

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_____ / В.М. Левчук
(подпись)
« ____ » _____ 2021 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.01 Математика

О СТРОГОЙ ВЕЩЕСТВЕННОСТИ И ПОРОЖДАЕМОСТИ ИНВОЛЮЦИЯМИ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор

_____ / Я.Н. Нужин
(подпись, дата)

Выпускник

_____ / И.Ю. Ефимов
(подпись, дата)

Красноярск 2021

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	3
1 О порождаемости групп $SL_n(q)$ сопряженными инволюциями	5
1.1 Общая информация	5
1.2 Порождающие множества элементов специальных линейных групп	6
1.3 Доказательство теоремы 1 для $SL_4(q)$	8
1.4 Доказательство теоремы 1 для $SL_5(q)$	10
1.5 Доказательство теоремы 1 для $SL_7(q)$	12
1.6 Доказательство теоремы 1 для $SL_8(q)$	14
2 О строгой вещественности группы $UT_9(2)$	17
2.1 Общая информация	17
2.2 Оценка объема требуемых вычислений	17
2.3 Обоснование корректности алгоритма доказательства	19
2.4 Воспроизводимость и проверяемость результата	21
Заключение	22
Список использованных источников	23
ПРИЛОЖЕНИЕ А	25

ВВЕДЕНИЕ

Данная работа состоит из двух частей. В первой части даётся частичный ответ на вопрос 14.69в) из Коуровской тетради [1], записанный Я.Н. Нужиным в 1999 году:

Для каждой конечной простой неабелевой группы G найти минимум числа $n_c(G)$ порождающих сопряженных инволюций, произведение которых равно единице.

Именно, даётся положительный ответ для проективных специальных линейных групп $PSL_n(q)$ размерностей $n = 4, 5, 7, 8$, дополняющий результат, представленный в 2009 г. Дж.М. Уордом, в случае $q = 9$ [4].

Дж.М. Уорд дал ответ для спорадических, знакопеременных и проективных специальных линейных групп $PSL_n(q)$ над полем нечетного порядка q , исключая случай $q = 9$ при $n \geq 4$, а при $n = 6$ и случай $q \equiv 3 \pmod{4}$, на указанный вопрос.

Известно, что $n_c(G) \geq 5$ для любой простой неабелевой группы G . Оказалось, что в этих размерностях порождающие пятерки сопряженных инволюций, произведение которых равно единице, для специальных линейных групп $SL_n(q)$, а следовательно, и для $PSL_n(q)$, указанные Дж.М.Уордом, годятся и при $q = 9$.

Во второй части даётся частичный ответ на вопрос 16.76 Коуровской тетради, записанный Я.Н. Нужиным в 2006 году:

Назовём группу G строго вещественной, если каждый её нетривиальный элемент сопряжён со своим обратным некоторой инволюцией из G . В каких группах лиева типа над полем характеристики 2 максимальные унипотентные подгруппы строго вещественны?

Если каждый нетривиальный элемент группы сопряжен со своим обратным каким-либо элементом группы, то группу называют просто *вещественной*. Таким образом, строгая вещественность группы является более сильным условием и влечет за собой её вещественность.

Основные результаты по данному вопросу получены М.А. Газдановой и Я.Н. Нужиным в 2006 году и приведены в [13].

Известно, что для специальной линейной группы $SL_n(q)$ максимальной унипотентной подгруппой является подгруппа унитарных матриц $UT_n(q)$,

то есть группа всех нижнетреугольных матриц с единичными диагональными элементами.

Касательно групп $UT_n(q)$ известны следующие результаты.

В 1998 году И. Айзекс и Д. Карагёзьян [14] привели для группы $UT_{13}(2)$ пример матрицы, не сопряженной со своей обратной, показав тем самым, что данная группа не является вещественной, а следовательно, и строго вещественной.

В 2016 году О.А. Дубина, С.Г. Колесников и Н.С. Манагарова [15] показали строгую вещественность групп $UT_n(q)$ над произвольным конечным полем характеристики 2 при $n \leq 8$.

Так как для всякого $n \geq 2$ имеет место изоморфизм $UT_n(q)/H \simeq UT_{n-1}(q)$, где $H = \langle t_{n,i}(x) \mid x \in GF_q, 1 \leq i \leq n-1 \rangle$, то из невещественности группы $UT_{13}(2)$ следует невещественность и всех групп $UT_n(2)$, $n \geq 13$.

Таким образом, вопрос о строгой вещественности групп $UT_n(2)$ при $9 \leq n \leq 12$ остаётся открытым. В настоящей работе даётся положительный ответ на вопрос о строгой вещественности группы $UT_9(2)$, применяя для проверки данной гипотезы компьютерные вычисления.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Настоящая работа даёт ответы на некоторые ранее нерешенные вопросы теории групп для линейных групп малых размерностей над конечными полями.

Результаты, представленные в первой главе, дополняют результаты Дж.М. Уорда [4] для размерностей $n = 4, 5, 7, 8$, однако случаи $n = 6, n > 8$ на текущий момент не удалось разрешить предложенным методом, и вопрос возможности получения ответа на этот вопрос предложенным методом также остаётся открытым.

Также результаты первой главы опубликованы в журнале Труды ИММ УО РАН [20].

Результаты, представленные во второй главе, дают положительный ответ на вопрос о строгой вещественности группы унитарных матриц размерности 9×9 над полем порядка 2. Таким образом, вопрос о строгой вещественности групп $UT_n(2)$ остаётся открытым для размерностей $n = 10, 11, 12$. Так как для $n = 10$ также справедливы все рассуждения, приводимые для $n = 9$, то теоретически возможно применение аналогичного метода доказательства и для этого случая, однако предварительные оценки показывают, что ЭВМ потребительского класса недостаточно для проведения такого объема вычислений в приемлемые сроки.

Стоит отметить, что в процессе доказательства для 18731691 элементов группы $UT_9(2)$, покрывающих все неединичные классы сопряженных элементов группы, был получен список инволюций, сопрягающих данные матрицы с обратными к ним. Таким образом из данного списка для произвольной матрицы из $UT_9(2)$ можно быстро (с применением ЭВМ) найти инволюцию, сопрягающую данную матрицу с её обратной, что может оказаться полезным и в других исследованиях групп унитарных матриц над конечными полями.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Коуровская тетрадь. Нерешенные вопросы теории групп – Изд. 19-е, доп. – Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 2018.
2. Нужин, Я. Н. О порождающих множествах инволюций простых конечных групп / Я. Н. Нужин // Алгебра и логика. – 2019 – Т. 58, №3 – С. 426–434.
3. Di Martino, L. 2-Generation of finite simple groups and some related topics / L. Di Martino, M. C. Tamburini // Generators and Relations in Groups and Geometries (ed A. Barlotti et al.) / Kluwer Academic Publishers – Dordrecht, 1991. – P. 195–233
4. Ward, J. M. Generation of simple groups by conjugate involutions [Text] : Thesis of Doctor of Philosophy / Jonathan Mark Ward – Queen Mary college, University of London, 2009. – 193 p.
5. Левчук, В. М., Замечание к теореме Л.Диксона / В. М. Левчук // Алгебра и логика. – 1983 – Т. 22, №4 – С. 421–434
6. Левчук, В. М., О порождающих множествах корневых элементов групп Шевалле над полем / В. М. Левчук // Алгебра и логика. – 1983 – Т. 22, №5 – С. 526–541
7. Нужин, Я. Н. Порождающие множества элементов групп Шевалле над конечным полем / Я. Н. Нужин // Алгебра и логика. – 1989 – Т. 28, №6 – С. 670–686.
8. Нужин, Я. Н. Тензорные представления и порождающие множества инволюций некоторых матричных групп / Я. Н. Нужин // Труды ИММ УрО РАН. – 2020 – Т. 26, №3 – С. 133–141.
9. Di Martino, L. (2, 3)-generation of $SL(n, q)$. I. Cases $n = 5, 6, 7$ / L. Di Martino, N. Vavilov // Communications in Algebra. – 1994 – Vol. 22 – P. 1321–1347.
10. Tabakov, K. The (2, 3)-generation of the special linear groups over finite fields / K. Tabakov, K. Tchakerian // Serdica Math. J. – 2011 – Vol. 37 – P. 365–370.


11. Pellegrini, M. A. The $(2, 3)$ -generation of the special linear groups over finite fields / M. A. Pellegrini // Bull. Aust. Math. Soc. – 2017 – Vol. 95, №1 – P. 48–53.
12. Нужин, Я. Н. Порождающие элементы групп лиева типа над конечным полем нечетной характеристики. I / Я. Н. Нужин // Алгебра и логика. – 1997 – Т. 36, №1 – С. 77–96.
13. Газданова, М. А. О строгой вещественности унипотентных подгрупп групп лиева типа над полем характеристики 2 / М. А. Газданова, Я. Н. Нужин // Сиб. матем. журн. – 2006 – Т. 47, №5 – С. 1031–1051.
14. Isaacs, I. M. Conjugacy in groups of upper triangular matrices / I. M. Isaacs, D. Karagueuzian // J. Algebra. – 1998 – Vol. 202, №2 – P. 704–711.
15. Дубина, О. А. Строгая вещественность и рациональность групп унитарных матриц порядка ≤ 8 над полями характеристики 2 / О. А. Дубина, С. Г. Колесников, Н. С. Манагарова // Труды ИММ УрО РАН – 2016 – Т. 22, №1 – С. 71–83.
16. Каргополов, М. И. Основы теории групп / М. И. Каргополов, Ю. И. Мерзляков. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва : Наука, 1982. – 288 с.
17. Дубина, О. А. О рациональности и строгой вещественности унитарной группы над полем характеристики 2 / А. О. Дубина // межд. конф. Мальцевские чтения 2020 : тезисы докладов. – Новосибирск : Новосибирский государственный университет, 2020. – С. 146.
18. Eigen [Электронный ресурс] : C++ template library for linear algebra: matrices, vectors, numerical solvers, and related algorithms // Официальный сайт проекта. – Режим доступа: <https://eigen.tuxfamily.org/>
19. UT_9 over GF_2 strict reality [Электронный ресурс] : git-репозиторий проекта. – Режим доступа: https://gitlab.com/ivan_efimov/ut_9-over-gf_2-strict-reality.
20. Ефимов, И. Ю. Порождающие множества сопряженных инволюций групп $SL_n(q)$ при $n = 4, 5, 7, 8$ и нечетном q / И. Ю. Ефимов, Я. Н. Нужин // Труды ИММ УрО РАН. – 2021 – Т. 27, №1 – С. 62–69.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

 / В.М. Левчук
(подпись)

« 19 » 06 2021 г.


БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА


Направление 01.03.01 Математика

**О СТРОГОЙ ВЕЩЕСТВЕННОСТИ И ПОРОЖДАЕМОСТИ
ИНВОЛЮЦИЯМИ ЛИНЕЙНЫХ ГРУПП МАЛЫХ РАЗМЕРНОСТЕЙ
НАД КОНЕЧНЫМИ ПОЛЯМИ**

Научный руководитель
доктор физико-математических наук,
профессор

Выпускник

 18.06.2021 Я.Н. Нужин
(подпись, дата)

 17.06.2021 / И.Ю. Ефимов
(подпись, дата)

Красноярск 2021