УДК 519.145

Элементарные абелевы 2-подгруппы в группе автотопизмов полуполевой проективной плоскости[1]

О. В. Кравцова (г. Красноярск)

Аннотация

В статье изучается гипотеза разрешимости полной группы автоморфизмов недезарговой полуполевой проективной плоскости конечного порядка (вопрос 11.76 в Коуровской тетради). Как известно, эта гипотеза редуцируется к разрешимости группы автотопизмов. Изучая подгруппы четного порядка в группе автотопизмов, мы применяем метод с использованием регулярного множества над полем простого порядка. Показано, что для элементарной абелевой 2-подгруппы в группе автотопизмов выбор базиса линейного пространства позволяет построить матричное представление порождающих элементов, единообразное для полуполевых плоскостей четного и нечетного порядка и не зависящее от размерности пространства. В качестве следствия указано условие, связывающее порядок полуполевой плоскости и порядок элементарной абелевой 2-подгруппы автотопизмов. Выделена бесконечная серия полуполевых плоскостей нечетного порядка, не допускающих подгруппу автотопизмов, изоморфную группе Судзуки $Sz(8)$. В случае четного порядка плоскости получено условие на ядро подплоскости, поточечно фиксируемой автотопизмом порядка два. Выбор такого ядра в качестве основного поля приводит к отсутствию в группе линейных автотопизмов подгруппы, изоморфной знакопеременной группе A_4. Основные доказанные результаты являются техническими и необходимы для дальнейшего изучения подгрупп четного порядка в группе автотопизмов конечной недезарговой полуполевой плоскости. Результаты согласуются с приведенными в статье примерами 3-примитивных полуполевых плоскостей порядка 81, а также с хорошо известными двумя примерами неизоморфных полуполевых плоскостей порядка 16.

Ключевые слова: полуполевая плоскость; регулярное множество; бэровская инволюция; гомология; автотопизм.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00566 А.

Elementary abelian 2-subgroups in an autotopism group of a semifield projective plane

O. V. Kravtsova (Krasnoyarsk)

Abstract

We investigate the hypotheses on solvability of the full collineation group for non-Desarguesian semifield projective plane of a finite order (the question 11.76 in Kourovka notebook). It is well-known that this hypotheses is reduced to the solvability of an autotopism group. We study the subgroups of even order in an autotopism group using the method of a spread set over a prime subfield. It is proved that, for an elementary abelian 2-subgroups in an autotopism group, we can choose the base of a linear space such that the matrix representation of the generating elements is convenient and uniform for odd and even order; it does not depend on the space dimension. As a corollary, we show the correlation between the order of a semifield plane and the order of an elementary abelian autotopism 2-subgroup. We obtain the infinite series of the semifield planes of odd order which admit no autotopism subgroup isomorphic to the Suzuki group $Sz(8)$. For the even order, we obtain the condition for the nucleus of a subplane which is fixed pointwise by the involutory autotopism. If we can choose such the nucleus as a basic field, then the linear autotopism group contains no subgroup isomorphic to the alternating group A_4. The main results can be used as technical for the further studies of the subgroups of even order in an autotopism group for a finite non-Desarguesian semifield plane. The obtained results are consistent with the examples of 3-primitive semifield planes of order 81, and also with two well-known non-isomorphic semifield planes of order 16.

Keywords: semifield plane; spread set; Baer involution; homology; autotopism.

1 Введение

Координатизация точек и прямых конечной проективной плоскости позволяет изучать взаимосвязанно геометрические свойства плоскости и алгебраические свойства координатизирующего множества. Так, классическая, или дезаргова проективная плоскость координатизируется полем, плоскость трансляций – квазиполем. Полуполе («квазитело» в терминологии А.Г. Куроша) координатизирует плоскость трансляций, дуальная которой также является плоскостью трансляций. Такую проективную плоскость называют полуполевой плоскостью, она обладает большими группа центральных коллинеаций (автоморфизмов).

Известна гипотеза ([9], с. 178) о разрешимости полной группы коллинеаций всякой полуполевой недезарговой плоскости конечного порядка (см. также [14], вопрос 11.76, 1990 г.). К настоящему моменту некоторых классов полуполевых плоскостей эта гипотеза подтверждена, но отсутствует общий подход к решению проблемы. С учетом результатов [9] и теоремы Фейта–Томпсона о разрешимости групп нечетного порядка, изучать следует подгруппы четного порядка в группе автотопизмов (коллинеаций, фиксирующих треугольник).

Как показано автором в [2, 11], автотопизм порядка два имеет удобное для вычислений и рассуждений матричное представление. Настоящая статья развивает подход с использованием линейного пространства и регулярного множества с целью изучения подгрупп четного порядка в группе автотопизмов. Для элементарной абелевой 2-подгруппы автотопизмов, порожденной бэровскими инволюциями, найдено матричное представление, единообразное для случаев четного и нечетного порядков полуполевой плоскости. Указана связь порядка плоскости с 2-рангом группы автотопизмов. Основной результат представляет теорема.

Теорема 1. *Пусть π – недезаргова полуполевая плоскость порядка p^N (p – простое число), группа автотопизмов которой содержит элементарную абелеву 2-подгруппу H порядка 2^m, все неединичные элементы которой являются бэровскими инволюциями,*

$$H = \langle \tau_1 \rangle \times \langle \tau_2 \rangle \times \cdots \times \langle \tau_m \rangle,$$

где τ_i – бэровские инволюции, фиксирующие поточечно различные бэровские подплоскости π_i ($i = 1, 2, \ldots, m$). Тогда N делится на 2^m и базис $2N$-мерного линейного пространства над $\mathbb{Z}_p$ можно выбрать так, что τ_i определяется блочно-диагональной матрицей, образованной 2^i блоками размерности $(N/2^{i-1}) \times (N/2^{i-1})$ вида

$$L = \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad p > 2, \qquad L = \begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix} \quad \text{при} \quad p = 2. \tag{1}$$

Отметим, что всюду в статье блоки-подматрицы по умолчанию имеют одинаковую размерность. Так, в записи (1) каждый блок-подматрица – размерности $(N/2^i) \times (N/2^i)$.

При дополнительных ограничениях получены также результаты о подгруппе автотопизмов $H \simeq Sz(2^{2n+1})$ при $p > 2$ и $H \simeq A_4$ при $p = 2$ (следствие 1 и лемма 4).

2 Основные определения и предварительное обсуждение

Приведем основные определения, в соответствии с [9, 15].

Полуполем называют множество S, на котором определены две бинарные алгебраические операции $+$ и $*$, при выполнении условий:

1) $\langle S, + \rangle$ – абелева группа с нейтральным элементом 0;

2) $\langle S \setminus \{0\}, * \rangle$ – лупа;

3) выполняются дистрибутивные законы $a*(b+c) = a*b + a*c$, $(b+c)*a = b*a + c*a$ для любых $a, b, c \in S$.

Ослабление двусторонней дистрибутивности до односторонней приводит к понятию квазиполя – правого либо левого.

Полуполе S содержит подмножества N_r, N_m, N_l, называемые *правым, средним и левым ядрами* соответственно:

$$\begin{aligned} N_r &= \{ n \in S \mid (a*b)*n = a*(b*n) \ \forall a, b \in S \}, \\ N_m &= \{ n \in S \mid (a*n)*b = a*(n*b) \ \forall a, b \in S \}, \\ N_l &= \{ n \in S \mid (n*a)*b = n*(a*b) \ \forall a, b \in S \}. \end{aligned} \tag{2}$$

Пересечение $N_0 = N_l \cap N_m \cap N_r$ назвают *ядром* полуполя, множество

$$Z = \{z \in N_0 \mid z * a = a * z \ \forall a \in S\}$$

– *центром* полуполя. Ядра и центр конечного полуполя являются подполями, и полуполе можно рассматривать как линейное пространство над каждым из них.

Рассмотрим линейное пространство W размерности n над конечным полем $GF(p^s)$ и подмножество линейных преобразований $R \subset GL_n(p^s) \cup \{0\}$, удовлетворяющее условиям:

1) R состоит из p^{ns} квадратных $(n \times n)$-матриц над $GF(p^s)$;

2) R содержит нулевую и единичную матрицы (0 и E);

3) для любых двух различных матриц $A, B \in R$, $A \neq B$, разность $A - B$ является невырожденной матрицей.

Такое множество R называют *регулярным множеством* (spread set, [9]). Введем биективное отображение θ из W на R и запишем регулярное множество в виде $R = \{\theta(y) \mid y \in W\}$. Определим умножение на множестве W правилом $x * y = x \cdot \theta(y)$ $(x, y \in W)$. Тогда $\langle W, +, * \rangle$ – правое квазиполе порядка p^{ns} [15, 13], и при дополнительном условии замкнутости R по сложению – полуполе.

Для построения и исследования конечных полуполей в качестве основного поля используют обычно центр Z полуполя. Однако часто удобнее рассматривать векторное пространство W и матрицы регулярного множества над полем простого порядка $\mathbb{Z}_p$. В этом случае отображение θ записывается с использованием только линейных функций, что значительно упрощает рассуждения и вычисления (также компьютерные).

Далее считаем полуполе W n-мерным пространством над $\mathbb{Z}_p$. Определим с его помощью проективную плоскость π порядка p^n:

1) элементы (x, y) $(x, y \in W)$ пространства $W \oplus W$ назовем аффинными точками плоскости π;

2) аффинными прямыми назовем смежные классы по подгруппам

$$V(\infty) = \{(0, y) \mid y \in W\}, \qquad V(m) = \{(x, x\theta(m)) \mid x \in W\} \quad (m \in W);$$

3) множество всех смежных классов по одной подгруппе $V(m)$ или $V(\infty)$ назовем особой точкой (m) или (∞) соответственно;

4) множество особых точек назовем особой прямой $[\infty]$;

5) инцидентность определим теоретико-множественным способом.

Построенная проективная плоскость π является полуполевой плоскостью, ее полная группа коллинеаций имеет вид $Aut\,\pi = T \leftthreetimes G$, где $T = \{\tau_{a,b} \mid a, b \in W\}$ – группа трансляций,

$$\tau_{a,b} : (x, y) \to (x + a, y + b), \quad x, y \in W,$$

G – трансляционное дополнение, стабилизатор точки $(0, 0)$. Автоморфизмы из G задаются линейными преобразованиями $W \oplus W$:

$$\alpha : (x, y) \to (x, y) \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}.$$

Здесь A, B, C, D – матрицы над $\mathbb{Z}_p$ размерности $n \times n$. Заметим, что запись коллинеаций из G при помощи только линейных преобразований становится возможной за счет матричного представления регулярного множества над полем простого порядка. В противном случае такие коллинеации задаются полулинейными преобразованиями.

Подгруппа $\Lambda < G$, образованная коллинеациями, фиксирующими треугольник со сторонами $[\infty]$, l_2, l_3 и вершинами (∞), $(0,0) \in l_2, l_3$, $P_3 \in [\infty]$, называется *группой автотопизмов*. Без ограничения общности можно считать, что линейные автотопизмы определяются блочно-диагональными матрицами,

$$\lambda : (x, y) \to (x, y) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix},$$

при этом матрицы A и D должны удовлетворять условию (см., например, [10])

$$A^{-1}\theta(m) D \in R \quad \forall \theta(m) \in R. \tag{3}$$

Особыми свойствами обладают коллинеации, фиксирующие замкнутую конфигурацию. Так, известно [9], что всякая коллинеация порядка два является либо центральной, либо бэровской коллинеацией.

Коллинеация проективной плоскости называется *центральной*, если она фиксирует поточечно некоторую прямую (*ось*), некоторую точку (*центр*) и все прямые, проходящие через центр (не поточечно). Если центр инцидентен оси, то коллинеация называется *элацией*, в противном случае – *гомологией*. Порядок проективной плоскости $|\pi|$ делится на порядок всякой элации, $|\pi| - 1$ делится на порядок всякой гомологии.

Трансляционное дополнение G недезарговой полуполевой плоскости представимо как $G = \Omega \rightthreetimes \Lambda$, где Ω – группа элаций с осью $[0]$ и центром (∞). Эта группа элементарная абелева порядка $|\pi|$. Следовательно, изучение полной группы коллинеаций полуполевой плоскости сводится к описанию ее автотопизмов [9].

Каждому из ядер полуполя (2) соответствует множество матриц [5]

$$\begin{aligned} R_l &= \{M \in GL_n(p) \cup \{0\} \mid MT = TM \ \forall T \in R\}, \\ R_m &= \{M \in R \mid MT \in R \ \forall T \in R\}, \\ R_r &= \{M \in R \mid TM \in R \ \forall T \in R\}, \end{aligned}$$

эти множества являются подполями в $GL_n(p) \cup \{0\}$. Их пересечение R_0 естественно называть ядром плоскости. Центральные коллинеации образуют в группе автотопизмов циклические подгруппы [5]:

1) $H_r \simeq N_r^* \simeq R_r^*$ – группа гомологий с осью $[0,0]$ и центром (∞);
2) $H_l \simeq N_l^* \simeq R_l^*$ – группа гомологий с осью $[\infty]$ и центром $(0,0)$;
3) $H_m \simeq N_m^* \simeq R_m^*$ – группа гомологий с осью $[0]$ и центром (0).

Эти группы гомологий имеют матричное представление:

$$H_r = \left\{ \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \;\middle|\; M \in R_r^* \right\}, \quad H_m = \left\{ \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \;\middle|\; M \in R_m^* \right\},$$

$$H_l = \left\{ \begin{pmatrix} M & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix} \;\middle|\; M \in R_l^* \right\}.$$

Коллинеация проективной плоскости π порядка m называется *бэровской*, если она фиксирует поточечно подплоскость порядка $\sqrt{|\pi|} = \sqrt{m}$ (*бэровскую подплоскость*).

Изучая подгруппы автотопизмов четного порядка, остановимся на подгруппах, порожденных перестановочными инволюциями, чтобы получить важные технические результаты. Естественным образом следует разделять случаи полуполевых плоскостей нечетного и четного порядка, учитывая геометрический смысл инволюций.

Пусть π – полуполевая плоскость нечетного порядка, тогда ее группа автотопизмов Λ всегда содержит нормальную элементарную абелеву подгруппу H_0 порядка 4, порожденную гомологиями,

$$H_0 = \left\{ \varepsilon, h_1 = \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, h_2 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}, h_3 = \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix} \right\}. \tag{4}$$

Каждая из этих гомологий является единственным элементом порядка 2 в циклической группе, изоморфной мультипликативной группе одного из ядер координатизирующего полуполя. Очевидно, эти гомологии не сопряжены в Λ.

Случай, когда фактор-группа Λ/H_0 имеет нечетный порядок, не представляет интереса с точки зрения проблемы разрешимости Λ, поэтому предполагаем, что Λ содержит бэровскую инволюцию τ. При $|\pi| = 2^N$ группа автотопизмов Λ не содержит центральных коллинеаций, поэтому для $p = 2$ также считаем $\tau \in \Lambda$. Будем использовать следующие результаты о матричном представлении бэровской инволюции τ и регулярного множества плоскости π, полученные ранее в [2, 11].

Пусть π – недезаргова полуполевая плоскость порядка p^N (p – простое число). Если ее группа автотопизмов Λ содержит бэровскую инволюцию τ, то $N = 2n$ четно и базис $4n$-мерного линейного пространства над $\mathbb{Z}_p$ может быть выбран так, что

$$\tau = \begin{pmatrix} L & 0 \\ 0 & L \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где матрица $L \in GL_{2n}(p)$ имеет вид (1). Множество точек бэровской подплоскости π_τ, фиксируемой τ, состоит из всех векторов $(0, x, 0, y)$, где x, y – элементы n-мерного линейного пространства над полем $\mathbb{Z}_p$.

При $p > 2$ регулярное множество R в $GL_{2n}(p) \cup \{0\}$ состоит из матриц вида

$$\theta(V, U) = \begin{pmatrix} m(U) & f(V) \\ V & U \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где $V \in Q$, $U \in K$, Q, K – некоторые регулярные множества в $GL_n(p) \cup \{0\}$, K – регулярное множество бэровской подплоскости π_τ, m, f – аддитивные взаимно однозначные функции из K и Q в $GL_n(p) \cup \{0\}$, причем $m(E) = E$.

При $p = 2$ регулярное множество R в $GL_{2n}(2) \cup \{0\}$ состоит из матриц вида

$$\theta(V, U) = \begin{pmatrix} U + V + m(V) + w(V) & f(V) + m(U) \\ V & U + w(V) \end{pmatrix}, \tag{7}$$

где $U, V \in K$, K – регулярное множество бэровской подплоскости π_τ в $GL_n(2) \cup \{0\}$. Аддитивные функции m, f, w отображают K в кольцо $(n \times n)$-матриц над $\mathbb{Z}_2$, $m(E) = 0$, функция f взаимно однозначна, нижняя строка матрицы $w(V)$ состоит из нулей для всех $V \in K$.

Заметим, что этот, доказанный в [2], результат естественным образом обобщает матричное представление, полученное в 1989 г. Н.Л. Джонсоном и другими [8] для случая, когда полуполевая плоскость порядка 2^{2n} имеет ядро порядка 2^n.

3 Результаты для полуполевых плоскостей нечетного порядка

Пусть π – недезаргова полуполевая плоскость нечетного порядка и τ – бэровская инволюция в группе автотопизмов Λ. Изучим вопрос об инволюциях в Λ, перестановочных с τ, это могут быть бэровские инволюции либо гомологии h_i (4).

Лемма 1. *Пусть π – недезаргова полуполевая плоскость порядка p^N $(p>2$ – простое), $\tau\in\Lambda$ – бэровская инволюция (5). Если $\sigma\neq\tau$ – бэровская инволюция в $C_\Lambda(\tau)$, то ограничение σ на бэровскую подплоскость π_τ является либо гомологией, либо бэровской инволюцией. В первом случае $\sigma=h_i\tau$ $(i=1,2,3)$, во втором случае N делится на 4 и при подходящем выборе базиса*

$$\sigma=\begin{pmatrix} L & 0 & 0 & 0\\ 0 & L & 0 & 0\\ 0 & 0 & L & 0\\ 0 & 0 & 0 & L\end{pmatrix}. \tag{8}$$

Доказательство. Так как σ перестановочна с τ, то

$$\sigma=\begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & A_2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & B_1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & B_2\end{pmatrix},$$

где $A_i, B_i\in GL_{N/2}(p)$, $A_i^2=B_i^2=E$ $(i=1,2)$. Тогда $\sigma_\tau=\begin{pmatrix} A_2 & 0\\ 0 & B_2\end{pmatrix}$ – автотопизм бэровской подплоскости π_τ, либо тождественный, либо гомология порядка 2, либо бэровская инволюция.

Пусть σ_τ – тождественное преобразование π_τ, $A_2=B_2=E$. Тогда для любой матрицы $\theta(V,U)$ из регулярного множества R (6) верно условие (3):

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}\theta(V,U)\begin{pmatrix} B_1 & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}\in R.$$

В частности, для $E\in R$ получим $B_1=A_1$. Далее, можно выбрать новый базис линейного пространства, не меняя τ, так, что матрица A_1 примет жорданову нормальную форму. По условию, σ – бэровская инволюция, поэтому среди ее характеристических корней только -1 и 1, причем в равном количестве. Кроме того, поскольку λ^2-1 – ее минимальный многочлен, то жорданова нормальная форма A_1 – это обязательно $-E$, т.е. $\sigma=\tau$, противоречие условию леммы.

Пусть σ_τ – гомология порядка 2 с осью [0]. Тогда $A_2=-E$, $B_2=E$ и $B_1=-A_1$ из условия (3). Приводя A_1 к жордановой нормальной форме, получим диагональную матрицу с ±1 на главной диагонали. Покажем, что возможно только $A_1=\pm E$. Действительно, для $\theta(0,U)$ по (3) имеем

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0\\ 0 & -E\end{pmatrix}\begin{pmatrix} m(U) & 0\\ 0 & U\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -A_1 & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -A_1m(U)A_1 & 0\\ 0 & -U\end{pmatrix}\in R,$$

поэтому $m(-U)=-A_1m(U)A_1$, $A_1m(U)=m(U)A_1$ для всех $U\in K$. Предположим, что A_1 содержит и -1, и 1, тогда

$$A_1=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix} -E & 0\\ 0 & E\end{pmatrix} & \begin{array}{c} k\\ N/2-k\end{array}\end{array}$$

(здесь справа указано число строк). Разобьем матрицу $m(U)$ на клетки соответствующей размерности и выполним умножение:

$$m(U) = \begin{array}{cc} \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} & \begin{array}{c} k \\ N/2-k \end{array} \end{array}$$

$$A_1 m(U) = \begin{pmatrix} -M_1 & -M_2 \\ M_3 & M_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -M_1 & M_2 \\ -M_3 & M_4 \end{pmatrix} = m(U)A_1 \Rightarrow M_2 = M_3 = 0,$$

т.е. матрицы $m(U)$ – блочно-диагональные для всех $U \in K$. Это невозможно: множество $\{m(U) \mid U \in K\}$ является регулярным множеством в $GL_{N/2}(p) \cup \{0\}$ и состоит из $p^{N/2}$ матриц, однозначно определяемых, например, нижней строкой. Таких вариантов при $0 < k < N/2$ будет меньше. Итак, матрица A_1 имеет на главной диагонали либо только -1, либо только 1. Получаем варианты $\sigma = h_1$ или $\sigma = h_1\tau$.

Если σ_τ – гомология с осью $[0,0]$, то, рассуждая аналогично, получаем $\sigma = h_2$ или $\sigma = h_2\tau$. Если σ_τ – гомология с осью $[\infty]$, то $\sigma = h_3$ или $\sigma = h_3\tau$.

Рассмотрим случай, когда σ_τ является бэровской инволюцией. Тогда N делится на 4, при подходящей замене базиса получим $A_2 = B_2 = L$. Приводя A_1 и B_1 к жордановой нормальной форме, приходим к выводу, что соответствующие матрицы диагональны с диагональными элементами ± 1. Кроме того, из условия (3) при $\theta(0,E) = E$ имеем $A_1 = B_1$. Так как количество элементов, равных -1, равно числу единичных элементов, то без ограничения общности можно полагать $A_1 = B_1 = L$. Лемма доказана.

Пусть π – полуполевая плоскость нечетного порядка p^N, $H < \Lambda$ – элементарная абелева 2-группа порядка 2^m, не содержащая гомологий. Тогда все инволюции в H только бэровские, и базис линейного пространства можно выбрать так, что все инволюции задаются диагональными матрицами. Занумеруем базисные инволюции в H: $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_m$. Тогда матрица τ_1 образована двумя диагональными матрицами L размерности $(N/2 \times N/2)$, матрица τ_2 – четырьмя матрицами L размерности $(N/4 \times N/4)$, и так далее. Матрица τ_m образована 2^m матрицами L размерности $(N/2^{m-1} \times N/2^{m-1})$, при этом, конечно, $N/2^m \geq 1$. Эти рассуждения доказывают теорему 1 в случае $p > 2$.

Следствие 1._Пусть π – недезаргова полуполевая плоскость порядка p^N ($p > 2$ – простое). Если N не делится на 2^{2m+1}, то группа автотопизмов π не содержит подгрупп, изоморфных $Sz(2^{2n+1})$ для всех $n \geq m$._

Доказательство. Силовская 2-подгруппа в группе Судзуки $Sz(2^{2n+1})$ содержит элементарную абелеву подгруппу порядка 2^{2n+1}, инволюции в которой сопряжены (см., например, [7]). Если H – подгруппа с таким условием в группе автотопизмов, то H не может содержать гомологий. Тогда число N должно делиться на 2^{2n+1}.

Следствие 2._Пусть π – недезаргова полуполевая плоскость порядка p^N ($p > 2$ – простое), где $N = 2^r \cdot s$, s нечетно, F – подгруппа в группе автотопизмов Λ, порожденная гомологиями. Тогда 2-ранг факторгруппы Λ/F не превышает r._

4 Результаты для полуполевых плоскостей четного порядка

Если $|\pi|=2^N$, то каждая гомология имеет нечетный порядок, и элементарная абелева 2-подгруппа в группе автотопизмов Λ содержит только бэровские инволюции.

Лемма 2. *Пусть π – недезаргова полуполевая плоскость порядка 2^N, $\tau\in\Lambda$ – бэровская инволюция (5), где $L=\begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E\end{pmatrix}$. Если σ – бэровская инволюция в $C_\Lambda(\tau)$ и бэровские подплоскости π_τ и π_σ различны, то ограничение σ на π_τ является бэровской инволюцией, N делится на 4, при подходящем выборе базиса σ имеет вид (8).*

Доказательство. Если $\sigma\in C_\Lambda(\tau)$ – бэровская инволюция, то

$$\sigma=\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & B_2 \\ 0 & 0 & 0 & B_1 \end{pmatrix},$$

где $A_1^2=B_1^2=E$, $A_1A_2=A_2A_1$, $B_1B_2=B_2B_1$, причем ограничение σ на бэровскую подплоскость π_τ $\sigma_\tau=\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & B_1\end{pmatrix}$ является бэровской инволюцией или тождественным преобразованием. Так как по условию σ_τ – бэровская инволюция, то базис в подпространствах $\{(0,x_2,0,0)\}$ и $\{(0,0,0,y_2)\}$ можно выбрать так, что $A_1=B_1=L$, $A_2=B_2$, $A_2L=LA_2$, поэтому $A_2=\begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ 0 & D_1\end{pmatrix}$. Перейдем к новому базису $2N$-мерного пространства, используя матрицу перехода

$$T=\begin{pmatrix} E & C & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & C \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix},$$

где $C=\begin{pmatrix} 0 & D_1 \\ D_1 & D_2\end{pmatrix}$. Непосредственные вычисления показывают, что в новом базисе инволюция τ сохраняет свое матричное представление, а матрица $T\sigma T^{-1}$ становится блочно-диагональной вида (8).

Эти рассуждения завершают доказательство леммы 2 и, очевидно, доказывают теорему 1 для случая $p=2$.

Замечание. *Без потери общности можно считать, что в теореме 1 полуполевая плоскость π порядка q^N задана линейным пространством над ядром $N_0\supseteq GF(q)$ ($q=p^s$, p – простое число), а Λ – подгруппа линейных над $GF(q)$ автотопизмов.*

Рассмотрим далее случай, когда бэровская инволюция σ (в обозначениях леммы 2) действует на бэровской подплоскости π_τ тождественно.

Лемма 3. *Пусть π – недезаргова полуполевая плоскость порядка 2^N, $\tau,\sigma\in\Lambda$ – перестановочные бэровские инволюции, фиксирующие поточечно одну бэровскую* *подплоскость $\pi_\tau = \pi_\sigma$. Тогда ядро K_0 этой подплоскости имеет порядок ≥ 4 и при подходящем выборе базиса τ имеет вид (5),*

$$\sigma = \begin{pmatrix} E & A & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & A \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \qquad A \in K_0^*. \tag{9}$$

Доказательство. Достаточно показать, что $A \in K_0^*$. Действительно, рассмотрим условие (3) для σ и регулярного множества (7):

$$\begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix} \theta(V,U) \begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix} \in R \quad \forall U, V \in K. \tag{10}$$

При $V=0$ и произвольном $U \in K$ из (10) имеем

$$\begin{pmatrix} U & m(U)+AU+UA \\ 0 & U \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} U & m(U) \\ 0 & U \end{pmatrix},$$

$UA = AU$, то есть $A \in K_l^* = C_{GL_n(2)}(K)$, матрица A принадлежит левому ядру подплоскости π_τ. При $U=0$ и произвольном $V \in K$:

$$\begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} V+m(V)+w(V) & f(V) \\ V & w(V) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & A \\ 0 & E \end{pmatrix} =$$

$$= \theta(V,0) + \begin{pmatrix} AV & VA+m(V)A+w(V)A+AVA+Aw(V) \\ 0 & VA \end{pmatrix} = \theta(V,VA),$$

при выполнении условий $AV = VA \in K$ и

$$m(VA) = V(A+A^2)+m(V)A+w(V)A+Aw(V), \qquad \forall V \in K. \tag{11}$$

Поэтому матрица A принадлежит пересечению правого, среднего и левого ядер подплоскости π_τ, т.е. ядру $K_0 = K_l \cap K_m \cap K_r$.

Если ядро K_0 подплоскости π_τ изоморфно вкладывается в ядро R_0 плоскости π, то можно рассматривать K_0 в качестве основного поля и подгруппу Λ_0 линейных над K_0 автотопизмов. В этом случае $A = aE \in K_0^*$ – скалярная матрица, и справедлива лемма.

Лемма 4. *Пусть ядро R_0 плоскости π четного порядка 2^N содержит ядро K_0 бэровской подплоскости π_0. Тогда подгруппа Λ_0 линейных над K_0 автотопизмов плоскости π не содержит подгруппы H, изоморфной знакопеременной группе A_4, инволюции которой поточечно фиксируют π_0.*

Доказательство. Будем рассматривать $H \simeq A_4$ как $\langle \tau, \sigma, \gamma \rangle$, где τ и σ – перестановочные инволюции, коллинеация γ имеет порядок 3 и $\gamma^{-1}\tau\gamma = \sigma$. По лемме 3 бэровская инволюция τ имеет вид (5), σ имеет вид (9), условие (10) для скалярной матрицы $A = aE \in K_0$ принимает вид

$$m(aV) + am(V) = V, \qquad \forall V \in K. \tag{12}$$

Так как $\tau\gamma = \gamma\sigma$, то

$$\gamma = \begin{pmatrix} B_1 & B_2 & 0 & 0 \\ 0 & aB_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 & C_2 \\ 0 & 0 & 0 & aC_1 \end{pmatrix},$$

и так как $\sigma\gamma=\gamma\tau\sigma$, то $a^2=a+1$. Напомним, что $m(E)=0$. Тогда условие (12) при $V=E$ дает $m(aE)=E$, а при $V=aE$

$$m(a^2E)+am(aE)=aE, \qquad m(aE)+m(E)+aE=aE, \qquad m(aE)=0.$$

Получили противоречие, доказывающее лемму.

Заметим, что вопрос о существовании подгруппы, изоморфной A_4, в группе коллинеаций конечной полуполевой плоскости, возникал уже давно. В частности, отсутствие A_4 в группе автотопизмов позволило И.В. Бусаркиной (Шевелевой) доказать разрешимость полной группы коллинеаций p-примитивной полуполевой плоскости с дополнительными ограничениями на регулярное множество [6]. Для случая четного порядка автором настоящей статьи в [3] указаны примеры полуполевых плоскостей, допускающих A_4 в трансляционном дополнении.

Лемма 5. *Пусть π – недезаргова полуполевая плоскость порядка 2^m, правое ядро R_r которой имеет порядок 4^k, $k\geqslant 1$. Тогда π допускает подгруппу коллинеаций, изоморфную знакопеременной группе A_4.*

Доказательство. Пусть правое ядро R_r плоскости π содержит подполе порядка 4, и $M\in R_r^*$ – примитивный элемент этого подполя, $M^3=E$. Рассмотрим две элации $\omega_1,\omega_2\in\Omega$ с осью $[0]$ и центром (∞) и гомологию $\gamma\in H_r$ с осью $[0,0]$ и центром (∞),

$$\omega_1=\begin{pmatrix} E & E \\ 0 & E \end{pmatrix}, \qquad \omega_2=\begin{pmatrix} E & M \\ 0 & E \end{pmatrix}, \qquad \gamma=\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & M \end{pmatrix}.$$

Тогда нетрудно проверить непосредственными расчетами, что $|\omega_1|=|\omega_2|=2$, $|\gamma|=3$, $\gamma^{-1}\omega_1\gamma=\omega_2$, т.е. $\langle\omega_1,\omega_2\rangle\leftthreetimes\langle\gamma\rangle\simeq A_4$.

5 Примеры

Пример 1. Существуют ровно две, с точностью до изоморфизма, недезарговы полуполевые плоскости порядка $16=2^4$ (см., например, [2]). Их группы автотопизмов Λ имеют порядки 18 и 108, централизатор бэровской инволюции в Λ равен $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_2\leftthreetimes S_3$ соответственно, что согласуется с леммами 2 и 3.

Пример 2. Как доказано в [5], существуют ровно 124 неизоморфные полуполевые плоскости порядка 256 с левым ядром $R_l\simeq GF(16)$, допускающие бэровскую инволюцию τ в линейном трансляционном дополнении G_0. Эти плоскости определяются регулярным множеством, состоящим из (2×2)-матриц над $GF(16)$, и $G/G_0\simeq Aut\,R_l$. Так как $|\pi|=256=2^8$, то элементарная абелева 2-подгруппа в группе автотопизмов Λ имеет порядок не более 8, но подгруппа линейных автотопизмов Λ_0 не может содержать инволюций, перестановочных с τ, что следует из основной теоремы 1.

Доказанные в настоящей статье результаты полностью согласуются с компьютерными расчетами, освещенными в [1]. Централизатор бэровской инволюции τ в группе линейных автотопизмов Λ_0 равен

$$C_{\Lambda_0}(\tau)=H_l\times H_{rd}\times\langle\tau\rangle,$$

где $H_{rd} \simeq R_r^* \cap R_l^*$. Все бэровские инволюции в Λ_0 сопряжены, порядок Λ_0 равен $2 \cdot 5^s \cdot 3^m$ $(s, m = 1, 2, 3)$ или $2 \cdot 5 \cdot 3^2 \cdot 17$, группа Λ_0 разрешима.

Пример 3. Существуют ровно восемь, с точностью до изоморфизма, полуполевых плоскостей порядка $81 = 3^4$, допускающих бэровскую инволюцию (подробнее см. [4]). Для каждой из них 2-ранг группы автотопизмов Λ равен трем, группа Λ имеет порядок 2^m $(m = 8, \ldots, 11)$, разрешима и содержит четыре или 100 (в одном случае) бэровских инволюций. Учитывая наличие гомологий порядка два, видим, что результаты согласуются с доказанными выше.

6 Заключение

Совершенно ясно, что удобное матричное представление элементарных абелевых 2-подгрупп в группе автотопизмов недезарговой полуполевой проективной плоскости предоставляет возможность исследовать и другие подгруппы автотопизмов четного порядка. Имея целью исследование основной проблемы о разрешимости полной группы коллинеаций, автор считает возможным использовать полученные (во многом технические) результаты для дальнейшего выделения серий конечных полуполевых плоскостей, не допускающих в качестве групп автоморфизмов известных неабелевых простых групп.

Список литературы

[1] Дураков Б. К., Кравцова О. В. Построение и исследование полуполевых плоскостей порядка 256 // Вестник Красноярского государственного педагогического университета им. В.П. Астафьева. 2013. Т. 23, № 1. С. 207–210.

[2] Кравцова О. В. Полуполевые плоскости, допускающие бэровскую инволюцию // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». 2013. Т. 6, № 2. С. 26–38.

[3] Кравцова О.В. О некоторых трансляционных плоскостях, допускающих A_4 // Тезисы докладов III Всесибирского Конгресса женщин-математиков. Красноярск, 2004. С. 38–39.

[4] Кравцова О. В., Шевелева И. В. О некоторых 3-примитивных полуполевых плоскостях // Чебышевский сборник. 2019. Т. 20, Вып. 3. С. 187—203.

[5] Подуфалов Н. Д., Дураков Б. К., Кравцова О. В., Дураков Е. Б. О полуполевых плоскостях порядка 16^2 // Сиб. Мат. Журн. 1996. Т. 37, № 3. С. 616–623.

[6] Подуфалов Н. Д., Бусаркина И. В. Группа автотопизмов полуполевой p-примитивной плоскости порядка q^4 // Алгебра и логика. 1996. Т. 35, № 3. С. 334–344.

[7] Созутов А. И., Сучков Н. М., Сучкова Н. Г. Бесконечные группы с инволюциями. Красноярск: Сибирский федеральный ун-т, 2011. 149 с.

[8] Biliotti M., Jha V., Johnson N. L., Menichetti G. A structure theory for two-dimensional translation planes of order q^2 that admit collineation group of order q^2 // Geom. Dedicata. 1989. Vol. 29. P. 7-43.

[9] Hughes D. R., Piper F. C. Projective planes. New-York, Springer–Verlag Publ., 1973, 324 p.

[10] Kravtsova O. V. On automorphisms of semifields and semifield planes // Siberian Electronic Mathematical Reports. 2016. Vol. 13. P. 1300-1313. https://doi.org/10.17377/semi.2016.13.102

[11] Kravtsova O. V. Semifield planes of odd order that admit a subgroup of autotopisms isomorphic to A_4 // Russian Mathematics. 2016. Vol. 60, no 9. P. 7-22. https://doi.org/10.3103/S1066369X16090024

[12] Kravtsova O. V., Panov S. V., Shevelyova I. V. Some results on isomorphisms of finite semifield planes // Journal of Siberian Federal University. Mathematics&Physics. 2013. Vol. 6, Is. 1. P. 33-39.

[13] Luneburg H. Translation planes. New-York, Springer-Verlag Publ., 1980, 278 p.

[14] Mazurov V. D., Khukhro E. I. (eds.). Unsolved Problems in Group Theory. The Kourovka Notebook, no. 19. Novosibirsk, Sobolev Inst. Math. Publ., 2018, 248 p.

[15] Podufalov N. D. On spread sets and collineations of projective planes // Contem. Math. 1992. Vol. 131, Part 1. P. 697-705.