На правах рукописи

Рогозина Марина Степановна

О корректности задачи Коши для полиномиальных разностных операторов

01.01.01 вещественный, комплексный

и функциональный анализ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Красноярск 2015

Работа выполнена в ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет».

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, доцент Лейнартас Евгений Константинович.
Официальные оппоненты:	Капцов Олег Викторович, доктор физико-математических наук, профессор, Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт вычислительного моделирования СО РАН, отдел вычислительных моделей в гидрофизике, ведущий научный сотрудник; Яковлев Евгений Иосифович, кандидат физико-математических наук, Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Сибирский государственный аэрокосмический университет имени академика М.Ф. Решетнева», кафедра высшей математики, доцент.
Ведущая организация:	Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего профессионального образования «Кемеровский государственный университет».

Защита состоится 29 мая 2015 г. в 15:00 на заседании диссертационного совета Д212.099.02 при ФГАОУ ВПО «Сибирский федеральный университет» по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. 8-06.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Сибирского федерального университета и на сайте http://www.sfu-kras.ru.

Автореферат разослан «__ » апреля 2015 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Федченко Дмитрий Петрович

Общая характеристика работы

Актуальность темы

Разностные уравнения возникают в различных областях математики. В комбинаторном анализе разностные уравнения в сочетании с методом производящих функций дают мощный аппарат исследования перечислительных задач[1,2]. Другой источник появления разностных уравнений — дискретизация дифференциальных. Так, дискретизация уравнения Коши-Римана привела к созданию теории дискретных аналитических функций[3,4], которая нашла применение в теории римановых поверхностей и комбинаторном анализе[5,6]. Методы дискретизации дифференциальной задачи являются важной составной частью теории разностных схем и также приводят к разностным уравнениям[7]. Разностной схемой обычно называют разностное уравнение, аппроксимируещее исходное дифференциальное уравнение и дополнительные (начальные, граничные) условия. В первой главе данной работы и последнем параграфе второй главы изучаются именно такие уравнения, поэтому здесь используется терминология этой теории, однако обозначения теории схем не очень удобны, и мы используем обозначения классической теории конечно-разностных уравнений.

Оператор сдвига δ_j по переменной x_j определяется следующим образом: $\delta_j f(x) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + 1, x_{j+1}, \ldots, x_n)$, а полиномиальный разностный оператор имеет вид $P(\delta) = \sum\limits_{\alpha\in A} c_\alpha \delta^\alpha$, где A — конечное подмножество целочисленной решетки, c_α — коэффициенты, $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$,

[1] Стенли Р. Перечислительная комбинаторика: Пер. с англ. М.: Мир, 1990. 440с.

[2] Стенли Р. Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции: Пер. с англ. – М.: Мир, 2005. – 767 с.

[3] Duffin R.J. Basic Properties of Discrete Analytic Functions // Duke Math. J. 1956. Vol. 23. P. 335-363.

[4] Duffin R.J. Potential theory on rhombic lattice // J. Combinatorial Theory 1968. Vol. 5. P. 258-272.

[5] Данилов О.А. Медных А.Д. Дискретные аналитические функции многих переменных и формула Тейлора // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, вып. 2. С. 38 46.

[6] Данилов О.А. Интерполяционная формула Лагранжа для дискретной аналитической функции // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. 2008. Т. 8. вып. 4. С. 33-39.

[7] Самарский А.А. Введение в теорию разностных схем, М.: Наука, 1971. – 552 с.

$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\delta^\alpha = \delta_1^{\alpha_1}\delta_2^{\alpha_2}\ldots\delta_n^{\alpha_n}$.

Рассматривается уравнение

$$P(\delta)f(x) = g(x), \quad x \in X, \tag{1}$$

где $f(x)$ — неизвестная, а $g(x)$ — заданная на некотором фиксированном множестве $X \subset \mathbb{Z}^n$ функция. Из множества X выделим подмножество $X_0 \subset X$ «начальных» («граничных») точек и сформулируем задачу:

найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую уравнению (1) и совпадающуя на X_0 с заданной функцией

$$f(x) = \varphi(x), \quad x \in X_0. \tag{2}$$

Задачу (1)–(2) будем называть задачей Коши для полиномиального разностного оператора $P(\delta)$.

В одномерном случае, как правило, в качестве X берутся целые неотрицательные числа $X = \mathbb{Z}_+$, а в качестве $X_0 = (0, 1, ..., m-1)$. При этих условиях задача (1)–(2) очевидным образом имеет единственное решение.

В многомерном случае существование и единственность решения задачи (1)–(2) зависят от всех объектов, участвующих в ее постановке: разностного оператора $P(\delta)$, множеств X и X_0. Разрешимость задачи (1)–(2) означает разрешимость бесконечной системы уравнений относительно бесконечного числа неизвестных $f(x)$, $x \in X$. Если при подходящем упорядочении неизвестных и уравнений матрица этой системы нижнетреугольная, то ее разрешимость очевидна и в этом случае будем говорить о явной разностной схеме. В противном случае задачу (1)–(2) будем называть неявной разностной схемой, и проблема ее разрешимости нетривиальна и выходит на первый план. Приведем некоторые типичные ситуации.

В первой из них, возникающей, как правило, в комбинаторном анализе, $X = \mathbb{Z}_+^n$, а выбор множества, на котором задаются начальные данные, X_0

зависит от свойств характеристического полинома P[8,9].

Во второй $X = \{x \in \mathbb{Z}^n,\ x_n \geqslant 0\}$ и в качестве множества $X_0 \subset X$ берем $X_0 = \{x \in X : x_n = 0, 1, \ldots, m-1\}$, а характеристический многочлен имеет моном старшей степени m по переменной x_n[10]. Такого рода разностные операторы появляются в теории разностных схем, например, при дискретизации уравнений математической физики, и называются они линейными многослойными разностными схемами с постоянными коэффициентами. Коэффициенты разностного оператора при этом зависят от параметров сетки. Если же характеристический многочлен имеет несколько мономов старшей степени m по этой переменной, то они называются неявными многослойными линейными разностными схемами.

Теория разностных схем изучает способы построения разностных схем, исследует корректность разностных задач и сходимость решения разностной задачи к решению исходной дифференциальной задачи, занимается обоснованием алгоритмов решения разностных задач. Важное место среди этих свойств *занимает корректность.*

Для функции $f : X \to \mathbb{C}$ обозначим $\|f\| = \sup\limits_X |f(x)|$.

Говорят, что *задача вида (1)–(2) для полиномиального разностного оператора $P(\delta)$ поставлена корректно, если выполнены условия:*

а) задача однозначно разрешима при любых начальных данных $\varphi(x)$ и правых частях $g(x)$;

б) существуют постоянные $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ такие, что при любых $g(x)$ и $\varphi(x)$ справедлива оценка

$$\|f(x)\| \leqslant M_1 \|g(x)\| + M_2 \|\varphi(x)\|. \tag{3}$$

Отметим, что при выполнении условия б) разностный оператор называется устойчивым.

Таким образом, разностная задача (1)–(2) *поставлена корректно, если*

---

[8]Bousquet-Melou, M. Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case / M. Bousquet-Melou, M. Petkovšek // Discrete Mathematics. 2000. V. 225. P. 51 75.

[9]Лейнартас Е.К. Кратные ряды Лорана и разностные уравнения, Сиб. матем. журн., 45 (2004), 387 393.

[10]Федорюк М.В. Асимптотика: интегралы и ряды, М.:Наука, 1987. 544 с.

она для любых φ и g имеет единственное решение и устойчива.

Устойчивость задач вида (1)–(2) в случае одного переменного исследуется в рамках теорий дискретных динамических систем и цифровых рекурсивных фильтров[11,12]. Различные варианты определения устойчивости в случае $n = 1$ для однородного линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами означают, *что все корни характеристического уравнения по модулю не превосходят единицу, а если корень по модулю равен единице, то он простой. Для неоднородного уравнения критерий устойчивости состоит в том, что корни по модулю меньше единицы.*

В диссертационной работе при исследовании устойчивости многослойных явных разностных схем используется терминология теории амеб алгебраических гиперповерхностей. Понятие амебы позволяет сформулировать многомерный аналог условия, что все корни характеристического многочлена лежат в единичном круге, т.е. условия устойчивости многомерных разностных схем.

Цель диссертации

Целью диссертационной работы является отыскание условий разрешимости различных вариантов задачи Коши для полиномиальных разностных операторов и ее устойчивости в случае явных разностных схем.

Методы исследования

В работе рассматриваются полиномиальные разностные операторы, основным источником появления которых является теория разностных схем. В исследовании корректности разностных операторов используется терминология этой теории, методы линейной алгебры, математического анализа, а также методы теории амеб алгебраических гиперповерхностей.

[11] Даджион Д., Мерсеро О. Цифровая обработка многомерных сигналов. М.: Мир, 1988.

[12] Изерман Р. Цифровые системы управления. М.: Мир, 1984. - 541 с.

Научная новизна

Все основные результаты диссертации являются новыми, представляют научный интерес и состоят в следующем:

дан критерий, а также приведено легко проверяемое достаточное условие разрешимости задачи Коши с начально-краевыми условиями типа Рикье для полиномиального разностного оператора с постоянными коэффициентами;

доказано, что разрешимость задачи Коши эквивалентна существованию некоторого определенного мономиального базиса в факторе кольца полиномов по идеалу, порожденному характеристическим многочленом;

получены формулы, в которых решение задачи Коши для однородных и неоднородных многослойных явных разностных схем выражается через фундаментальное решение и начальные данные;

используя эти формулы, в терминах теории амеб алгебраических гиперповерхностей найдены как необходимые, так и достаточные условия устойчивости однородных многослойных явных разностных схем. Для неоднородной схемы доказан критерий устойчивости.

Практическая и теоретическая ценность

Результаты представляют теоретический интерес и могут быть применены в теории разностных схем и теории дискретных динамических систем.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на

1) Красноярском городском научном семинаре по комплексному анализу и алгебраической геометрии (СФУ, 2011-2014 гг.);

2) 50-ой международной научной конференции «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2012 г.);

3) Четвертом Российско-армянском совещании по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам (Красноярск, 2012 г.);

4) 51-ой международной научной конференции «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2013 г.);

5) IX Всероссийской научно-технической конференция студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием «Молодежь и наука» (Красноярск, 2013 г.).

Публикации

Основные результаты диссертации опубликованы в 5 статьях и тезисах. Все статьи опубликованы в изданиях из перечня, рекомендованного ВАК. Одна статья совместная, ее результаты получены в нераздельном соавторстве с Е.К. Лейнартасом.

Структура и объем работы

Диссертация состоит из введения, двух глав основного текста и списка литературы из 44 наименований. Содержит 4 рисунка. Общее число страниц диссертационной работы – 73.

Содержание работы

Во **введение** раскрывается актуальность темы диссертационного исследования, а также кратко перечисляются основные результаты. Основной текст разбит на две главы.

Первая глава посвящена исследованию корректности явных разностных схем и состоит из четырех параграфов.

Пусть δ_j оператор сдвига по j-ой переменной $\delta_j f(x) = f(x_1, \ldots, x_{j-1}, x_j + 1, x_{j+1}, \ldots, x_{n+1})$. Обозначим $P(\delta, \delta_{n+1}) = \sum\limits_{(\alpha,\beta)\in A} c_{\alpha,\beta}\delta^\alpha\delta_{n+1}^\beta$ — полиномиальный разностный оператор, т.е. $A = (\alpha, \beta)$ — конечное подмножество целочисленной решетки, и $\delta = (\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n)$, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\delta^\alpha = \delta_1^{\alpha_1}\delta_2^{\alpha_2}\ldots\delta_n^{\alpha_n}$. Рассмотрим разностные уравнения с постоянными коэффициентами такие, что $(0, m) \in A$

и для всех $(\alpha,\,\beta)\in A$, $(\alpha,\,\beta)\neq(0,\,m)$ выполняется условие $m>\beta$. (*)

В первом и втором параграфах рассматривается задача Коши для $(m+1)$–слойной линейной явной разностной схемы вида

$$\left[\delta_{n+1}^{m}+P_{m-1}\left(\delta\right)\delta_{n+1}^{m-1}+\cdots+P_{0}\left(\delta\right)\right]f\left(x,\,y\right)=g(x,\,y), \tag{4}$$

где $P_j\left(\delta\right)$ – полиномиальные разностные операторы с постоянными коэффициентами и $x=(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)\in\mathbb{Z}^n$.

Задача Коши для уравнения (4) формулируется следующим образом: *найти решение уравнения (4), удовлетворяющее начальным условиям*

$$f\left(x,\,y\right)=\varphi_y\left(x\right),\;\; y=0,\,1,\,\ldots,\,m-1, \tag{5}$$

где $\varphi_y\left(x\right)$ – заданные функции переменных $x=(x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n)\in\mathbb{Z}^n$.

Определение 3. *Решение $\mathcal{P}(x,y)$ разностного уравнения*

$$\sum_{(\alpha,\beta)\in A}c_{\alpha,\beta}\mathcal{P}(x+\alpha,y+\beta)=\delta_{(0,0)}(x,y),\ (x,y)\in\mathbb{Z}^{n+1},$$

где

$$\delta_{(0,0)}(x,y)=\begin{cases}0,\ \textit{если}\,(x,y)\neq(0,0)\,,\\ 1,\ \textit{если}\,(x,y)=(0,0)\,,\end{cases}$$

называется фундаментальным решением.

Определим две функции φ и μ на $\mathbb{Z}^{n+1}$:

$$\varphi(x,\,y)=\begin{cases}\varphi_y(x),\ \text{для } x\in\mathbb{Z}^n \text{и } y=0,\,1,\,...,\,m-1,\\ 0,\ \text{для } x\in\mathbb{Z}^n \text{и } y\geqslant m;\end{cases}$$

$$\mu(x,\,y)=\sum_{(\alpha,\,\beta)\in A}c_{\alpha,\beta}\varphi(x+\alpha,\,y+\beta),\,x\in\mathbb{Z}^n\text{и}-m\leqslant y<0.$$

Обозначим через $\Pi=\left\{(x,\,y)\in\mathbb{Z}^{n+1}:y\geqslant 0\right\}$ полупространство в $\mathbb{Z}^{n+1}$.

Теорема 2. *Если $f(x,\,y)$ решение неоднородной задачи Коши (4)–(5), то для $(x,\,y)\in\Pi$ справедлива формула $f(x,\,y)=f_0(x,\,y)+f^*(x,\,y)$,* где

$$f_0(x,\, y) = \sum_{(x',\, y')} \mu(x',\, y')\mathcal{P}(x - x',\, y - y'), \tag{6}$$

причем суммирование проводится по всем точкам $(x',\, y') \in \mathbb{Z}^{n+1}$, удовлетворяющим условию $-m \leqslant y' < 0$, а

$$f^*(x,\, y) = \sum_{(x',\, y')} g(x',\, y')\mathcal{P}(x - x',\, y - y'), \tag{7}$$

где суммирование проводится по всем точкам $(x',\, y') \in \mathbb{Z}^{n+1}$, удовлетворяющим условию $0 \leqslant y' \leqslant m - 1$. При этом для любого фиксированного $(x,\, y) \in \Pi$ число слагаемых для f_0 и f^* конечно.

Замечание. Отметим, что $f_0(x,\, y)$ — решение однородной задачи Коши, $f^*(x,\, y)$ — частное решение с нулевыми начальными данными.

Третий и четвертый параграфы посвящены исследованию устойчивости разностной схемы с использованием формул (6)–(7), выражающих решение через фундаментальное и методов теории амеб алгебраических гиперповерхностей. В третьем параграфе формулируются и доказываются необходимое и отдельно достаточное условия устойчивости задачи Коши для многослойной линейной однородной разностной схемы. В четвертом параграфе доказывается критерий устойчивости задачи Коши для многослойной линейной неоднородной разностной схемы.

Определение 1. *Многогранником Ньютона N_P многочлена $P\,(z,\, w)$ называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^{n+1}$ элементов множества A.*

Пусть $V = \big\{(z, w) \in \mathbb{C}^{n+1} \,:\, P\,(z,\, w) = 0\big\}$— множество нулей многочлена $P\,(z,\, w)$, оно называется характеристическим множеством.

Определение 2. *Амебой алгебраической гиперповерхности называется образ множества нулей V многочлена $P\,(z,\, w) = \sum\limits_{(\alpha,\, \beta) \in A} c_{\alpha,\beta} z^{\alpha} w^{\beta}$при отображении*

$$Log:\, (z, w) = (z_1, ..., z_n, w) \to (log|z_1|, ..., log|z_n|, log|w|) = (Log|z|, log|w|).$$

Отметим следующие свойства амебы.

Множество V, а значит и $LogV$, замкнуто, поэтому его дополнение открыто. Оно состоит из конечного числа связных выпуклых компонент.

Для произвольной функции $\varphi(x, y)$, заданной в «полупространстве» $\Pi = \{(x, y) \in \mathbb{Z}^{n+1} : y \geqslant 0\}$ определим ее норму следующим образом

$$\|\varphi\| = \sup_{(x,\, y)\in\Pi} |\varphi(x, y)| \,. \tag{8}$$

Определение 6. *Назовем однородную задачу (4)–(5) устойчивой, если существует константа $L > 0$ такая, что при любых ограниченных начальных данных (5) для соответствующего решения f выполняется неравенство*

$$\|f\| \leqslant L \,\|\varphi\| \,.$$

Теорема 3. *Пусть $E_{(0,m)}$ связная компонента дополнения амебы характеристического многочлена $P(z, w)$, соответствующая вершине $(0, m)$ многогранника Ньютона.*

1. Если задача Коши (4)–(5) устойчива, то начало координат принадлежит замыканию $E_{(0,m)}$, т.е. $(0, 0) \in \overline{E}_{(0,m)}$.

2. Если начало координат $(0, 0) \in E_{(0,m)}$, то задача Коши (4)–(5) устойчива.

В четвертом параграфе формулируется и доказывается критерий устойчивости задачи Коши для многослойной линейной неоднородной разностной схемы.

Определение 7. *Неоднородную задачу (4)–(5) назовем устойчивой, если существуют константы $M_1 > 0$, $M_2 > 0$ такие, что при любых ограниченных начальных данных (5) и ограниченной правой части $g(x, y)$ для соответствующего решения f выполняется неравенство*

$$\|f\| \leqslant M_1 \,\|\varphi\| + M_2 \,\|g\| \,.$$

Теорема 4. *Пусть $E_{(0,m)}$ связная компонента дополнения амебы характе-*

ристического многочлена $P(z,\, w)$, соответствующая вершине $(0,\, m)$ многогранника Ньютона. Неоднородная задача Коши (4)–(5) устойчива тогда и только тогда, когда начало координат принадлежит $E_{(0,m)}$, т.е. $(0,\, 0) \in E_{(0,m)}$.

Вторая глава посвящена исследованию неявных разностных схем и состоит она из четырех параграфов. Для неявных разностных схем нетривиальным является вопрос о существовании и единственности решения, т.е. о разрешимости задачи Коши.

В первом и третьем параграфах рассматривается полиномиальный разностный оператор порядка m

$$P\,(\delta) = \sum_{|\alpha| \leqslant m} c_\alpha \delta^\alpha,$$

где $\alpha = (\alpha_1,\, \ldots,\, \alpha_n)$ — мультииндекс, $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$, $\delta^\alpha = \delta_1^{\alpha_1}\, \ldots\, \delta_n^{\alpha_n}$, c_α — коэффициенты разностного оператора и разностные уравнения вида

$$P(\delta) f(x) = g(x), \;\; x \in \mathbb{Z}_+^n, \tag{9}$$

где $f(x)$ — неизвестная, а $g(x)$ — заданная на $\mathbb{Z}_+^n = \mathbb{Z}_+ \times \ldots \times \mathbb{Z}_+$ функция и $\mathbb{Z}_+$ — множество целых неотрицательных чисел.

Для двух точек $x,\, y$ целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$ неравенство $x \geqslant y$ означает, что $x_i \geqslant y_i$ для $i = 1,\, \ldots,\, n$, а запись $x \ngeqslant y$ означает, что найдется $i_0 \in \{1,\, \ldots,\, n\}$ такое, что $x_{i_0} < y_{i_0}$.

Фиксируем мультииндекс β такой, что

$$|\beta| = m \text{ и } c_\beta \neq 0. \tag{*}$$

Обозначим $X_{0,\beta} = \{x \in \mathbb{Z}_+^n : x \ngeqslant \beta\}$ и сформулируем задачу:

найти решение $f(x)$ уравнения (9), которое для $x \in X_{0,\beta}$ совпадает с заданной функцией $\varphi(x)$, т.е. удовлетворяет условию

$$f(x) = \varphi(x), x \in X_{0,\beta}. \tag{10}$$

Задачу (9)–(10) будем называть задачей Коши для полиномиального разностного оператора $P(\delta)$, а функцию $\varphi(x)$ — начальными данными этой задачи.

Если $\beta \neq (m, ..., 0)$ и $\beta \neq (0, ..., m)$, то условия (10) будем называть условиями типа Рикье.

Сформулируем легко проверяемое достаточное условие разрешимости задачи (9)–(10).

Теорема 5. *Если для коэффициентов полиномиального разностного оператора $P(\delta)$ выполнено условие*

$$|c_\beta| > \sum_{|\alpha|=m, \alpha\neq\beta} |c_\alpha|, \tag{11}$$

то задача (9)–(10) имеет единственное решение.

Возьмем произвольное $p \in \mathbb{Z}_+$. Неизвестные будем «нумеровать» элементами множества $J_p = \{y \in \mathbb{Z}^n_+ : |y| \leqslant p\}$ и упорядочим это множество однородно-лексикографическим способом. Уравнения «занумеруем» элементами двух множеств $I_p = \{x \in \mathbb{Z}^n_+ : |x| \leqslant p - m\}$ и $I_{\beta,p} = \{\mu \in X_{0,\beta} : |\mu| \leqslant p\}$. Если обозначить $\#M$ — число элементов конечного множества M, то нетрудно видеть, что $\#I_p + \#I_{\beta,p} = \#J_p$. Так как $I_{\beta,p} + \{\beta + I_p\} = J_p$, то элементам множества $I_{\beta,p}$ присвоим те же «номера», с которыми они входят в множество J_p, а элементам x множества I_p те «номера», с которыми $\beta + x$ входят в J_p.

Рассмотрим систему уравнений относительно конечного числа упорядоченных неизвестных $f(y)$, $y \in J_p$ вида

$$\sum_{|\alpha|\leqslant m} c_\alpha f(x + \alpha) = g(x),\ x \in I_p, \tag{12}$$

$$f(\mu) = \varphi(\mu), \mu \in I_{\beta,p}. \tag{13}$$

Обозначим $\triangle_{\beta,p}$ определитель системы уравнений (12)–(13).

Доказательство теоремы 5 опирается на следующую теорему.

Теорема 6. *Задача (9)–(10) для всех $\varphi(x)$ и $g(x)$ имеет единственное ре-*

шение тогда и только тогда, когда для всех $p = 0, 1, 2, \ldots$ определители $\triangle_{\beta,p} \neq 0$.

В случае разрешимости задачи (9)–(10) важную роль играет фундаментальное решение, так как через него можно выразить любое решение[13,14,15].

Формула для решения задачи (9)–(10) здесь отличается от формул главы 1.

Теорема 7. *Если задача (9)–(10) для любых $g(x)$ и $\varphi(x)$ имеет единственное решение $f(x)$, то для любого $x \in \mathbb{Z}_+^n$ его можно записать в виде*

$$f(x) = \sum_{y \geqslant 0,\, y \ngeqslant \beta} \varphi(y) \sum_{\nu \nleqslant y} c_\nu \mathcal{P}_\beta(x + \nu - y) + \sum_{y \geqslant 0} g(y) \mathcal{P}_\beta(x - y), \qquad (14)$$

где $\mathcal{P}_\beta$ — фундаментальное решение задачи (9)–(10). При этом для любого фиксированного $x \in \mathbb{Z}_+^n$ число слагаемых в суммах правой части формулы (14) конечно.

Во втором параграфе главы показано, что условия теоремы 6, обеспечивающие разрешимость задачи (9)–(10), также являются необходимыми и достаточными для существования мономиального базиса в факторкольце $\mathbb{C}[z]/\langle P(z)\rangle$, где $\langle P(z)\rangle$ — идеал, порожденный характеристическим многочленом $P(z)$ в кольце многочленов $\mathbb{C}[z]$.

Теорема 9. *Набор мономов $\{z^\mu\}_{\mu \in X_{0,\beta}}$ образует базис факторкольца $\mathbb{C}[z]/\langle P(z)\rangle$ тогда и только тогда, когда $\triangle_{\beta,p} \neq 0$ для всех $p = 0, 1, 2, \ldots$.*

В третьем параграфе главы теорема 5 доказана для двумерного случая другим методом. А именно, итерационным методом для двумерного разностного полиномиального оператора вводится понятие ассоциированной матрицы. Это ленточная матрица бесконечного порядка и ее невырожденность является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи (9)–(10) (лемма 4). Отметим еще теорему 10, в которой найдено обобщение хорошо известного рекуррентного соотношения для главных ми-

---

[13]Лейнартас Е.К. Кратные ряды Лорана и фундаментальные решения линейных разностных уравнений~// Сибирский математический журнал. 2007. Т.~48, \No~2. С. 335–341.

[14]Рогозина М.С. О разрешимости задачи Коши для полиномиального разностного оператора // Вестник НГУ. Математика, механика, информатика. 2014 (принята к печати).

[15]Рогозина М.С. Устойчивость многослойных разностных схем и амебы алгебраических гиперповерхностей // Журнал СФУ. Математика и физика. 2012. Т. 5, № 2. С. 256–263.

норов трехдиагональной матрицы.

В четвертом параграфе главы исследуется разрешимость многослойных неявных разностных схем в «полосе» целочисленной решетки.

Введем необходимые обозначения и определения.

Зададим «полосу» $\Pi = \{(x,\, y) \in \mathbb{Z}^2,\, 0 \leqslant x \leqslant B,\, y > 0\}$ в положительном октанте целочисленной решетки, число $B+1$ будем называть шириной «полосы» Π. Рассмотрим разностный полиномиальный оператор с постоянными коэффициентами вида

$$P(\delta_1, \delta_2) = \sum_{j=0}^{m} \sum_{i=0}^{b} c_{i,j} \delta_1^i \delta_2^j = \sum_{j=0}^{m} P_j(\delta_1) \delta_2^j, \tag{15}$$

где $P_j(\delta_1) = \sum\limits_{i=0}^{b} c_{i,j} \delta_1^i$, $j = 0, 1, ..., m$.

Степень m многочлена$P(z, w) = \sum\limits_{j=0}^{m} \sum\limits_{i=0}^{b} c_{i,j} z^i w^j$ по переменной w будем называть порядком разностного оператора $P(\delta_1, \delta_2)$ и предполагать, что $b < B$.

Зафиксируем β такое, что $c_{\beta,m} \neq 0$ и рассмотрим множество $\Pi_\beta = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_+^2 : 0 \leqslant x - \beta \leqslant B - b, y > m - 1\}$. Обозначим $L_\beta = \Pi \setminus \Pi_\beta$ и сформулируем следующую задачу:

найти решение разностного уравнения

$$P(\delta_1, \delta_2) f(x, y) = g(x, y),\ (x, y) \in \Pi \tag{16}$$

удовлетворяющее условию

$$f(x, y) = \varphi(x, y),\ (x, y) \in L_\beta, \tag{17}$$

где $g(x, y)$ и $\varphi(x, y)$ — заданные функции целочисленных аргументов.

Приведем легко проверяемое достаточное условие разрешимости задачи (16)-(17).

Теорема 11. *Если для коэффициентов полиномиального разностного опе-*

ратора $P(\delta_1, \delta_2)$ выполнено условие

$$|c_{\beta,m}| \geqslant \sum_{\alpha=0,\alpha\neq\beta}^{b} |c_{\alpha,m}|, \tag{18}$$

то задача (16)–(17) имеет единственное решение.

Зафиксируем целое p такое, что $p \geqslant m$ и будем рассматривать прямоугольник $\Pi^p = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant B, 0 \leqslant y \leqslant p\}$. Неизвестные будем «нумеровать» элементами множества Π^p и упорядочим это множество лексикографически. Уравнения будем «нумеровать» элементами двух множеств $\Pi^p_\beta = \{(x,\, y) : 0 \leqslant x \leqslant B - b, 0 \leqslant y \leqslant p - m\}$ и $L^p_\beta = \Pi^p \setminus \{(\beta,\, m) + \Pi^p_\beta\}$. Так как $L^p_\beta \cup \{(\beta,\, m) + \Pi^p_\beta\} = \Pi^p$, то элементам множества L^p_β присвоим те же «номера», с которыми они входят в множество Π^p, а элементам (x,y) множества Π^p_β — те «номера», с которыми $(\beta, m) + (x,y)$ входят в Π^p.

Получим систему уравнений относительно упорядоченных неизвестных $f(x,\, y)$, $(x,\, y) \in \Pi^p$, вида

$$P(\delta_1, \delta_2) f(x,y) = g(x,y), (x,y) \in \Pi^p_\beta, \tag{19}$$

$$f(x,y) = \varphi(x,y), (x,y) \in L^p_\beta. \tag{20}$$

обозначим $\triangle_{p,\beta}$ определитель системы уравнений (19)–(20). Его порядок равен $N = (B+1)\cdot(p+1)$ и состоит он из строк двух видов. В строках, соответствующих уравнениям (20) все элементы, кроме одного (равного 1) равны 0. Строки соответствующие уравнениям (19), состоят из нулей и коэффициентов $c_{i,j}$ разностного оператора $P(\delta_1, \delta_2)$.

Теорема 12. *Задача (16)–(17) для всех $\varphi(x,y)$ и $g(x,y)$ имеет единственное решение тогда и только тогда, когда для всех $p \geqslant m$ определители $\triangle_{p,\beta} \neq 0$.*

Основные результаты

1. Дан критерий, а также приведено легко проверяемое достаточное условие разрешимости задачи Коши с начально-краевыми условиями

типа Рикье для полиномиального разностного оператора с постоянными коэффициентами.

2. Доказано, что разрешимость задачи Коши эквивалентна существованию некоторого определенного мономиального базиса в факторе кольца полиномов по идеалу, порожденному характеристическим многочленом.

3. Получены формулы, в которых решение задачи Коши для однородных и неоднородных многослойных явных разностных схем выражается через фундаментальное решение и начальные данные.

4. Используя эти формулы, в терминах теории амеб алгебраических гиперповерхностей найдены как необходимые, так и достаточные условия устойчивости однородных многослойных явных разностных схем. Для неоднородной схемы доказан критерий устойчивости.

Работы автора по теме диссертации

[1] Рогозина, М.С. Устойчивость многослойных разностных схем и амебы алгебраических гиперповерхностей / М.С. Рогозина // Журнал СФУ. Серия Математика и физика. — 2012. — №2. — С.256–263.

[2] Рогозина, М.С. Устойчивость многослойных линейных неоднородных разностных схем и амебы алгебраических гиперповерхностей / М.С. Рогозина // Вестник СибГАУ. Математика, механика, информатика. — 2013. — №3(49). — С.95–99.

[3] Рогозина, М.С. О разрешимости задачи Коши для полиномиального разностного оператора / М.С. Рогозина // Вестник НГУ. Серия: Математика, механика, информатика. — 2014. — Т. 14, №3. — С. 83–94.

[4] Рогозина, М.С. Разрешимость разностной задачи Коши для многослойных неявных разностных схем / М.С. Рогозина // Вестник СибГАУ. Математика, механика, информатика. — 2014. — №3 (55) — С. 126–130.

[5] Лейнартас, Е.К. Разрешимость задачи Коши для полиномиального разностного оператора и мономиальные базисы факторов в кольце поли-

номов / Е.К. Лейнартас, М.С. Рогозина // Сибирский математический журнал. — 2015. — Т. 56, № 1. — С. 111–121.

[6] Рогозина, М.С. Устойчивость задачи Коши для многослойных разностных схем и амебы алгебраических гиперповерхностей / М.С. Рогозина // Материалы Юбилейной 50-й международной научной студенческой конференции Студент и научно-технический прогресс: Математика. — Новосибирск, Новосибирский государственный университет. — 2012. — С.68.

[7] Рогозина, М.С. Разностный аналог одной теоремы Хермандера / М.С. Рогозина // Четвертое российско-армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам. — Красноярск, Сибирский федеральный университет. — 2012. — С. 60–62.

[8] Рогозина, М.С. Рекуррентное соотношение для определителей ленточных матриц Хессенберга / М.С. Рогозина // Материалы 51-й международной научной студенческой конференции Студент и научно-технический прогресс: Математика. — Новосибирск, Новосибирский государственный университет. — 2013. — С.48.

[9] Рогозина, М.С. Устойчивость задачи Коши для многослойных линейных неоднородных разностных схем и амебы алгебраических гиперповерхностей / М.С. Рогозина // Молодежь и наука: сборник материалов IX Всероссийской научно-технической конференции студентов, аспирантов и молодых ученых с международным участием, посвященной 385-летию со дня основания г. Красноярска. — Красноярск, Сибирский федеральный университет. — 2013.

ОТЗЫВ

научного руководителя о кандидатской диссертации

Рогозиной Марины Степановны

«О корректности задачи Коши для полиномиальных разностных операторов», представленной к защите по специальности

01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ

Исчисление конечных разностей – раздел математики, в котором изучаются функции при дискретном изменении аргумента. Его начала содержатся в трудах П. Ферма, И. Барроу, Г. Лейбница, и развивалось оно параллельно с основными разделами математического анализа. В 18 веке теория конечных разностей приобрела характер самостоятельной математической дисциплины. Первое систематическое исследование по теории конечных разностей было написано Л. Эйлером в 1755 году, в нем впервые использовалось обозначение Δ для разностного оператора.

К основным задачам теории конечных разностей относятся задачи интерполирования и суммирования функций. С последней задачей тесно связана задача решения уравнений в конечных разностях. Для линейных конечноразностных уравнений построена теория, вполне аналогичная теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Также как и в случае дифференциальных уравнений, многие одномерные методы теории конечноразностных уравнений не обобщаются на случай многомерной задачи.

В частности, это справедливо для вопроса о корректности задачи Коши для одномерного полиномиального разностного оператора, т.е. непрерывной зависимости ее решения от начальных данных и правой части уравнения, который исследуется в рамках теории дискретных динамических систем. Возможны различные варианты определения понятия устойчивости, отражающие эту зависимость, но в случае уравнений с постоянными коэффициентами все они сводятся к известному свойству характеристического многочлена разностного уравнения: все его корни лежат внутри единичного круга комплексной плоскости. Используя понятие амебы алгебраического множества, в работе сформулирован многомерный аналог этого условия.

В первой главе диссертационной работы устойчивость задачи Коши для многомерного разностного уравнения определяется в духе теории цифровых рекурсивных фильтров, а именно, ограниченность входных данных задачи влечет ограниченность решения. В ней получены формулы, в которых решение задачи Коши для однородных и неоднородных многослойных явных разностных схем выражается через фундаментальное решение и начальные данные. Используя эти формулы, в терминах теории амеб алгебраических гиперповерхностей найдены как необходимые, так и достаточные условия устойчивости однородных многослойных явных разностных схем. Для неоднородной схемы доказан критерий устойчивости.

Одной из важных задач, возникающих, например, в связи с разностной аппроксимацией дифференциальных задач, является вопрос о разрешимости полученной разностной задачи. Во второй главе даны критерий и достаточное условие разрешимости задачи Коши с начально-краевыми условиями типа Рикье для полиномиального разностного оператора с постоянными коэффициентами. Доказано, что разрешимость задачи Коши эквивалентна существованию некоторого определенного мономиального базиса в факторе кольца полиномов по идеалу, порожденному характеристическим многочленом.

При выполнении диссертационной работы М.С. Рогозина проявила себя трудолюбивым и самостоятельным исследователем, показала хорошее владение материалом и четкость выполнения поставленных задач.

Все результаты автора, представленные в диссертации, вносят заметный вклад в теорию многомерных разностных уравнений. Их научная достоверность и новизна не вызывают сомнения.

Считаю, что диссертация М.С. Рогозиной «О корректности задачи Коши для полиномиальных разностных операторов» соответствует п. 9 «Положения о порядке присуждения ученых степеней» от 24 сентября 2013 г. № 842, удовлетворяет всем требованиям, предъявленным ВАК Минобрнауки к диссертациям на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук по специальности 01.01.01 – вещественный, комплексный и функциональный анализ, а ее автор, Марина Степановна Рогозина, заслуживает присуждения ученой степени кандидата физико-математических наук.

Научный руководитель:
доктор физ.-мат. наук, доцент,
профессор кафедры теории функций
ФГАОУ ВПО
«Сибирский федеральный
университет»

Евгений Константинович Лейнартас

ФГАОУ ВПО СФУ
Подпись ________ заверяю
Начальник общего отдела ________
«___» ________ 20___ г.

Почтовый адрес:
пр. Свободный, 79,
Сибирский федеральный университет,
Красноярск, 660041
Телефон: 89138325015
E-mail: lein@mail.ru