УДК 519.145

ПОЛУПОЛЕВЫЕ ПЛОСКОСТИ РАНГА 2, ДОПУСКАЮЩИЕ ГРУППУ S_3[1]

О. В. Кравцова, Т. В. Моисеенкова (г. Красноярск)

Аннотация

Одна из классических задач проективной геометрии — построение объекта по известным ограничениям на его автоморфизмы. Рассматриваются конечные проективные плоскости, координатизируемые полуполем, то есть алгебраической системой, удовлетворяющей аксиомам тела, за исключением ассоциативности умножения. Такая плоскость является плоскостью трансляций и обладает также транзитивной группой элаций с аффинной осью. Пусть π — полуполевая плоскость порядка p^{2n} с ядром, содержащим $GF(p^n)$ (p — простое число), группа линейных автотопизмов которой содержит подгруппу H, изоморфную симметрической группе S_3. Для построения и исследования таких плоскостей применяется подход с использованием линейного пространства и регулярного множества — специального семейства линейных преобразований. Построено матричное представление подгруппы H и регулярного множества полуполевой плоскости для $p=2$ и $p>3$. Изучена возможность присутствия центральных коллинеаций в подгруппе H. Показано, что полуполевая плоскость порядка 3^{2n} с ядром $GF(3^n)$ не допускает S_3 в группе линейных автотопизмов. Найдены примеры полуполевых плоскостей порядков 16 и 625, допускающих S_3. Полученные результаты допускают обобщение для полуполевых плоскостей ранга более двух и могут быть использованы, в частности, при обсуждении известной гипотезы о разрешимости полной группы коллинеаций конечной недезарговой полуполевой плоскости.

Ключевые слова: полуполевая плоскость, группа автотопизмов, симметрическая группа, бэровская инволюция, гомология, регулярное множество.

[1]Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-01-00566 А.

SEMIFIELD PLANES OF RANK 2 THAT ADMIT THE GROUP S_3

O. V. Kravtsova, T. V. Moiseenkova (Krasnoyarsk)

Abstract

One of classical problems in projective geometry is to construct the object with known restrictions for its automorphisms. We consider a finite projective plane which is coordinatized by a semifield. It is an algebraic structure which satisfies all skewfield axioms except, possibly, the multiplication associativity. Such the plane is a translation plane and it admits a transitive elation group with an affine axis. Let π be a semifield plane of order p^{2n} with the kernel $\supseteq GF(p^n)$ (p be prime) and its linear autotopisms group contains a subgroup H isomorphic to the symmetric group S_3. We construct such the planes using a linear space and a special set of linear mappings, so-called spread set. We found the matrix representation for the subgroup H and for the spread set if $p=2$ and if $p>3$. Also we studied the existence of central collineations in H. It was proved that any semifield plane of order 3^{2n} with the kernel $GF(3^n)$ admits no subgroups isomorphic to S_3 in the linear autotopism group. The examples of semifield planes of order 16 and 625 admitting S_3 were found. The approach may be generalized for the semifield planes of a rank more than two. The results may be applied for the studying of a well-known hypotheses that a full collineation group of any finite non-Desarguesian semifield plane is solvable.

Keywords: semifield plane, autotopism group, symmetric group, Baer involution, homology, spread set.

1 Введение

Координатизация точек и прямых в конечной проективной плоскости устанавливает связь между геометрическими свойствами плоскости и алгебраическими свойствами координатизирующего множества. Так, классическая, или дезаргова проективная плоскость координатизируется полем, плоскость трансляций — квазиполем.

Проективная плоскость называется полуполевой, если ее координатизирующее множество является полуполем (semifield). Такая плоскость одновременно является плоскостью трансляций и дуальна плоскости трансляций. Особенности строения кординатизирующего множества приводят к ряду вопросов, связанных со строением полной группы коллинеаций (автоморфизмов) полуполевых плоскостей. Наиболее известна гипотеза [1, вопрос 11.76, 1990 г.] о разрешимости полной группы коллинеаций всякой полуполевой недезарговой плоскости конечного порядка. К настоящему времени эта гипотеза подтверждена лишь для некоторых классов полуполевых плоскостей (например, [2]). В связи с этим информация о коллинеациях конечной полуполевой плоскости является важной и ценной.

Известен способ задания полуполевой плоскости, как и всякой плоскости трансляций, с использованием линейного пространства и специального семейства линейных преобразований, так называемого регулярного множества. Матричное представление регулярного множества определяет алгебраические свойства кординатизирующего полуполя и геометрические свойства полуполевой плоскости, в том числе строение группы коллинеаций. Таким образом, представляет интерес как задача исследования группы коллинеаций при известном представлении регулярного множества, так и обратная задача — построение конечных проективных плоскостей по известным ограничениям на группу коллинеаций (например, [3]). Большое значение приобрели результаты [4] о полуполевой плоскости, допускающей бэровскую инволюцию.

Симметрическая группа S_3 является некоммутативной группой минимального порядка, ее наличие в группе коллинеаций проективной плоскости и в группе автоморфизмов координатизирующего множества может указывать на наличие особенных свойств. Так, среди всех 23 неизоморфных полуполей порядка 16 ровно одно имеет группу автоморфизмов, изоморфную S_3. Таким же свойством обладает исключительное полуполе Хентзела–Рýа порядка 64, не являющееся ни лево-, ни правопримитивным [5]. Кроме того, поскольку S_3 содержится в значительном числе известных групп, условие существования S_3 в группе автотопизмов приводит к получению важных технических результатов для дальнейших исследований. Отметим также особую роль группы S_3 в исследовании полуполевых плоскостей в связи с классификацией полуполей не только с точностью до изотопизма, но и с точностью до S_3 (так называемые орбиты Кнута, см., например, [6]).

Пусть π — полуполевая плоскость порядка p^{2n} с ядром порядка p^n (p — простое число), подгруппа линейных автотопизмов (коллинеаций, фиксирующих треугольник) которой содержит подгруппу H, изоморфную симметрической группе S_3. Построено матричное представление подгруппы H в $GL_4(p^n)$ и регулярного множества плоскости π в $GL_2(p^n)\cup\{0\}$. Найдены примеры таких плоскостей порядка 16 и 625.

Основные результаты работы приведены в теоремах 1–3. Результаты анонсированы в материалах Международной конференции и летней школы молодых ученых «Группы и графы, алгоритмы и автоматы» (Екатеринбург, 2015 г.) и XVI Международной конференции «Алгебра, теория чисел и дискретная геометрия: современные проблемы, приложения и проблемы истории» (Тула, 2019 г.).

2 Основные определения и предварительные обсуждения

Введем кратко основные определения, обозначения и результаты, необходимые для работы. Для подробного ознакомления рекомендуем [7, 8].

О п р е д е л е н и е 1. *Полуполем*, в соответствиии с [7, гл. VIII], будем называть множество S, на котором определены две бинарные алгебраические операции $+$ и $*$, при выполнении условий:

1) $\langle S,+\rangle$ — абелева группа с нейтральным элементом 0;

2) $\langle S^*,*\rangle$ — лупа ($S^*=S\setminus\{0\}$);

3) выполняются дистрибутивные законы $a*(b+c)=a*b+a*c$, $(b+c)*a=b*a+c*a$ для любых $a,b,c\in S$.

Полуполе S содержит подмножества N_r, N_m, N_l, называемые *правым, средним* *и левым ядрами* соответственно:

$$N_r = \{n \in S \mid (a*b)*n = a*(b*n) \ \forall a, b \in S\},$$
$$N_m = \{n \in S \mid (a*n)*b = a*(n*b) \ \forall a, b \in S\},$$
$$N_l = \{n \in S \mid n*(a*b) = n*(a*b) \ \forall a, b \in S\},$$

пересечение $N_l \cap N_m \cap N_r$ назвают *ядром* полуполя. Ядра конечного полуполя являются подполями, и полуполе можно рассматривать как линейное пространство над каждым из них. Следовательно, порядок конечного полуполя равен степени простого числа.

Рассмотрим линейное пространство W размерности d над полем $F \simeq GF(p^n)$ и инъективное отображение $\theta : W \to GL_d(p^n) \cup \{0\}$, удовлетворяющее условиям:

1) образом нулевого вектора является нулевая матрица;

2) единичная матрица E имеет прообраз в W;

2) $\theta(x+y) = \theta(x) + \theta(y)$ для всех $x, y \in W$.

Определим на W умножение правилом $x*y = x \cdot \theta(y)$, тогда $\langle W, +, * \rangle$ — полуполе порядка p^{nd}. Множество матриц $R = \{\theta(y) \mid y \in W\}$ называют при этом *регулярным множеством* (spread set, [7, гл. VII]). Рассмотрим внешнюю прямую сумму $V = W \oplus W$ и определим проективную плоскость π следующим образом:

1) элементы (x, y), $x, y \in W$, пространства V назовем аффинными точками плоскости π;

2) аффинными прямыми назовем смежные классы по подгруппам

$$V(m) = \{(x, x\theta(m)) \mid x \in W\}, \quad m \in W,$$
$$V(\infty) = \{(0, y) \mid y \in W\};$$

3) множество всех смежных классов по одной подгруппе $V(m)$ или $V(\infty)$ назовем особой точкой (m) или (∞) соответственно;

4) множество особых точек назовем особой прямой $[\infty]$;

5) инцидентность определим теоретико-множественным способом.

Построенная таким образом проективная плоскость является полуполевой плоскостью порядка p^{nd}, число d будем называть ее *рангом*.

Полная группа коллинеаций полуполевой плоскости содержит подгруппу *автотопизмов* Λ, то есть коллинеаций, фиксирующих треугольник с вершинами $(0,0)$, (0), (∞) и сторонами $[0,0]$, $[0]$, $[\infty]$. Автотопизмы задаются полулинейными преобразованиями пространства V и определяются блочно-диагональными матрицами,

$$(x, y)^\lambda = (x^\sigma, y^\sigma) \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix},$$

здесь σ — автоморфизм основного поля F, действующий на координаты вектора, $A, B \in GL_d(p^n)$. При этом сохранение инцидентности требует выполнения условия

$$A^{-1} \left[\theta(m)\right]^\sigma B \in R \quad \forall \theta(m) \in R.$$

Обозначим Λ_0 подгруппу линейных автотопизмов ($\sigma = 1$), $\Lambda / \Lambda_0 \subset Aut(F)$,

$$A^{-1} \theta(m) B \in R \quad \forall \theta(m) \in R. \tag{1}$$

Мы рассматриваем полуполевые плоскости ранга 2 над полем $F \simeq GF(p^n)$, считая, что ядро полуполя либо совпадает с F, либо содержит F (в этом случае плоскость дезаргова, R — поле). Группа линейных автотопизмов состоит из матриц размерности 4×4 с элементами из F, регулярное множество R содержится в $GL_2(p^n)\cup\{0\}$. Пусть $H<\Lambda_0$, $H=\langle\tau,\sigma\rangle\simeq S_3$, где τ и σ — неперестановочные инволюции, коллинеация $\gamma=\tau\sigma$ имеет порядок 3. Обсудим прежде всего геометрический смысл элементов H. Как известно, всякая коллинеация порядка два проективной плоскости является либо центральной, либо бэровской коллинеацией [7, теорема 4.3].

О п р е д е л е н и е 2. Коллинеация проективной плоскости π порядка m называется *бэровской*, если она фиксирует поточечно максимальную подплоскость порядка $\sqrt{|\pi|}=\sqrt{m}$ (бэровскую подплоскость).

О п р е д е л е н и е 3. Коллинеация проективной плоскости π называется *центральной* (или перспективностью), если она фиксирует поточечно некоторую прямую (ось), некоторую точку (центр) и все прямые, проходящие через центр (не поточечно). Если центр инцидентен оси, то коллинеация называется элацией, в противном случае — гомологией. Если m — порядок проективной плоскости, то m делится на порядок всякой элации, $m-1$ делится на порядок всякой гомологии.

Центральные коллинеации образуют в группе автотопизмов следующие циклические подгруппы [2]:

1) $H_r\simeq N_r^*$ — группа гомологий с осью $[0,0]$ и центром (∞);
2) $H_l\simeq N_l^*$ — группа гомологий с осью $[\infty]$ и центром $(0,0)$;
3) $H_m\simeq N_m^*$ — группа гомологий с осью $[0]$ и центром (0).

При этом

$$H_r=\left\{\begin{pmatrix}E & 0\\ 0 & A\end{pmatrix}\;\middle|\;\theta(m)A\in R\ \forall\theta(m)\in R\right\},$$

$$H_m=\left\{\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & E\end{pmatrix}\;\middle|\;A\theta(m)\in R\ \forall\theta(m)\in R\right\},$$

$$H_l=\left\{\begin{pmatrix}A & 0\\ 0 & A\end{pmatrix}\;\middle|\;\theta(m)A=A\theta(m)\ \forall\theta(m)\in R\right\}.$$

Таким образом, если порядок рассматриваемой полуполевой плоскости π равен p^{2n}, то при $p=2$ инволюции τ и σ могут быть только бэровскими, при $p>2$ — бэровскими коллинеациями либо гомологиями, произведение $\tau\sigma$ может быть гомологией при $p\neq 3$. Случаи $p=2$, $p=3$, $p>3$ требуют отдельного изучения.

3 Случай $p=2$

Теорема 1. *Пусть π — полуполевая плоскость порядка 2^{2n} с ядром, содержащим $F\simeq GF(2^n)$, группа линейных автотопизмов которой содержит подгруппу H, изоморфную симметрической группе S_3. Тогда базис 4-мерного линейного пространства над F может быть выбран так, что регулярное множество плоскости в $GL_2(F)\cup\{0\}$ имеет вид*

$$R=\left\{\theta(v,u)=\begin{pmatrix}u+v+m(v) & f(v)+m(u)\\ v & u\end{pmatrix}\;\middle|\;u,v\in F\right\},\tag{2}$$

где m,f — аддитивные функции на F, причем f взаимно однозначна и $m(1)=0$. Далее, *1) если H содержит гомологию с осью $[0,0]$ и центром (∞), то $f(x)=x$ $\forall x\in F$;*

2) если H содержит гомологию с осью $[0]$ и центром (0), то $f(x)=m(m(x))+m(x)+x$ $\forall x\in F$;

3) если H содержит гомологию с осью $[\infty]$ и центром $(0,0)$, то $f(x)=x$, $m(x)=0$ $\forall x\in F$, плоскость дезаргова;

4) если H не содержит гомологий, то функции m и f удовлетворяют условиям

$$m(m(x))=m(x), \quad f(m(x))=m(x), \quad m(f(x))=m(x)+f(x)+x, \quad f(f(x))=x \quad \forall x\in F.$$

Доказательство. Так как $|\pi|=2^{2n}$, элементы τ и σ являются бэровскими инволюциями. Воспользуемся результатами [4]: если полуполевая плоскость порядка 2^{2n} с ядром порядка $\geq 2^n$ допускает бэровскую инволюцию τ в линейном трансляционном дополнении, то

$$\tau=\begin{pmatrix}1&1&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix},$$

регулярное множество имеет вид (2). Обозначим

$$L=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}, \quad \tau=\begin{pmatrix}L&0\\0&L\end{pmatrix}, \quad \sigma=\begin{pmatrix}A&0\\0&B\end{pmatrix},$$

$A,B\in GL_2(p^n)$, тогда для инволюции σ должны быть выполнены условия:

1) $A^2=B^2=E$,

2) $AL\neq LA$ или $BL\neq LB$,

3) $(LA)^3=(LB)^3=E$.

Тогда матрицы A и B могут быть равны либо L (не одновременно), либо матрице

$$\begin{pmatrix}a&a^2+1\\1&a\end{pmatrix}, \quad a\in F.$$

Заметим, что верно равенство

$$\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&a^2+1\\1&a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&a\\0&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=M,$$

поэтому базис линейного пространства можно выбрать так (не меняя τ), что

$$\sigma\in\left\{\begin{pmatrix}L&0\\0&M\end{pmatrix},\begin{pmatrix}M&0\\0&L\end{pmatrix},\begin{pmatrix}M&0\\0&M\end{pmatrix}\right\}.$$

Рассмотрим подробно все три возможных случая. В первом случае коллинеация $\gamma=\tau\sigma$ определяется матрицей

$$\gamma=\begin{pmatrix}E&0\\0&LM\end{pmatrix}$$

и является гомологией порядка 3 с осью $[0,0]$ и центром (∞), при этом матрица LM удовлетворяет условию $\theta(v,u)LM\in R$ для всех v,u. При $v=0$ имеем

$$\theta(0,u)LM=\begin{pmatrix}u&m(u)\\0&u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u+m(u)&u\\u&0\end{pmatrix}=\theta(u,0),$$

отсюда $f(u)=u$. Рассмотрение $u=0$ не дает новых ограничений на функции f и m.

Во втором случае

$$\gamma=\begin{pmatrix} LM & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$$

является гомологией порядка 3 с осью $[0]$ и центром (0), при этом $LM\theta(v,u)\in R$ для всех v,u. При $v=0$

$$LM\theta(0,u)=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u & m(u)+u \\ u & m(u) \end{pmatrix}=\theta(0,m(u)),$$

отсюда $f(u)=m(m(u))+m(u)+u$. При $u=0$ получим то же условие.

В третьем случае для $A=B=M$ должно выполняться условие (1). При $v=0$

$$M^{-1}\theta(0,u)M=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u & m(u) \\ 0 & u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u & 0 \\ m(u) & u \end{pmatrix}=\theta(m(u),u),$$

тогда $m(m(x))=m(x)$, $f(m(x))=m(x)$. При $u=0$

$$M^{-1}\theta(v,0)M=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v+m(v) & f(v) \\ v & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & v \\ f(v) & v+m(v) \end{pmatrix}=\theta(f(v),v+m(v)),$$

тогда $m(f(x))=m(x)+f(x)+x$, $f(f(x))=x$. Поскольку отображение $m(x)$ в общем случае не является биективным, полученные условия трудно преобразовать к более удобному виду.

Заметим, что если в третьем случае коллинеация γ является гомологией, то ее ось — особая прямая $[\infty]$, центр — точка $(0,0)$, при этом матрица LM должна быть перестановочна со всеми матрицами регулярного множества. Из этого условия $LM\theta(v,u)=\theta(v,u)LM$ получим $f(v)=v$, $m(v)=0$ для всех v, поэтому, в силу линейности m и f, регулярное множество является полем, т.е. плоскость π дезаргова. Теорема 1 полностью доказана.

4 Случай $p>2$

Лемма. *Пусть π — полуполевая плоскость порядка p^{2n} с ядром, содержащим $F\simeq GF(p^n)$ ($p>2$ — простое), группа линейных автотопизмов которой содержит подгруппу H, изоморфную симметрической группе S_3. Тогда инволюции $\tau,\sigma\in H$ являются бэровскими, базис 4-мерного линейного пространства над F может быть выбран так, что*

$$\tau=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{3}$$

регулярное множество плоскости в $GL_2(F)\cup\{0\}$ имеет вид

$$R=\left\{\theta(v,u)=\begin{pmatrix} m(u) & f(v) \\ v & u \end{pmatrix}\;\middle|\; u,v\in F\right\}, \tag{4}$$

где m, f — аддитивные взаимно однозначные функции на F, причем $m(1)=1$. При этом $\sigma=\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & B \end{pmatrix}$, где $A, B\in\{L, M\}$ при $p>3$, $A, B\in\{L, A_1, A_2\}$ при $p=3$, $(A, B)\neq (L, L)$,

$$L=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad M=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}, \qquad A_1=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A_2=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. В случае нечетного порядка плоскости π центральные коллинеации порядка 2 в группе автотопизмов Λ являются гомологиями и определяются матрицами

$$\begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & -E \end{pmatrix},$$

они не сопряжены в Λ. Поэтому инволюции τ, σ, как и для $p=2$, являются бэровскими коллинеациями. Воспользуемся результатами [9]: в подходящем базисе линейного пространства бэровская инволюция определяется матрицей (3), регулярное множество имеет вид (4).

Инволюция σ должна удовлетворять условиям 1–3 из доказательства Теоремы 1. При этом для матрицы A (для B аналогично) возможны четыре ситуации ($a\in F$, $a\neq 0$):

1) $A=L$,

2) $p=3$ и $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix}$,

3) $p=3$ и $A=\begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

4) $p\neq 3$ и $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a \\ \frac{3}{4a} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$.

Для случаев 2–4 можно выбрать замену базиса линейного пространства, упрощающую вид матрицы A и сохраняющую вид L. Действительно,

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ a & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = A_1,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A_2,$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & a \\ \frac{3}{4a} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = M.$$

Лемма доказана.

Теорема 2. *Если π — полуполевая плоскость порядка 3^{2n} с ядром, содержащим $F\simeq GF(3^n)$, то группа линейных над F автотопизмов не содержит подгруппы, изоморфной симметрической группе S_3.*

Доказательство. Если $A=L$ или $B=L$, то $\gamma=\tau\sigma$ является гомологией порядка 3, что невозможно, так как $|\pi|-1$ не делится на 3.

Для остальных выделенных в Лемме 1 случаев при $p=3$ проверим выполнение условия (1). Непосредственные расчеты показывают:

$$A_1^{-1}\theta(v,0)A_1=\begin{pmatrix}-f(v) & -f(v)\\ -v+f(v) & f(v)\end{pmatrix}=\theta(-v+f(v),f(v))\Rightarrow f(f(v))=0\ \forall v;$$

$$A_2^{-1}\theta(v,0)A_2=\begin{pmatrix}-v & v-f(v)\\ -v & v\end{pmatrix}=\theta(-v,v)\Rightarrow f(-v)=v-f(v)\ \forall v;$$

$$A_1^{-1}\theta(0,u)A_2=\begin{pmatrix}m(u) & -m(u)\\ -m(u) & m(u)+u\end{pmatrix}=\theta(-m(u),m(u)+u)\Rightarrow m(m(u))=0\ \forall u;$$

$$A_2^{-1}\theta(0,u)A_1=\begin{pmatrix}m(u)+u & u\\ u & u\end{pmatrix}=\theta(u,u)\Rightarrow m(u)=m(u)+u\ \forall u.$$

Учитывая инъективность отображений m и f, заключаем, что все перечисленные случаи невозможны. Теорема 2 доказана.

Отметим, что частный случай $|\pi|=81$ представлен первым автором в докладе на Международной конференции G2A2 (Екатеринбург, 2015 г.): если полуполевая плоскость порядка 81 допускает бэровскую инволюцию в группе автотопизмов, то порядок группы автотопизмов равен 2^k, $8\le k\le 11$.

Теорема 3. *Пусть π — полуполевая плоскость порядка p^{2n}, с ядром, содержащим $F\simeq GF(p^n)$ ($p>3$ — простое), группа линейных автотопизмов которой содержит подгруппу H, изоморфную симметрической группе S_3. Тогда базис 4-мерного линейного пространства над F может быть выбран так, что регулярное множество плоскости в $GL_2(F)\cup\{0\}$ имеет вид* (4). *Далее:*

1) если H содержит гомологию с осью $[0,0]$ и центром (∞), то $f(x)=-m(x)/3\ \forall x\in F$;

2) если H содержит гомологию с осью $[0]$ и центром (0), то $f(m(x))=m(f(x))=-x/3\ \forall x\in F$;

3) если H содержит гомологию с осью $[\infty]$ и центром $(0,0)$, то $p-3$ не является квадратом, $f(x)=-x/3$, $m(x)=x\ \forall x\in F$, плоскость дезаргова;

4) если H не содержит гомологий, то функции m и f удовлетворяют условиям ($\forall x\in F$)

$$m(m(x))=x,\qquad f(f(x))=\frac{1}{9}x,$$

$$m(f(x))=-\frac{1}{3}m(x)-f(x)-\frac{1}{3}x,\qquad f(m(x))=\frac{1}{3}m(x)+f(x)-\frac{1}{3}x.$$

Доказательство. Аналогично доказательству Теоремы 2, рассмотрим случаи для $p>3$, выделенные в Лемме 1.

При $(A,B)=(L,M)$ коллинеация $\gamma=\tau\sigma$ является гомологией с осью $[0,0]$ и центром (∞), тогда матрица

$$LM=\begin{pmatrix}-1/2 & -1/2\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}$$

должна удовлетворять условию $\theta(v,u)LM\in R$ для всех $v,u\in F$. В силу замкнутости R по сложению вместо LM достаточно рассмотреть матрицу $N=2LM+E$. Тогда при $v=0$ получим

$$\theta(0,u)N=\begin{pmatrix}0 & -m(u)\\ 3u & 0\end{pmatrix}=\theta(3u,0),$$

отсюда $f(x)=-m(x)/3$ для всех x. Случай $u=0$ дает то же условие.

При $(A,B)=(M,L)$, аналогично, γ является гомологией в осью $[0]$ и центром (0), матрица N удовлетворяет условию $N\theta(v,u)\in R$ для всех v,u. Рассматривая отдельно $v=0$ и $u=0$, получим условие $f(m(x))=m(f(x))=-x/3$ для всех x.

При $A=B=M$ проверяем выполнение условия (1). При $v=0$ получим

$$M^{-1}\theta(0,u)M=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} m(u)+3u & m(u)-u \\ 3m(u)-3u & 3m(u)+u \end{pmatrix}\in R,$$

из замкнутости регулярного множества по сложению следуют равенства

$$m(3m(u)+u)=m(u)+3u, \quad f(3m(u)-3u)=m(u)-u.$$

Аналогично, при $v=0$ условие (1) приводит к равенствам

$$m(-v-3f(v))=v+3f(v), \quad f(-v+9f(v))=v-f(v).$$

Преобразуя, получаем условия Теоремы 3.

Дополнительно рассмотрим ситуацию, когда коллинеация γ является гомологией с осью $[\infty]$ и центром $(0,0)$. Тогда матрица LM централизует R, поэтому матрица $N=2LM+E$ также удовлетворяет условию $N\theta(v,u)=\theta(v,u)N$ для всех v,u, $f(v)=-v/3$, $m(u)=u$,

$$|\theta(v,u)|=\begin{vmatrix} u & -\frac{1}{3}v \\ v & u \end{vmatrix}=\frac{u^2}{3}\left(3+\left(\frac{v}{u}\right)^2\right).$$

Если $p-3$ не является квадратом, то $|\theta(v,u)|\neq 0$ для всякой ненулевой матрицы, и плоскость π дезаргова. Теорема 3 доказана.

Рассматривая произведение гомологий

$$\begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & LM \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad \begin{pmatrix} LM & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

приходим к очевидному следствию.

Следствие. *Пусть π — полуполевая плоскость порядка p^{2n} ($p=2$ или $p>3$ — простое) с ядром $\supseteq GF(p^n)$, группа линейных автотопизмов содержит подгруппы*

$$H_1=\langle\tau,\gamma_1\rangle\simeq S_3, \quad H_2\langle\tau,\gamma_2\rangle\simeq S_3,$$

где τ — бэровская инволюция, γ_1 — гомология порядка 3 с осью $[0,0]$ и центром (∞), γ_2 — гомология порядка 3 с осью $[0]$ и центром (0). Тогда подгруппа $H_3=\langle\tau,\gamma_1\gamma_2\rangle$ также изоморфна S_3 и не содержит гомологий.

5 Примеры

Покажем существование объектов описанного вида: найдем примеры полуполевых плоскостей ранга 2 над $GF(p^n)$, допускающих подгруппу линейных автотопизмов, изоморфную S_3, выбирая минимальный возможный порядок плоскости. Напомним, что всякая аддитивная функция $g(x)$ на $GF(p^n)$, согласно [10], имеет вид

$$g(x)=c_0x+c_1x^p+c_1x^{p^2}+\cdots+c_{n-1}x^{p^{n-1}}, \qquad c_0,c_1,c_2,\ldots,c_{n-1}\in GF(p^n).$$

П р и м е р 1. Пусть $p=2$, $p^{2n}=16$, $F=\{0,1,\alpha,\alpha+1\}$, $\alpha^2=\alpha+1$. Известно, что существуют ровно две неизоморфных недезарговых полуполевых плоскости порядка 16 (см., например, [5]). Покажем, что одна из них обеспечивает необходимый пример. Рассмотрим условия в Теореме 1, полагая

$$m(x)=m_0(x+x^2), \qquad f(x)=f_0x+f_1x^2 \quad (x\in F),$$

здесь $m_0, f_0, f_1 \in F$.

Достаточным условием существования полуполевой плоскости, удовлетворяющей Теореме 1, является требование

$$\begin{vmatrix} u+v+m_0(v+v^2) & f_0v+f_1v^2+m_0(u+u^2) \\ v & u \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall u,v\in F,\ (u,v)\neq(0,0). \tag{5}$$

Перебор коэффициентов m_0, f_0, f_1, удовлетворяющих условиям Теоремы 1 и (5), приводит к результатам, перечисленным в Табл. 1.

Таблица 1

Регулярное множество	m_0	f_0	f_1	Случай Теор. 1
R_1	1	1	0	1
R_2	1	0	1	2
R_3	α	1	0	1,2,4
R_4	$\alpha+1$	1	0	1,2,4

Таким образом, найдены четыре полуполевых плоскости порядка 16 с регулярными множествами R_1, R_2, R_3, R_4, группа линейных автотопизмов которых содержит подгруппу, изоморфную S_3. Отметим, что эти плоскости изоморфны. Действительно, автоморфизм $x\to x^2$ поля F переводит R_3 в R_4, и непосредственная проверка показывает, что выполнено

$$\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} R_1 \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = R_2,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \alpha^2 \\ \alpha^2 & 1 \end{pmatrix} R_1 = R_3.$$

П р и м е р 2. Построим примеры плоскостей порядка 625, используя результаты Теоремы 3. Рассмотрим поле $GF(25)=GF(5^2)$ как фактор-кольцо кольца $\mathbb{Z}_5[x]$ по идеалу, порожденному неприводимым в $\mathbb{Z}_5[x]$ многочленом x^2-2,

$$GF(25)\simeq \mathbb{Z}_5[x]/(x^2-2)=\{0,1,2,3,4,\alpha,\alpha+1,\ldots,4\alpha+4\},$$

где $\alpha^2=2$. Рассмотрим условия в Теореме 3, полагая

$$m(x)=m_0x+m_1x^5, \qquad f(x)=f_0x+f_1x^5 \quad (x\in F),$$

здесь $m_0, m_1, f_0, f_1 \in F$.

Достаточным условием существования полуполевой плоскости, удовлетворяющей Теореме 3, является требование

$$\begin{vmatrix} m_0u+m_1u^5 & f_0v+f_1v^5 \\ v & u \end{vmatrix} \neq 0 \quad \forall u,v\in F,\ (u,v)\neq(0,0). \tag{6}$$

Компьютерный перебор коэффициентов m_0, m_1, f_0, f_1, удовлетворяющих условиям Теоремы 3 и (6), приводит к результатам, перечисленным в Табл. 2. В таблице исключены изоморфные копии, полученные автоморфизмом $x\to x^5$ поля F.

Таблица 2

№	m_0	m_1	f_0	f_1	Случай Теор. 3
1	2	4	1	2	1
2	4	2	2	1	1
3	$\alpha+4$	$4\alpha+2$	$3\alpha+2$	$2\alpha+1$	1
4	$2\alpha+1$	3α	$\alpha+3$	4α	1
5	$2\alpha+2$	$3\alpha+4$	$\alpha+1$	$4\alpha+2$	1
6	2	4	2	1	2
7	4	2	1	2	2
8	$\alpha+4$	$4\alpha+2$	$\alpha+1$	$4\alpha+2$	2
9	$2\alpha+1$	3α	$4\alpha+3$	α	2
10	$2\alpha+2$	$3\alpha+4$	$3\alpha+2$	$2\alpha+1$	2
11	α	$4\alpha+1$	2α	4	4
12	2α	$3\alpha+1$	4α	3α	4
13	α	$4\alpha+1$	3α	$2\alpha+3$	1,2,4
14	$\alpha+4$	$4\alpha+2$	$3\alpha+2$	$2\alpha+1$	1,2,4

Дальнейшее выделение в приведенном списке попарно изоморфных полуполевых плоскостей не проводилось, поскольку значительно более трудоемко в сравнении со случаем $|\pi|=16$. Существование полуполевых плоскостей порядка 625 с подгруппой линейных автотопизмов, изоморфной S_3, подтверждено.

В заключение следует заметить, что использованный метод может быть обобщен на случай полуполевых плоскостей ранга более 2. Доказанные результаты и найденные примеры могут быть использованы при дальнейшем исследовании полуполевых плоскостей с ограничениями на группу коллинеаций.

Список литературы

[1] **Мазуров В.Д., Хухро Е.И.** Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. Издание 16-е, дополненное, включающее архив решенных задач. Ин-т матем. им. С. Л. Соболева СО РАН, Новосибирск, 2006. 193 с.

[2] **Подуфалов Н.Д., Дураков Б.К., Кравцова О.В., Дураков Е.Б.** О полуполевых плоскостях порядка 16^2 // Сиб. Мат. Журн. 1996. Т. 37, № 3. С. 616–623.

[3] **Jha V., Johnson N.L.** The translation planes of order 81 admitting $SL(2,5)$ // Note di Matematica, 2005, vol. 24, no. 2, pp. 59–73.

[4] **Biliotti M., Jha V., Johnson N.L., Menichetti G.** A structure theory for two-dimensional translation planes of order q^2 that admit collineation group of order q^2 // Geom. Dedicata, 1989, vol. 29, pp. 7–43.

[5] **Levchuk V.M., Kravtsova O.V.** Problems on structure of finite quasifields and projective translation planes // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2017, vol. 38, no 4, pp. 688—698.

[6] **Rúa I.F., Combarro E.F., Ranilla J.** Classification of semifields of order 64 // J. of Algebra, 2009, vol. 322, no. 11, pp. 4011–4029.

[7] **Hughes D.R., Piper F.C.** Projective planes. Springer–Verlag New–York Inc., 1973. 292 p.

[8] **Johnson N.L., Jha V., and Biliotti M.** Handbook of finite translation planes. Chapman and Hall, Boca Raton, London, New York, 2007. 861 p.

[9] **Кравцова О.В.** Полуполевые плоскости, допускающие бэровскую инволюцию // Известия Иркутского государственного университета. Серия «Математика». 2013. №2, С. 26–38.

[10] **Vaughan, T.P.** Polynomials and linear transformations over finite fields // J. Reine Angew. Math., 1974, vol. 262, pp. 179–206.