

На правах рукописи



Галушина Елена Николаевна

**О МНОГОМЕРНЫХ АНАЛОГАХ
ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ВЕЙЕРШТРАССА**

Специальность 01.01.01 —
«Вещественный, комплексный и функциональный анализ»

Автореферат
диссертации на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Красноярск — 2018

Работа выполнена в Федеральном государственном автономном образовательном учреждении высшего образования «Сибирский федеральный университет».

Научный руководитель: кандидат физико-математических наук
Щуплев Алексей Валерьевич

Официальные оппоненты: **Насыров Семен Рафаилович**,
доктор физико-математических наук, профессор, ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет», кафедра математического анализа, заведующий кафедрой

Устинов Алексей Владимирович,
доктор физико-математических наук, доцент, ФГБОУ ВО «Тихоокеанский государственный университет», кафедра высшей математики, профессор с учёной степенью доктор наук

Ведущая организация: ФГБУН «Институт математики им. С. Л. Соболева» СО РАН, г. Новосибирск.

Защита состоится 27 апреля 2018 г. в 14.00 часов на заседании диссертационного совета Д 212.099.25 при ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» по адресу: 660041, г. Красноярск, пр. Свободный, 79, ауд. Б1-01.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГАОУ ВО «Сибирский федеральный университет» <http://www.sfu-kras.ru>.

Автореферат разослан « » февраля 2018 года.

Ученый секретарь



Шлапунов Александр Анатольевич

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Всем хорошо известны примеры периодических функций на комплексной плоскости: $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{ctg} z$ с периодами 2π и π соответственно. Поднимая вопрос о существовании функций с большим количеством периодов, можно легко убедиться в том, что не существует более двух линейно независимых (над полем вещественных чисел) периодов, а функции, обладающие двумя такими периодами, называются двоякопериодическими.

Из теоремы Лиувилля следует, что аналитические двоякопериодические функции без особых точек являются константами. Среди аналитических двоякопериодических функций с особенностями выделяется класс *эллиптических функций* — не имеющих никаких других особых точек, кроме полюсов в узлах решётки на плоскости.

Изучению эллиптических функций предшествовало накопление знаний об эллиптических интегралах, систематическое описание которых дал А. Лежандр. Развитие эллиптических функций шло двумя путями: К. Якоби в основу теории положил эллиптические функции, которые позже были названы в его честь, и вспомогательные тэта-функции; К. Вейерштрассом был предложен другой подход, базирующийся на $\wp$ -функции. С её помощью можно описать все эллиптические функции, так как они все представляются в виде алгебраических выражений от $\wp$ -функции и её производной. В современной математике теория эллиптических функций занимает одно из центральных мест: объединяя алгебраические, аналитические и арифметические методы, она связывает различные её области.

В случае нескольких переменных хорошо известны¹ многомерные тэта-функции, заданные в виде экспоненциальных рядов, и построенные с их помощью многомерные эллиптические функции. В начале 1980-х годов итальянский математик П. Заппа дал иное многомерное обобщение $\wp$ - и ζ -функций Вейерштрасса в виде дифференциальных форм². Напомним, что для решётки Γ изоморфной $\mathbb{Z}^2$ ζ -функция Вейерштрасса задаётся в

¹Мамфорд, Д. Лекции о тэта-функциях: Пер. с англ. / Д. Мамфорд. — М.: Мир, 1988. — 448 с

²Zappa, P. Sulle classi di Dolbeault di tipo $(0, n-1)$ con singolarità in un insieme discreto / P. Zappa // Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. — 1981. — V. 8. — № 70. — P. 87-95

виде ряда

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} \left(\frac{1}{z - \gamma} + \frac{1}{\gamma} + \frac{z}{\gamma^2} \right).$$

Слагаемые вида $\frac{1}{z - \gamma}$ можно рассматривать как ядра Коши без дифференциала dz . Тогда, если теперь Γ — решётка максимального ранга в $\mathbb{C}^n$, и $\psi_{BM}(z - \gamma)$ — ядро Бохнера-Мартинелли с особенностью в γ без голоморфных дифференциалов $dz_1 \wedge \dots \wedge dz_n$, то ζ -форма определяется рядом

$$\begin{aligned} \zeta(z) = \psi_{BM}(z) + \sum_{\gamma \in \Gamma \setminus \{0\}} \left(\psi_{BM}(z - \gamma) + \psi_{BM}(\gamma) - \right. \\ \left. - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \psi_{BM}}{\partial z_i}(\gamma) z_i + \frac{\partial \psi_{BM}}{\partial \bar{z}_i}(\gamma) \bar{z}_i \right) \right). \end{aligned}$$

Аналоги $\wp$ -функции Вейерштрасса — это формы $\wp^i(z)$, определённые равенством

$$\wp^i(z) = -\frac{\partial}{\partial z_i} \zeta(z).$$

Свойства таким образом определённых дифференциальных форм напоминают свойства классических $\wp$ - и ζ -функций Вейерштрасса. Кроме того, они сохраняют воспроизводящее свойство, присущее форме Бохнера-Мартинелли.

В 1995 году Р. Диаз и С. Робинс³ дали новое доказательство известной формулы Пика:

$$I + \frac{B}{2} - 1 = S,$$

связывающей число I целых точек целочисленного многоугольника внутри него, число B целых точек на границе многоугольника и площадь S этого многоугольника, при помощи ζ -функции Вейерштрасса. Оно основано на том, что интеграл от ζ -функции по замкнутому контуру сводится к интегралам от ядра Коши. Так как вычет ядра Коши равен 0 либо 1 в зависимости от того, попадает ли его особенность внутрь контура или нет, этот факт можно использовать для подсчёта числа особых точек ζ -функции внутри контура.

³Diaz, R. Pick's Formula via the Weierstrass $\wp$ -Function / R. Diaz, S. Robins // The American Mathematical Monthly. — 1995. — V. 102. — № 5. — P. 431-437

Аналогичным образом воспроизводящее свойство ζ -формы можно использовать для исследования проблемы числа точек решётки в многомерной области.

Целью данной работы является изучение свойств многомерных аналогов эллиптических функций Вейерштрасса и их применение к задаче оценки числа точек решётки в замыкании области.

Для достижения поставленной цели необходимо было решить следующие **задачи**:

1. Исследовать свойства многомерных аналогов эллиптических функций Вейерштрасса.
2. Доказать возможность почленного дифференцирования ряда для ζ -формы.
3. Вычислить такую форму η , чтобы форма $\zeta - \eta$ стала Γ -инвариантной.
4. Получить интегральное представление для разности взвешенного числа точек решётки в замыкании области и её объёма:

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \Theta_{\gamma, D} - \text{Vol}(D).$$

Научная новизна: Результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

1. Впервые была исследована сходимость рядов для производных ζ -формы,
2. Вычислена дифференциальная форма η с линейными коэффициентами такая, что форма $\zeta - \eta$ является Γ -инвариантной,
3. Доказано новое интегральное представление для разности взвешенного числа точек решётки в замыкании области и её объёма.

Практическая и теоретическая ценность. Результаты, полученные автором, являются теоретическими. Их ценность состоит в том, что они могут быть использованы в многомерном комплексном анализе, алгебраической геометрии, комбинаторике и теории чисел, а также в компьютерной алгебре.

Практическое применение полученных результатов состоит в их введении в учебный процесс в виде материала для проведения специальных курсов по современным проблемам многомерного комплексного анализа

кафедры теории функций Института математики и фундаментальной информатики Сибирского федерального университета.

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ (гос. задание для Сибирского федерального университета № 1.2604.2017/ПЧ).

Методология и методы исследования. В работе используются методы многомерного комплексного анализа, в частности, техника теории интегрального представления Бохнера-Мартинелли, теория сходимости многомерных числовых и функциональных рядов.

При вычислении суммы двойного числового ряда использовались методы теории специальных функций и асимптотические оценки, а при исследовании сходимости функционального ряда оценивалась величина производной ядра Бохнера-Мартинелли на компакте.

Доказательство основного результата опирается на фундаментальные свойства интегрального представления Бохнера-Мартинелли. В исследованиях последнего раздела диссертации важную роль сыграла симметрия рассматриваемых множеств.

В процессе исследований для выполнения расчётов и верификации полученных результатов активно использовались методы численного моделирования, а также системы компьютерной алгебры.

Достоверность полученных результатов работы подтверждается строгими математическими доказательствами.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на:

1. Красноярском городском научном семинаре по комплексному анализу и алгебраической геометрии (СФУ, 2010-2017 гг);
2. 50-ой международной научной конференции «Студент и научно-технический прогресс» (Новосибирск, 2012 г.);
3. Четвёртом российско-армянском совещании по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам (Красноярск, 2012 г.);
4. Пятом российско-армянском совещании по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам (Ереван, 2014 г.);
5. Международной школе-конференции по многомерному комплексному анализу и дифференциальным уравнениям (Красноярск, 2014 г.);

6. Третьей российско-китайской научной конференции по комплексному анализу, алгебре, алгебраической геометрии и математической физике (Москва, 2016 г.).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 3 статьях и 4 тезисах. Все статьи ([1–3]) опубликованы в журналах из перечня ВАК изданий, рекомендованных для публикации результатов диссертации. Одна статья ([3]) совместная, её результаты получены в нераздельном соавторстве с А.В. Щуплевым с равнозначным вкладом соавторов. Две другие ([1; 2]) подготовлены лично автором диссертации. Кроме того, для проведения компьютерных экспериментов была разработана программа «Tex2Crr», зарегистрированная в Федеральной службе по интеллектуальной собственности [4].

Объем и структура работы. Диссертация состоит из введения, трёх глав и заключения. Полный объём диссертации составляет 65 страниц текста с 1 рисунком и 2 таблицами. Список литературы содержит 53 наименования.

Содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, а также кратко перечисляются основные результаты. Основной текст разбит на три главы.

Первая глава носит вспомогательный характер. В ней даются необходимые сведения об эллиптических функциях одной комплексной переменной, то есть двоякопериодических мероморфных функциях.

Рассмотрим комплексную плоскость $\mathbb{C}$ и решётку Γ на ней

$$\Gamma = \{n\gamma_1 + m\gamma_2 | n, m \in \mathbb{Z}\},$$

определённую парой комплексных чисел γ_1 и γ_2 со свойством $\frac{\gamma_2}{\gamma_1} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Очевидно, что линейным преобразованием любая такая решётка приводится к виду $\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}$, где $\text{Im}\tau > 0$, поэтому в рамках первой главы будем считать, что решётка Γ задана именно в таком виде. Будем рассматривать эллиптические функции с множеством периодов Γ . В основе подхода К. Якоби к определению эллиптических функций лежат вспомогательные тэта-функции.

Определение 1. *Тэта-функцией называется сумма ряда*

$$\theta(z, \tau) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{\pi i \tau n^2} e^{2\pi i n z}.$$

Сами тэта-функции являются квазипериодическими функциями, то есть сдвигу аргумента на любой элемент решётки периодов соответствует умножение функции на экспоненциальный множитель. Однако, отношение двух тэта-функций, ассоциированных с одной и той же решёткой, представляет собой двоякопериодическую функцию.

Другой подход в теории эллиптических функций был предложен К. Вейерштрассом, который построил всю теорию на использовании $\wp$ -функции

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{\gamma \in \Gamma'} \left(\frac{1}{(z - \gamma)^2} - \frac{1}{\gamma^2} \right), \quad (1)$$

где $\Gamma' = \Gamma \setminus \{0\}$, и связанных с ней функций

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum_{\gamma \in \Gamma'} \left(\frac{1}{z - \gamma} + \frac{1}{\gamma} + \frac{z}{\gamma^2} \right),$$

$$\sigma(z) = z \prod_{\gamma \in \Gamma'} \left(1 - \frac{z}{\gamma} \right) e^{\frac{z}{\gamma} + \frac{1}{2} \frac{z^2}{\gamma^2}}.$$

Несмотря на разницу в подходах к построению теории эллиптических функций, между основополагающими функциями существуют связывающие их формулы. Одна из них заключается в следующем тождестве

$$\wp(z) = -\frac{d^2}{dz^2} \ln \Theta_{11}(z) + c,$$

где $\Theta_{11}(z) = -\theta\left(z + \frac{1}{2}\tau + \frac{1}{2}, \tau\right)$.

В случае гауссовой решётки $\Gamma = \mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z}$ константа c равна $-\pi$. Для этой константы существует интегральное представление

$$\pi = -c = \int_0^1 \wp(x - p) dx,$$

откуда можно получить представление для π в виде двойного ряда

Теорема 1.

$$\pi = \frac{1}{1-p} + \frac{1}{p} + \sum_{\gamma \in \Gamma'} \left[\frac{1}{1-\gamma-p} + \frac{1}{\gamma+p} + \frac{1}{\gamma^2} \right].$$

Также мы приводим прямое вычисление суммы этого ряда, опубликованное в [1].

В рамках исследования были проведены компьютерные эксперименты по вычислению знаков числа π с помощью полученного представления в виде двойного ряда. Скорость сходимости данного ряда невысокая и зависит от выбора точки p . В ходе компьютерных экспериментов была разработана компьютерная программа, которая преобразует математические формулы, записанные в формате $\text{T}_\text{E}_\text{X}$, в программы для их вычисления на языке программирования C++ [4]. Программа способна интерпретировать арифметические операции, операции с комплексными числами, элементарные математические функции, индексированные суммы, операции с векторами.

Во второй главе приводятся многомерные аналоги $\wp$ - и ζ -функций, исследуются их свойства.

Пусть ψ_{BM} — ядро интегрального представления Бохнера-Мартинелли с особенностью в нуле без голоморфных дифференциалов:

$$\psi_{BM}(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \bar{z}_k d\bar{z}[k]}{\left(\sum_{j=1}^n |z_j|^2\right)^n},$$

где $d\bar{z}[k] = d\bar{z}_1 \wedge \dots \wedge d\bar{z}_{k-1} \wedge d\bar{z}_{k+1} \wedge \dots \wedge d\bar{z}_n$. Обозначим через $\varphi_i(z, \gamma)$ производную смещённой на γ формы Бохнера-Мартинелли по z_i :

$$\varphi_i(z, \gamma) = -\frac{\partial}{\partial z_i} \psi_{BM}(z - \gamma),$$

Пусть Γ — решётка максимального ранга в пространстве $\mathbb{C}^n$. Следуя П. Заппа⁴, введём аналоги $\wp$ -функции Вейерштрасса:

$$\wp^i(z) = \varphi_i(z, 0) + \sum_{\gamma \in \Gamma'} (\varphi_i(z, \gamma) - \varphi_i(0, \gamma))$$

⁴Zappa, P. Sulle classi di Dolbeault di tipo $(0, n-1)$ con singularita in un insieme discreto / P. Zappa // Atti Accad. Naz. Lincei Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. — 1981. — Vol. 8, no. 70. — P. 87–95

и ζ -функции Вейерштрасса

$$\zeta(z) = \psi_{BM}(z) + \sum_{\gamma \in \Gamma'} \left(\psi_{BM}(z - \gamma) + \psi_{BM}(\gamma) - \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial \psi_{BM}}{\partial z_i}(\gamma) z_i + \frac{\partial \psi_{BM}}{\partial \bar{z}_i}(\gamma) \bar{z}_i \right) \right).$$

Свойства ζ - и $\wp^i$ -форм напоминают свойства ζ - и $\wp$ -функций Вейерштрасса. В частности, формы $\wp^i$ являются Γ -инвариантными и

$$\wp^i = -\frac{\partial}{\partial z_i} \zeta.$$

Кроме того, и ζ -, и $\wp^i$ -формы обладают восстанавливающим свойством.

В разделе 2.2 мы исследуем свойства ζ -формы. Равномерная сходимость ряда для ζ -формы и её голоморфных производных, то есть для $\wp^i$ -форм, доказана П. Заппой⁵. Мы доказываем сходимость рядов, представляющих антиголоморфные производные ζ -формы:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \bar{z}_i} \zeta(z) = & \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \left(\frac{(-1)^{i-1} \|z\|^2 d\bar{z}[i] - n \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} z_i \bar{z}_k d\bar{z}[k]}{\|z\|^{2n+2}} + \right. \\ & + \sum_{\gamma \in \Gamma'} \left[\frac{(-1)^{i-1} \|z - \gamma\|^2 d\bar{z}[i] - n \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} (z_i - \gamma_i)(\bar{z}_k - \bar{\gamma}_k) d\bar{z}[k]}{\|z - \gamma\|^{2n+2}} - \right. \\ & \left. \left. - \frac{(-1)^{i-1} \|\gamma\|^2 d\bar{z}[i] - n \sum_{k=1}^n \gamma_i \bar{\gamma}_k d\bar{z}[k]}{\|\gamma\|^{2n+2}} \right] \right). \quad (2) \end{aligned}$$

Предложение 2. Ряд (2) сходится абсолютно и равномерно на компактах из $\mathbb{C}^n \setminus \Gamma$.

Таким образом, ряд для ζ -формы можно почленно дифференцировать. Кроме того, доказывается, что для $\gamma \in \Gamma$ разность

$$\zeta(z + \gamma) - \zeta(z)$$

зависит только от γ .

⁵Zappa, P. Osservazioni sui nuclei di Bochner-Martinelli / P. Zappa // Acc. Naz. Lincei. — 1979. — V. VIII. — № LXVII. — P. 21-26

Для вычисления характеристик областей в $\mathbb{C}^n$, инвариантных относительно сдвига на элемент решётки, каковой, очевидно, является число точек решётки в ней, естественно использовать Γ -периодические выражения, в то время как ζ -форма не Γ -периодическая. Поэтому в **разделе 2.3** мы вычисляем форму $\eta(z)$ с коэффициентами, линейно зависящими от γ и $\bar{\gamma}$

$$\eta(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \left(\sum_{j=1}^n (L_{kj}^1 z_j + N_{kj}^1 \bar{z}_j) \alpha_{mk} + \sum_{j=1}^n (L_{kj}^2 z_j + N_{kj}^2 \bar{z}_j) \beta_{mk} \right) d\bar{z}[m], \quad (3)$$

где матрицы L^1 , N^1 , L^2 , N^2 и константы α_{mk} , β_{mk} зависят от векторов, порождающих решётку Γ .

Предложение 3. Для любой точки $z \in \mathbb{C}^n \setminus \Gamma$ и точки $\gamma \in \Gamma$

$$\zeta(z + \gamma) - \zeta(z) = \eta(\gamma),$$

где $\eta(z)$ задана формулой (3).

Затем определяем форму $\tau(z)$ такую, что имеет место

Теорема 3. [2] Форма $\tau(z) = \zeta(z) - \eta(z)$ является Γ -инвариантной.

В случае целочисленной решётки $\Gamma = (\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z})^n$ матрицы L^1 , N^1 , L^2 , N^2 имеют вид $L^1 = \frac{1}{2}E$, $L^2 = -\frac{i}{2}E$, $N^1 = \frac{1}{2}E$, $N^2 = \frac{i}{2}E$, где E — единичная матрица, а форма η значительно упрощается:

$$\eta(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n (\alpha_{mk} \cdot \operatorname{Re} z_k + \beta_{mk} \cdot \operatorname{Im} z_k) d\bar{z}[m]$$

Кроме того, между коэффициентами α_{mk} и β_{mk} существует следующая связь.

Предложение 4. Если $\Gamma = (\mathbb{Z} \oplus i\mathbb{Z})^n$, то

$$\begin{aligned} \beta_{mk} &= \alpha_{mk}, & k &\neq m, \\ \beta_{mk} &= -i\alpha_{mk}, & k &= m. \end{aligned}$$

Таким образом, для целочисленной решётки форму $\eta(z)$ можно записать следующим образом [3]:

$$\eta(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{m=1}^n \sum_{k=1}^n \alpha_{mk} (\delta_{mk} \bar{z}_k + (1 - \delta_{mk}) (\operatorname{Re} z_k + i \operatorname{Im} z_k)) \cdot d\bar{z}[m].$$

В **третьей главе** полученные результаты о свойствах ζ -формы применяются к исследованию проблемы числа точек решётки в замыканиях областей.

Раздел 3.1 посвящён доказательству основного результата диссертации — интегрального представления для разности взвешенного числа точек решётки в замыкании области и её объёма.

Обозначим $\Theta_{z_0, D}$ величину телесного угла области D в точке z_0 . Очевидно, что если $z_0 \in D$, то телесный угол D в точке z_0 есть полный телесный угол, и $\Theta_{z_0, D} = 1$. Аналогично, если $z_0 \notin \bar{D}$, то $\Theta_{z_0, D} = 0$.

Определение 5. *Взвешенным числом точек решётки Γ в замыкании области D назовём $\sum_{\gamma \in \Gamma} \Theta_{\gamma, D}$.*

Теорема 4. [2] *Пусть D — область в $\mathbb{C}^n$ с кусочно-гладкой границей, тогда*

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \Theta_{\gamma, D} - \operatorname{Vol}(D) = \text{v.p.} \int_{\partial D} \tau(z) \wedge dz, \quad (4)$$

где $\operatorname{Vol}(D)$ — объём области D , нормированный условием, что объём фундаментального параллелепипеда периодов решётки Γ равен 1.

Формула (4) верна лишь для комплексных, то есть чётномерных вещественных пространств. Поэтому в **разделе 3.2** мы рассматриваем случай областей в $\mathbb{R}^n$. Пусть D — область с кусочно-гладкой границей в $\mathbb{R}^n$, а $\Gamma_{\mathbb{R}}$ — решётка максимального ранга в $\mathbb{R}^n$, порождённая векторами $\nu_1, \dots, \nu_n$. Рассмотрим $\mathbb{R}^n$ как вещественное подпространство $\mathbb{C}^n$ и определим в нём решётку $\Gamma = \Gamma_{\mathbb{R}} \oplus i\mathbb{Z}^n$, порождённую векторами $\nu_1, \dots, \nu_n$ и

$$\begin{aligned} \mu_1 &= (i, 0, \dots, 0) \\ &\dots \\ \mu_n &= (0, 0, \dots, i). \end{aligned}$$

Область $\tilde{D} = D + iU^n$, где $U^n = [-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}]^n$ — n -мерный единичный куб, имеет кусочно-гладкую границу и к ней можно применить результат Теоремы 4.

Таким образом, верна

Теорема 5. [2] Пусть D — область с кусочно-гладкой границей в $\mathbb{R}^n$, тогда

$$\sum_{\gamma \in \Gamma_{\mathbb{R}}} \Theta_{\gamma, D} - \text{Vol}(D) = \text{v.p.} \int_{\partial \tilde{D}} \tau(z) \wedge dz.$$

В разделе 3.3 приводится аналитическое доказательство многомерного аналога формулы Пика^{6,7} для решётчатых многогранников с центрально-симметричными гипергранями.

Определение 6. Пусть Γ — решётка максимального ранга в $\mathbb{C}^n$. Решётчатым многогранником в $\mathbb{C}^n$ называется многогранник с вершинами в точках решётки Γ .

Для таких многогранников верна

Лемма 2. Если гипергрань Q решётчатого многогранника обладает центральной симметрией, то

$$\int_Q \tau(z) \wedge dz = 0.$$

Отсюда непосредственно вытекает

Теорема 6. [2] Если D — решётчатый многогранник, гипергрань которого обладают центральной симметрией, то

$$\text{Vol}(D) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \Theta_{\gamma, D}.$$

⁶Barvinok, A. An algorithmic theory of lattice points in polyhedra / A. Barvinok, J. Pommersheim // New Perspectives in Algebraic Combinatorics. — Math. Sci. Res. Inst. Publ. — Cambridge Univ. Press, Cambridge. — 1999. — Vol. 38. — P. 91-147,

⁷McMullen, P. Lattice invariant valuations on rational polytopes / P. McMullen // Arch. Math. — 1978/79. — № 31. — P. 509-516

В случае плоского многоугольника последнее равенство превращается в формулу Пика, так как с учётом известного факта, что сумма углов n -угольника равна $\pi(n-2)$, сумма телесных углов приобретает вид

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} \Theta_{\gamma, D} = I + \frac{B}{2} - 1.$$

Заметим, что не все такие многогранники являются зонотопами^{8,9}. Кроме того, из Леммы 2 легко получить следующую теорему.

Теорема 7. [2] *Если D — n -мерная решётчатая призма, то*

$$\text{Vol}(D) = \sum_{\gamma \in \Gamma} \Theta_{\gamma, D}.$$

Результаты этого раздела доказаны в предположении, что D — область в $\mathbb{C}^n$. Однако, формулы в теоремах 4 и 5 различаются только областями, по границе которых ведётся интегрирование. Так как в условиях теорем 6 и 7 эти интегралы равны нулю, то они верны и для областей в вещественном пространстве.

Заключение

В диссертации исследованы свойства многомерных аналогов ζ - и ζ -функций Вейерштрасса и их применение. Основные результаты состоят в следующем:

1. Получена интегральная формула для разности взвешенного числа точек произвольной решётки максимального ранга в $\mathbb{C}^n$ в замыкании области с кусочно-гладкой границей и её объёма. Указанная разность представляется в виде интеграла по границе этой области.
2. Получено новое представление числа π в виде двойного ряда по решётке гауссовых чисел.
3. Получено аналитическое доказательство многомерного аналога формулы Пика для многогранника с вершинами в узлах решётки и центрально-симметричными гипергранями.

⁸McMullen, P. Polytopes with centrally symmetric faces / P. McMullen // Israel J. Math. — 1970. — Vol. 8. — P. 194–196,

⁹McMullen, P. Polytopes with centrally symmetric facets / P. McMullen // Israel J. Math. — 1976. — Vol. 23, no. 3. — P. 337–338

Все полученные результаты являются новыми, снабжены полными доказательствами, опубликованы в 8 работах и могут быть использованы в комплексном анализе, алгебраической геометрии, комбинаторике и теории чисел.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в журналах из перечня ВАК изданий, рекомендованных для публикации результатов диссертации

1. Галушина, Е.Н. Об одном представлении числа π в виде двойного ряда / Е.Н. Галушина // Известия Иркутского государственного университета. — 2016. — Т. 17. — С. 3–11.
2. Tereshonok, E.N. McMullen's formula and a multidimensional analog of the Weierstrass zeta-function / E.N. Tereshonok // Complex variables and elliptic equations: an international journal. — 2015. — Vol. 60.— Issue 11. — P. 1594–1601.
3. Tereshonok, E.N. Multidimensional Analog of the Weierstrass ζ -function in the Problem of the Number of Integer Points in a Domain / E.N. Tereshonok, A.V. Shchuplev // Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics. — 2012. — Vol. 5, no. 4. — P. 480–484.

Свидетельства на программу для электронных вычислительных машин

4. Терешонок Е. Тех2Срр: свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ / Е.Н. Терешонок. — М. : Реестр программ для ЭВМ, 2014. Номер гос. рег. 2014616394.

Тезисы конференций

5. Терешонок, Е.Н. Двумерный аналог дзета-функции Вейерштрасса в задаче оценки числа целых точек в области / Е.Н. Терешонок // Материалы Юбилейной 50-й международной научной студенческой конференции Студент и научно-технический прогресс: Математика. — Новосибирск : Новосиб. гос. ун-т, 2012. — С. 101.

6. Терешонок, Е.Н. О многомерной версии формулы Пика / Е.Н. Терешонок // Труды Математического центра имени Н.И. Лобачевского: материалы Тринадцатой молодежной научной школы-конференции Лобачевские чтения. — Казань : Изд-во Казан. ун-та., 2014. — С. 163—165.
7. Терешонок, Е.Н. О многомерном аналоге дзета-функции Вейерштрасса / Е.Н. Терешонок, А.В. Щуплев // Четвёртое российско-армянское совещание по математической физике, комплексному анализу и смежным вопросам: тезисы докладов. — Красноярск : Сибирский федеральный университет., 2012. — С. 69—70.
8. Терешонок, Е.Н. Формула Макмюллена и многомерный аналог дзета-функции Вейерштрасса / Е.Н. Терешонок // Сборник материалов международной научной конференции студентов, аспирантов и молодых ученых Молодёжь и наука: проспект Свободный. — Красноярск : Сибирский федеральный университет., 2015.