышесказанного $P_D f \in H^1(\Omega, \Lambda^{p,q})$, и, кроме того, коэффициенты формы $(P_D f)^+$ гармоничны в D^+.

Теорема 1. *Задача Коши 2 разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (2) и существует дифференциальная форма Φ из класса $H^1(\Omega, \Lambda^{0,q})$, равная $(P_D f)^+$ в D^+ и такая, что $\overline{\partial} \Delta \Phi = 0$ в смысле распределений в Ω.*

Доказательство. Пусть задача 2 разрешима для формы f. Обозначим через u какое-нибудь ее решение. Необходимость условия (2) отмечена нами выше.

Так как коэффициенты формы u исчезают на Γ, то форма $\chi_D u$ принадлежит не только пространству $L^2(\Omega, \Lambda^{0,q})$, но и пространству $H^1(\Omega, \Lambda^{0,q})$.

Положим

$$\Phi = P_D f - \chi_D u. \tag{4}$$

По построению $\Phi \in H^1(\Omega, \Lambda^{0,q})$. Поэтому, по формуле Бохнера-Мартинелли-Коппельмана (3), мы имеем

$$\Phi = P_D f - \chi_D u = -M_{\partial D \setminus \Gamma} u - \overline{\partial} P_D u.$$

Применим к дифференциальной форме Φ оператор Лапласа (в смысле распределений в Ω). Так как в пространстве $\mathbb{C}^n$, $n > 1$ операторы $\overline{\partial}$ и $\Delta = \overline{\partial}^* \overline{\partial} + \overline{\partial}\, \overline{\partial}^*$, примененные к дифференциальной форме бистепени (p, q), $q > 0$, перестановочны, получаем, что, в смысле распределений в области Ω,

$$\Delta\Phi = -\Delta(M_{\partial D \setminus \Gamma} u + \overline{\partial} P_D u) = -\overline{\partial}(\Delta P_D u). \tag{5}$$

В итоге имеем, что $\overline{\partial}\Delta\Phi = 0$ в смысле распределений в Ω.

Обратно, пусть существует форма $\Phi \in H^1(\Omega, \Lambda^{0,q})$, совпадающая с $(P_D f)^+$ в D^+, такая, что $\overline{\partial}\Delta\Phi = 0$ в смысле распределений в Ω. Положим

$$\chi_D u = P_D f - \Phi. \tag{6}$$

По построению $u \in H^1(D, \Lambda^{0,q})$. Тогда, так как $P_D f \in H^1(\Omega, \Lambda^{0,q})$,

$$u = P_D f - \Phi = (P_D f)^- - (P_D f)^+ = 0 \text{ на } \Gamma.$$

Для завершения доказательства нам осталось убедиться, что $\overline{\partial} u = f$ в D. С этой целью рассмотрим в Ω форму $\chi_D(f - \overline{\partial} u)$ бистепени $(0, q+1)$ с коэффициентами из пространства $L^2(\Omega)$.

Применим в смысле распределений в Ω оператор Лапласа к форме $\chi_D(f - \overline{\partial} u)$:

$$\langle \chi_D(f - \overline{\partial} u), \Delta\psi \rangle_\Omega = \int\limits_D (f - \overline{\partial} u) \wedge \Delta\psi = \int\limits_D f \wedge \Delta\psi - \int\limits_D \overline{\partial} u \wedge \Delta\psi$$

для всех форм ψ бистепени $(n, n-q-1)$ с коэффициентами из класса $C^\infty_{comp}(\Omega)$.

Далее из (6) получаем, что

$$\int\limits_D \overline{\partial} u \wedge \Delta\psi = \int\limits_D (\overline{\partial} P_D f - \overline{\partial}\Phi) \wedge \Delta\psi = \int\limits_D \overline{\partial} P_D f \wedge \Delta\psi - \int\limits_D \overline{\partial}\Phi \wedge \Delta\psi.$$

Так как $\overline{\partial}\Delta\Phi = \Delta\overline{\partial}\Phi = 0$ в смысле распределений в Ω, второй интеграл в последнем выражении есть ноль. Используя равенство $\overline{\partial}\Delta = \Delta\overline{\partial}$, получаем, что

$$\int\limits_D \overline{\partial} P_D f \wedge \Delta\psi = -\int\limits_D P_D f \wedge \Delta(\overline{\partial}\psi) = -\int\limits_D \overline{\partial}^* f \wedge \overline{\partial}\psi$$

для всех форм ψ бистепени $(n, n-q-1)$ с коэффициентами из класса $C^\infty_{comp}(\Omega)$.

С другой стороны, используя тот факт, что $\overline{\partial} f = 0$ в смысле распределений в D, получаем следующую цепочку равенств:

$$\int\limits_D f \wedge \Delta\psi = \int\limits_D f \wedge (\overline{\partial}^* \overline{\partial} + \overline{\partial}\overline{\partial}^*)\psi = \int\limits_D f \wedge \overline{\partial}^* \overline{\partial}\psi = -\int\limits_D \overline{\partial}^* f \wedge \overline{\partial}\psi$$

для всех форм ψ бистепени $(n, n-q-1)$ с коэффициентами из класса $C^\infty_{comp}(\Omega)$.

Таким образом, форма $\chi_D(f - \overline{\partial} u)$ имеет в Ω гармонические коэффициенты, исчезающие в $\Omega \setminus \overline{D}$. Из теоремы единственности для гармонических функций следует, что ее коэффициенты тождественно равны нулю в Ω, а значит, $f = \overline{\partial} u$ в D. $\square$

Следствие 1. *Задача Коши 2 разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (2) и существует дифференциальная форма* Φ *из класса* $H^1(\Omega, \Lambda^{0,q})$*, равная* $(P_D f)^+$ *в* D^+ *и такая, что* $\Delta\Phi = 0$ *является* $\overline{\partial}$*-точной в* Ω *в смысле распределений.*

Доказательство. Так как всякая $\overline{\partial}$-точная форма является $\overline{\partial}$-замкнутой, то достаточность условий следствия 1 вытекает из теоремы 1. Необходимость условия (2) нами доказана в лемме 2. Наконец, необходимость второго условия вытекает из теоремы 1 и формулы (5). □

Следствие 2. *Задача Коши 2 разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (2) и существует дифференциальная форма* Φ *из класса* $H^1(\Omega, \Lambda^{0,q})$*, равная* $(P_D f)^+$ *в* D^+*, такая, что* $[\Delta\Phi] = 0$ *в* $H_q(H^1(\Omega))$*.*

Теорема 2. *Задача Коши 2 разрешима тогда и только тогда, когда выполнено условие (2) и существует дифференциальная форма* Ψ *из класса* $H^1(\Omega, \Lambda^{0,q})$*, когомологичная* $(P_D f)^+$ *в* D^+*, такая, что* $\Delta\Psi = 0$ *в* Ω*.*

Доказательство. Пусть задача 2 разрешима для формы f. Обозначим через u какое-нибудь ее решение. Необходимость условия (2) отмечена нами выше.

Так как коэффициенты формы u исчезают на Γ, то форма $\chi_D u$ принадлежит не только пространству $L^2(\Omega, \Lambda^{0,q})$, но и пространству $H^1(\Omega, \Lambda^{0,q})$.

Положим

$$\Psi = P_D f + \overline{\partial} P_D u - \chi_D u. \tag{7}$$

По построению форма $\Psi \in H^1(\Omega, \Lambda^{0,q})$, действительно, $P_D f \in H^1(\Omega, \Lambda^{0,q})$, а $P_D u = \mathfrak{G}\, \overline{\partial}^* \chi_D u \in H^2(\Omega, \Lambda^{0,q-1})$. По формуле Бохнера-Мартинелли-Коппельмана (3) мы имеем

$$\Psi = P_D f + \overline{\partial} P_D u - \chi_D u = -M_{\partial D \setminus \Gamma} u,$$

где дифференциальная форма $M_{\partial D \setminus \Gamma} u$ является гармонической в Ω как интеграл, зависящий от параметра, т.е. $\Delta M_{\partial D \setminus \Gamma} u = 0$ в Ω.

Обратно, пусть существует форма $\Psi \in H^1(\Omega, \Lambda^{0,q})$, когомологичная $(P_D f)^+$ в D^+, такая, что $\Delta\Psi = 0$ в смысле распределений в Ω. Положим

$$U = P_D f + \overline{\partial} R - \Psi. \tag{8}$$

По построению $U \in H^1(\Omega, \Lambda^{0,q})$, так как $P_D f$ и $\overline{\partial} R \in H^1(\Omega, \Lambda^{0,q})$,

$$U = P_D f + \overline{\partial} R - \Psi = (P_D^- f - P_D^+ f) + (\overline{\partial} P_D^- u - \overline{\partial} P_D^+ u) = 0 \text{ в } D^+.$$

Для завершения доказательства нам осталось убедиться, что $\overline{\partial} U = f$ в D. С этой целью рассмотрим в Ω форму $\chi_D(f - \overline{\partial} U)$ бистепени $(0, q+1)$ с коэффициентами из пространства $L^2(\Omega)$.

Применим в смысле распределений в Ω оператор Лапласа к форме $\chi_D(f - \overline{\partial} U)$:

$$\langle \chi_D(f - \overline{\partial} U), \Delta\psi \rangle_\Omega = \int_D (f - \overline{\partial} U) \wedge \Delta\psi = \int_D f \wedge \Delta\psi - \int_D \overline{\partial} U \wedge \Delta\psi$$

для всех форм ψ бистепени $(n, n-q-1)$ с коэффициентами из класса $C^\infty_{comp}(\Omega)$.

Далее из (8) получаем, что

$$\int\limits_D \overline{\partial} U \wedge \Delta\psi = \int\limits_D \overline{\partial}(P_D f + \overline{\partial} R - \Psi) \wedge \Delta\psi = \int\limits_D \overline{\partial} P_D f \wedge \Delta\psi - \int\limits_D \overline{\partial}\, \Psi \wedge \Delta\psi.$$

Так как $\Delta(\overline{\partial}\,\Psi) = \overline{\partial}(\Delta\Psi) = 0$ в смысле распределений в Ω, второй интеграл в последнем выражении есть ноль. Используя равенство $\overline{\partial}\Delta = \Delta\overline{\partial}$, получаем, что

$$\int\limits_D \overline{\partial} P_D f \wedge \Delta\psi = -\int\limits_D P_D f \wedge \Delta(\overline{\partial}\psi) = -\int\limits_D \overline{\partial}^* f \wedge \overline{\partial}\psi$$

для всех форм ψ бистепени $(n, n-q-1)$ с коэффициентами из класса $C^\infty_{comp}(\Omega)$.

С другой стороны, используя тот факт, что $\overline{\partial} f = 0$ в смысле распределений в D, получаем следующую цепочку равенств:

$$\int\limits_D f \wedge \Delta\psi = \int\limits_D f \wedge (\overline{\partial}^*\overline{\partial} + \overline{\partial}\overline{\partial}^*)\psi = \int\limits_D f \wedge \overline{\partial}^*\overline{\partial}\psi = -\int\limits_D \overline{\partial}^* f \wedge \overline{\partial}\psi$$

для всех форм ψ бистепени $(n, n-q-1)$ с коэффициентами из класса $C^\infty_{comp}(\Omega)$.

Таким образом, форма $\chi_D(f - \overline{\partial} U)$ имеет в Ω гармонические коэффициенты, исчезающие в $\Omega \setminus \overline{D}$. Из теоремы единственности для гармонических функций следует, что ее коэффициенты тождественно равны нулю в Ω, а значит $f = \overline{\partial} U$ в D. $\square$

Многочисленные примеры показывают, что зачастую необходимым условием разрешимости задачи Коши 2 будет условие гармоничности формы Φ, а не только равенства $\Delta\Phi$ нулю в когомологиях, как в следствии 2.

Например, пусть $D = \{z \in \mathbb{C}^2 : 1 < |z| < 2\}$ — шаровой слой в $\mathbb{C}^2$, а $\Gamma = \{|z| = 1\}$. Рассмотрим дифференциальную форму $f = -z_2\, d\overline{z}_1 \wedge d\overline{z}_2$. Легко проверить, что дифференциальная форма f удовлетворяет необходимым условиям разрешимости задачи Коши (1) и (2). Теперь, зная одно из решений $u = (1 - |z|^2)\, d\overline{z}_1$ задачи Коши 2, покажем, что форма Φ, задаваемая равенством (4), имеет гармонические коэффициенты. Действительно,

$$\Delta\Phi = \Delta(P_D f - \chi_D u) = -\overline{\partial}^* f - \Delta\chi_D u.$$

Далее, свойства оператора Ходжа (см., например, [10, с. 154]) и простой арифметический подсчет дают нам следующие равенства: $\overline{\partial}^* f = - * \partial * f = 2\, d\overline{z}_1$, а $\Delta\chi_D u = -2\, d\overline{z}_1$, из которых сразу же извлекаем информацию о гармоничности формы Φ.

Мы предполагаем, что такого типа результат может быть получен и в общем случае, если искать некоторое специально выделенное решение задачи Коши 2.

Работа выполнена в рамках гранта президента России поддержки ведущих научных школ НШ-2427.2008.1 и гранта СФУ по молодежным проектам за 2009 г.

Автор благодарен А.А.Шлапунову за внимание к работе и сделанные замечания.

Список литературы

[1] Л.А.Айзенберг, Формулы Карлемена в комплексном анализе. Первые приложения, Новосибирск, Наука, 1990.

[2] H.Lewy, An example of a smooth linear partial differential equation without solution, *Ann. Math.*, **66**(1957), 155-158.

[3] A.Andreotti, C.D.Hill, E.E.Levi convexity and the Hans Lewy problem. I, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa*, **26**(1972), №3, 325-363.

[4] M.Nacinovich, B.W.Schulze, N.Tarkhanov, *On Carleman formulas for the Dolbeault cohomology*, *Ann. Univ. Ferrara, Ser. VII, Sc. Mat.*, Suppl. Vol. XLV(1999), 253-262.

[5] J.Brinkschulte, C.D.Hill, On the Cauchy problem for the $\overline{\partial}$ operator, *Ark. Mat.*, (2008), 1-11.

[6] И.В.Шестаков, О задаче Коши для когомологий Дольбо, Автореф. дис. ... канд. физ-матем. наук, СФУ, Красноярск, 2009.

[7] Л.А.Айзенберг, А.М.Кытманов, О возможности голоморфного продолжения в область функций, заданных на куске ее границы, *Мат. сб.*, **182**(1991), №4, 490-597.

[8] Д.П.Федченко, А.А.Шлапунов, О задаче Коши для многомерного оператора Коши – Римана в пространстве Лебега L^2 в области, *Мат. сб.*, **199**(2008), №11, 141-160.

[9] Г.М.Хенкин, Метод интегральных представлений в комплексном анализе, *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики(фундаментальные направления),* М., ВИНИТИ, **7**(1985), 23-124.

[10] А.М.Кытманов, Интеграл Бохнера-Мартинелли и его применения, Новосибирск, Наука, 1992.

[11] Ю.В.Егоров, М.А.Шубин, Линейные дифференциальные уравнения с частными производными. Основы классической теории, *Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления,* М., ВИНИТИ, **30**(1988), 1-264.

[12] J.J.Kohn, Subellipticity of the $\overline{\partial}$-Neumann problem on pseudo-convex domains: sufficient conditions, *Acta Math.*, **142**(1979), №1-2, 79-122.

[13] Л.А.Айзенберг, Ш.А.Даутов, Дифференциальные формы, ортогональные голоморфным функциям или формам, и их свойства, Новосибирск, Наука, 1975.

[14] A.A.Shlapunov, N.N.Tarkhanov, Green's Formulas in Complex Analysis, *Journ. of Math. Sciences*, **120**(2004), №6, 1868-1900.

On the Cauchy Problem for the Dolbeault Complex in the Sobolev spaces

Dmitry P.Fedchenko

Let D be a bounded domain in $\mathbb{C}^n$ $(n > 1)$ with a twice smooth boundary ∂D. We describe necessary and sufficient Cauchy problem's solvability conditions for the Dolbeault complex in the space of differential forms of bidegree $(0, q)$, $0 < q < n$ with coefficients from the Sobolev space $H^1(D)$ in the domain D.

Keywords: Cauchy problem, Cauchy-Riemann operator, Dolbeault complex.