

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Базовая кафедра вычислительных и информационных технологий

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой

_____ / В.В. Шайдуров

«____» _____ 2021 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 02.03.01 Математика и компьютерные науки

**АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ВЕКТОРНОГО
РАЗБИЕНИЯ И ТОЖДЕСТВА ЧАУНДИ-БУЛЛАРДА**

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент

_____ / А. П. Ляпин

Выпускник

_____ / Т. С. Фролов

Красноярск 2021

РЕФЕРАТ

Бакалаврская работа по теме «Алгоритм вычисления функции векторного разбиения и тождества Чаунди-Булларда» содержит 25 страниц текста, 15 использованных источников, 7 рисунков, 1 приложение.

ДИОФАНТОВЫ УРАВНЕНИЯ, ФУНКЦИЯ ВЕКТОРНОГО РАЗБИЕНИЯ, ТОЖДЕСТВА ЧАУНДИ-БУЛЛАРДА, КОМБИНАТОРНЫЙ АНАЛИЗ, РЕШЁТОЧНЫЕ ПУТИ, МЕТОД ПЕРЕБОРА.

Цель работы – разработка алгоритмов вычисления функции векторного разбиения путём решения систем линейных диофантовых уравнений и получения тождеств Чаунди-Булларда, произведение вычислений на основе этих алгоритмов.

В результате работы были изучены диофантовы уравнения, а также разработан алгоритм вычисления функции векторного разбиения путём решения систем линейных диофантовых уравнений вида и получения тождеств Чаунди-Булларда.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	3
1 Диофантовы уравнения и задача о числе решеточных путей	4
2 Функция векторного разбиения и алгоритмы её вычисления.....	5
3 Тождество Чанди-Булларда	12
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	18
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	19
ПРИЛОЖЕНИЕ	21

ВВЕДЕНИЕ

Классическая функция векторного разбиения перечисляет количество неотрицательных решений системы диофантовых уравнений, а геометрически она равна числу представлений целочисленного вектора в виде линейных комбинаций векторов с целыми неотрицательными коэффициентами. Различные обобщения функции векторного разбиения исследовались в работах Brion M., Vergne M. (1997), Sturmfels B. (1995), А. В. Пухликов, А. Г. Хованский (1993), A.P.Lyapin, S.Chandragiri (2019). Функции векторного разбиения также используются в задачах перечислительного комбинаторного анализа, например, в задачах о путях Дика.

В 1960 г. Т. Чаунди и Дж. Буллард рассмотрели тождество, которое впоследствии было обнаружено в теории аппроксимации, нерекурсивных цифровых фильтрах, в теории вейвлетов, в теории гипергеометрических функций Гаусса. В дальнейшем появились различные обобщения данного тождества и способы доказательств. В 2019 году тождество Чаунди-Булларда было доказано для функции векторного разбиения.

Цель настоящей работы заключается в разработке алгоритмов вычисления функции векторного разбиения $P_A(\lambda; \varphi)$ путём решения систем линейных диофантовых уравнений вида $Ax = \lambda$ и получения тождеств Чаунди-Булларда.

1 Диофантовы уравнения и задача о числе решеточных путей

Диофантовым уравнением 1-ой степени (линейным) с неизвестными называется уравнение вида $P(x_1, \dots, x_m)$, где P – целочисленная функция, переменные x_i – целые. «Диофантовым» уравнение названо в честь древнегреческого математика Диофанта.

Самое известное диофантово уравнение, это уравнение вида $x^n + y^n = z^n$. При $n = 2$ решение этого уравнения – пифагоровы тройки. Теорема Ферма гласит о том, что у этого уравнения нет ненулевых целых решений при $n > 2$. Эйлер в 1770 году доказал теорему для случая $n = 3$, Дирихле и Лежандр в 1825 — для $n = 5$, Ламе — для $n = 7$. Куммер показал, что теорема верна для всех простых n , меньших 100, за возможным исключением так называемых иррегулярных простых 37, 59, 67. В 1994 Эндрю Уайлс окончательно доказал эту теорему для всех $n > 2$.

Одно из простых применений диофантовых уравнений можно найти при подсчете сдачи на кассе. Например, у покупателя и продавца имеются монеты только по 2 руб. и 5 руб. Сможет ли покупатель заплатить за покупку стоимостью 100 руб.? Эта задача сводится к решению линейного диофантова уравнения $2x + 5y = 100$.

Также, в механике необходимо решать уравнения прикладной математики именно в целых числах. Не всегда это простые линейные уравнения. Среди уравнений, применяемых в механике встречаются достаточно сложные, относящиеся к задачам аналитической теории чисел, получившие название «диофантов анализ уравнений».

Подбор коэффициентов в химических уравнениях иногда сводится к решению систем диофантовых уравнений.

2 Функция векторного разбиения и алгоритмы её вычисления

Пусть \mathbb{Z} - множество целых чисел, $\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}$, $\Delta = \{\alpha^1, \dots, \alpha^N\} \subset \mathbb{Z}^n$ – набор целочисленных векторов.

Функция векторного разбиения $P_A(\lambda; \varphi) = \sum_{Ax=\lambda, x \in \mathbb{Z}_{\geq}^N} \varphi(x)$, где $\varphi(x) = \frac{(x_1+x_2+\dots+x_n)!}{x_1!x_2!\dots x_n!}$, \mathbb{Z}_{\geq}^N – множество n -мерных векторов с неотрицательными координатами. При $\varphi(x) = 1$ функция векторного разбиения равна числу неотрицательных целых решений диофантина уравнения $Ax = \lambda$, а геометрически она равна числу представлений вектора λ в виде линейных комбинаций векторов из Δ с целыми неотрицательными коэффициентами.

Функция

$$P_A(x; h) = \sum_{\substack{A\lambda=x \\ \lambda \in \mathbb{Z}_{\geq}^N}} h(\lambda)$$

была представлена в [1] и названа функцией векторного вычисления зависящей от $h(\lambda)$. При

$$h(\lambda) = \frac{(-e)^{\lambda} |\lambda|!}{\lambda!}$$

получим:

$$\mathcal{P}(x) = P_A(x; h).$$

При $h(\lambda) \equiv 1$ функция векторного разбиения $P_A(x; h) = P_A(x)$ является числом неотрицательных целочисленных решений линейного диофантина уравнения $A\lambda = x$ (см. [4]):

$$P_A(x) = \sum_{\substack{A\lambda=x \\ \lambda \in \mathbb{Z}_{\geq}^N}} 1, x \in \mathbb{Z}^n.$$

При $h(\lambda) = e^{-(\lambda, y)}$ свойства функции

$$P_A(y; h) = \sum_{\substack{A\lambda=x \\ \lambda \in \mathbb{Z}_{\geq}^N}} e^{-(\lambda, y)}, y \in \mathbb{C}^N,$$

называемой функцией векторного разбиения, сопоставленной с множеством векторов A , были исследованы в [6].

В частности, они выводят формулы вычетов для его порождающей функции и аналог формулы Эйлера-Маклорена, в которой функция векторного разбиения представлена как действие оператора Тодда на функцию объема многогранника. Кроме того, сумма $e^{-(\lambda, y)}$ в целочисленных коэффициентах исследовалась в [2] в связи с обобщением теоремы Римана-Роха. Структурная теорема для функции векторного разбиения и многогранные инструменты для эффективного вычисления таких функций были представлены в [5].

При $\varphi(x) \equiv 1$ функция $P_A(\lambda; \varphi)$ совпадает с классической функцией векторного разбиения. При $\varphi(x) = e^{-(x, y)}$ получим функцию векторного разбиения в форме

$$P_A(y; h) = \sum_{\substack{A\lambda=x \\ \lambda \in \mathbb{Z}_{\geq}^N}} e^{-(\lambda, y)}, y \in \mathbb{C}^N.$$

Пусть $N = 2, A = (1 \ 1)$ и $\varphi(x_1, x_2) = h(x_1)$, тогда

$$P_A(\lambda; \varphi) = \sum_{\substack{x_1+x_2=\lambda \\ x_1, x_2 \geq 0}} h(x_1) = \sum_{x_1=0}^{\lambda} h(x_1).$$

Таким образом, проблема поиска функции векторного разбиения $P_A(\lambda; \varphi)$ является обобщением классической задачи суммирования функций дискретного аргумента.

Мы будем решать системы диофантовых уравнений с помощью метода перебора.

Пусть дана произвольная система линейных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

где a_{ij}, b_i, x_j – целые неотрицательные числа, $i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$.

Определим интервалы, в которых будем искать переменные. Рассмотрим первое уравнение системы. Так как коэффициенты и свободный член неотрицательны, а решения также ищем в неотрицательных числах, то заметим, что x_1 меняется:

от 0 до $\frac{b_1}{a_{11}}$, от 0 до $\frac{b_2}{a_{21}}$, ..., от 0 до $\frac{b_m}{a_{m1}}$.

Аналогично получим, что x_2 меняется:

от 0 до $\frac{b_1}{a_{12}}$, от 0 до $\frac{b_2}{a_{22}}$, ..., от 0 до $\frac{b_m}{a_{m2}}$, ...,

• • • ,

и наконец, x_n меняется:

от 0 до $\frac{b_1}{a_{1n}}$, от 0 до $\frac{b_2}{a_{2n}}$, ..., от 0 до $\frac{b_m}{a_{mn}}$.

Следовательно, можно определить промежутки, в которых будем искать решения системы диофантовых уравнений:

$$x_1 \epsilon \left[0, \min \left(\frac{b_1}{a_{11}}, \frac{b_2}{a_{21}}, \dots, \frac{b_m}{a_{m1}} \right) \right] \cap \mathbb{Z},$$

$$x_2 \in \left[0, \min\left(\frac{b_1}{a_{12}}, \frac{b_2}{a_{22}}, \dots, \frac{b_m}{a_{m2}}\right)\right] \cap \mathbb{Z},$$

1

$$x_n \in \left[0, \min\left(\frac{b_1}{a_{1n}}, \frac{b_2}{a_{2n}}, \dots, \frac{b_m}{a_{mn}}\right)\right] \cap \mathbb{Z}.$$

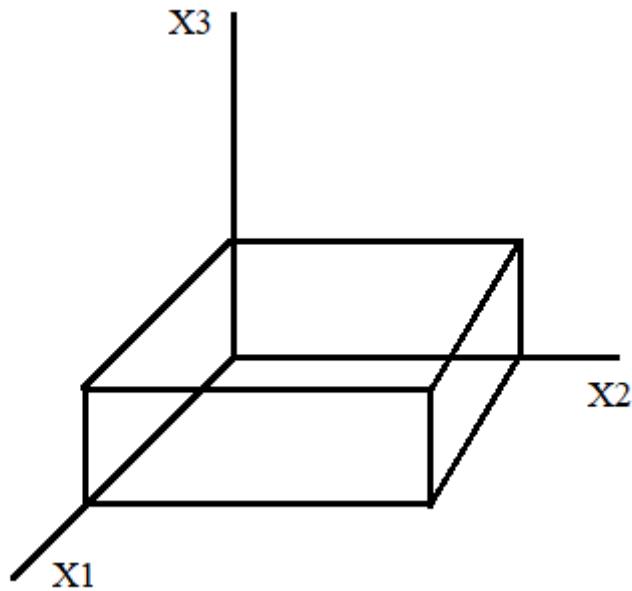


Рисунок 1 - Множество, в котором будем искать решения диофанта уравнения
В данном параллелепипеде (см. Рис. 1) находятся все возможные целые неотрицательные решения.

Рассмотрим пример. $\alpha^1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\alpha^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\alpha^3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\lambda = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

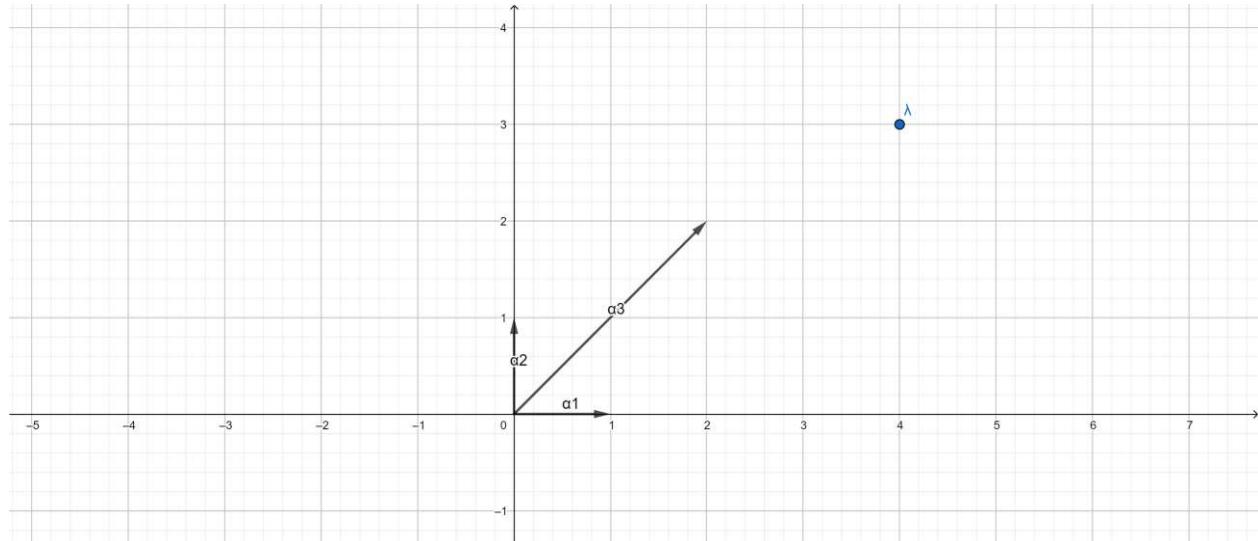


Рисунок 2 – Набор векторов $\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3$

Запишем систему линейных уравнений и найдем ее решения методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 = 4, \\ x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Выразим x_1, x_2 :

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 2x_3, \\ x_2 = 3 - 2x_3. \end{cases}$$

Заменим x_3 на t , получим:

$$\begin{cases} x_1 = 4 - 2t, \\ x_2 = 3 - 2t, \\ x_3 = t. \end{cases}$$

У этой системы несколько решений в целых неотрицательных числах.

При $t = 0$ $x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$, при $t = 1$ $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. При других $t \in \mathbb{Z}$ решения не лежат в неотрицательном октанте.

$x = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ означает, что из начала координат в точку $\lambda = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ можно попасть, используя 4 шага α^1 и 3 шага α^2 :

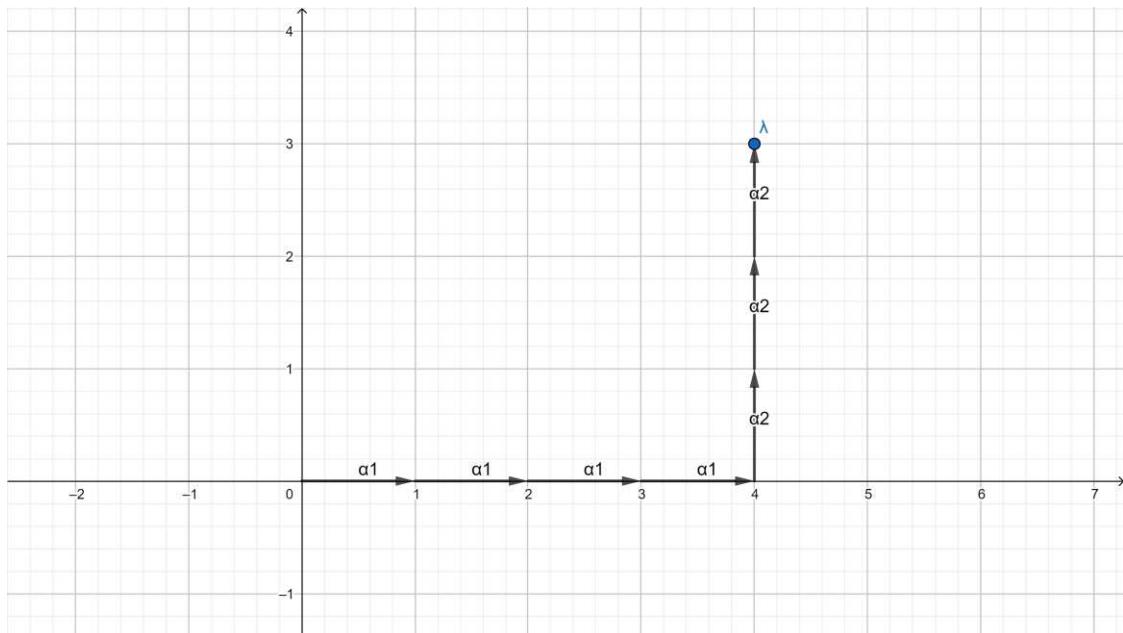


Рисунок 3 – Набор векторов $\alpha^1\alpha^1\alpha^1\alpha^1\alpha^2\alpha^2\alpha^2$

$x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ означает, что из начала координат в точку $\lambda = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ можно попасть используя 2 шага α^1 , 1 шаг α^2 и 1 шаг α^3 :

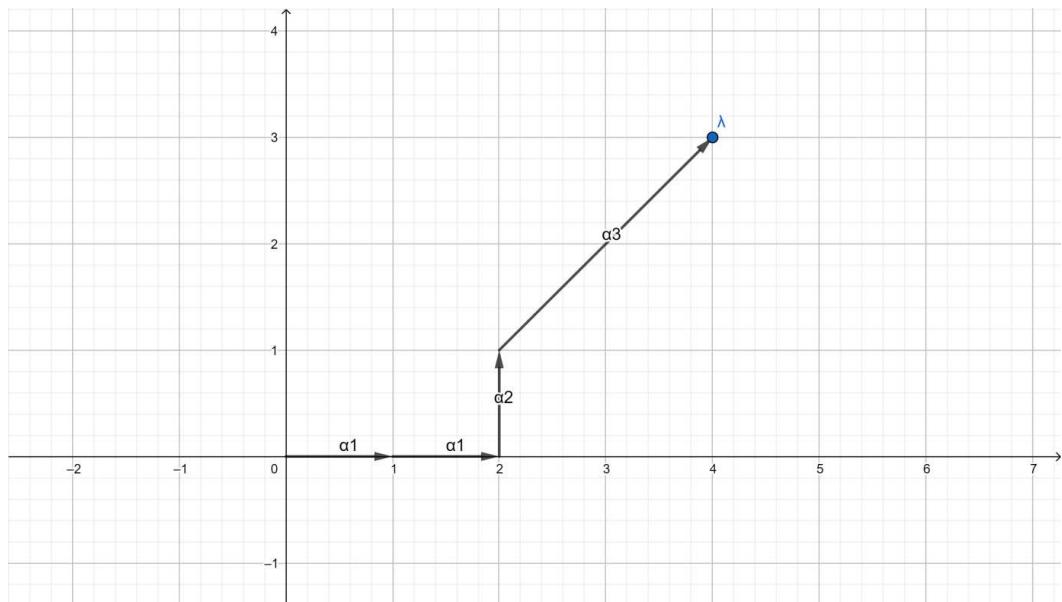


Рисунок 4 – Набор векторов $\alpha^1\alpha^1\alpha^1\alpha^2\alpha^2\alpha^2$ и $\alpha^1\alpha^1\alpha^2\alpha^3$

Переставляя местами шаги в наборах $\alpha^1\alpha^1\alpha^1\alpha^1\alpha^2\alpha^2\alpha^2$ и $\alpha^1\alpha^1\alpha^2\alpha^3$, найдем количество всех путей:

$$\varphi(x) = \frac{(4+3)!}{4! 3!} + \frac{(2+1+1)!}{2! 1! 1!} = 35 + 12 = 47.$$

Реализация алгоритма на языке программирования C#:

В программе присутствует класс SLAU, у которого следующие поля:

Целочисленная переменная ColumnCount, отвечающая за количество столбцов СЛУ;

Целочисленная переменная RowCount, отвечающая за количество строк СЛУ;

Двумерный массив Matrix содержит в себе коэффициенты СЛУ;

Массив Vector – свободный вектор (λ);

Конструктор с параметрами SLAU (string Path) используется для считывания $\alpha^1, \dots, \alpha^n$;

Метод RangeOfValidValues() находит область допустимых значений для всех x ;

Метод SearchValidSolutions перебирает все n векторов из области допустимых значений и возвращает список векторов, удовлетворяющих СЛУ

Метод Factorial используется для вычисления факториала;

Метод FunctionVectorSplitting вычисляет функцию векторного разбиения;

CheckSolution – проверяет, удовлетворяет ли конкретный вектор решению (подставляет в исходную СЛУ);

Также, в программе используется класс Program, который содержит главную функцию Main. В функции Main вызываются все необходимые методы, после чего выводится на экран информация.

3 Тождество Чанди-Булларда

В 1960 г. Т. Чанди и Дж. Буллард в [7] рассмотрели тождество, в котором для каждого $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ таких, что $c_1 + c_2 = 1$ и неотрицательных целых μ_1 и μ_2 справедливо:

$$c_2^{\mu_2+1} \sum_{\nu_1=0}^{\mu_1} \binom{\mu_1 + \mu_2 - \nu_1}{\mu_1 - \nu_1} c_1^{\mu_1 - \nu_1} + c_1^{\mu_1+1} \sum_{\nu_2=0}^{\mu_2} \binom{\mu_1 + \mu_2 - \nu_2}{\mu_2 - \nu_2} c_2^{\mu_2 - \nu_2} \equiv 1.$$

Это тождество впоследствии было обнаружено в теории аппроксимаций, нерекурсивных цифровых фильтрах [8], в теории вейвлетов [9], в теории гипергеометрических функций Гаусса. Подробный обзор, включающий различные доказательства одномерного случая и многомерных аналогов этого тождества, был дан в [10], [11] и [12]. В [13] аналогичные тождества были получены с использованием методов производящих функций и свойств композиции Адамара кратных степенных рядов.

В статье [1] был предложен аналог формулы Чанди-Булларда для функции векторного разбиения.

Пример 1.

Пусть $\mu_1 = 2, \mu_2 = 3$, тогда:

$$\begin{aligned} & c_2^4 \sum_{\nu_1=0}^2 \binom{5 - \nu_1}{2 - \nu_1} c_1^{2 - \nu_1} + c_1^2 \sum_{\nu_2=0}^3 \binom{5 - \nu_2}{3 - \nu_2} c_2^{3 - \nu_2} \equiv 1. \\ & c_2^4 \left(\binom{5}{2} c_1^2 + \binom{4}{1} c_1 + \binom{3}{0} \right) + c_1^3 \left(\binom{5}{3} c_2^3 + \binom{4}{2} c_2^2 + \binom{3}{1} c_2 + \binom{2}{0} \right) \equiv 1. \\ & c_2^4 (10c_1^2 + 4c_1 + 1) + c_1^3 (10c_2^3 + 6c_2^2 + 3c_2 + 1) \equiv 1. \end{aligned}$$

Теорема [17]. Если $c_1 + \dots + c_N = 1$ и $\varphi_j(x) = \frac{|x|!}{x!} c^{x+e_j}$, тогда для любого $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N) \in \mathbb{Z}^N$ имеет место тождество

$$\sum_{j=1}^N \sum_{\nu \in K_j} P_{A_j}(\nu) P_A(\mu - \nu; \varphi_j) = P_A(\mu).$$

Заметим, что при $\alpha^j = e^j, j = 1, \dots, N$ получается многомерное тождество Чанди-Булларда:

$$\sum_{j=1}^N \sum_{\substack{0 \leq \nu \leq \mu \\ \nu_j=0}} \frac{(|\mu| - |\nu|)!}{(\mu - \nu)!} c^{\mu - \nu + e^j} \equiv 1,$$

где двойное неравенство $0 \leq \nu \leq \mu$ означает, что $0 \leq \nu_j \leq \mu_j \forall j = 1, \dots, N$.

Пример 2.

Рассмотрим набор из трёх векторов: $\alpha^1 = \binom{1}{0}$; $\alpha^2 = \binom{0}{1}$; $\alpha^3 = \binom{2}{2}$ и конус K , натянутый на эти вектора: $K = \langle \binom{1}{0}; \binom{0}{1}; \binom{2}{2} \rangle$, $\lambda = \binom{4}{3}$, $N = 3$. Тогда тождество Чанди-Булларда имеет вид:

$$\sum_{\nu \in K_1} P_{A_1}(\nu) P_A(\mu - \nu; \varphi_1) + \sum_{\nu \in K_2} P_{A_2}(\nu) P_A(\mu - \nu; \varphi_2) + \sum_{\nu \in K_3} P_{A_3}(\nu) P_A(\mu - \nu; \varphi_3) = P_A(\mu).$$

Рассмотрим первое слагаемое

$$\sum_{\nu \in K_1} P_{A_1}(\nu) P_A(\mu - \nu; \varphi_1).$$

Рассмотрим два конуса: $K_1 = \langle \alpha^2, \alpha^3 \rangle$ и конус $-K + \mu$, где $K = \langle \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3 \rangle$. В их пересечении будет только шесть точек с целыми координатами: $(0,0), (0,1), (0,2), (0,3), (2,2), (2,3)$. В этих точках обе функции векторного разбиения не равны нулю.

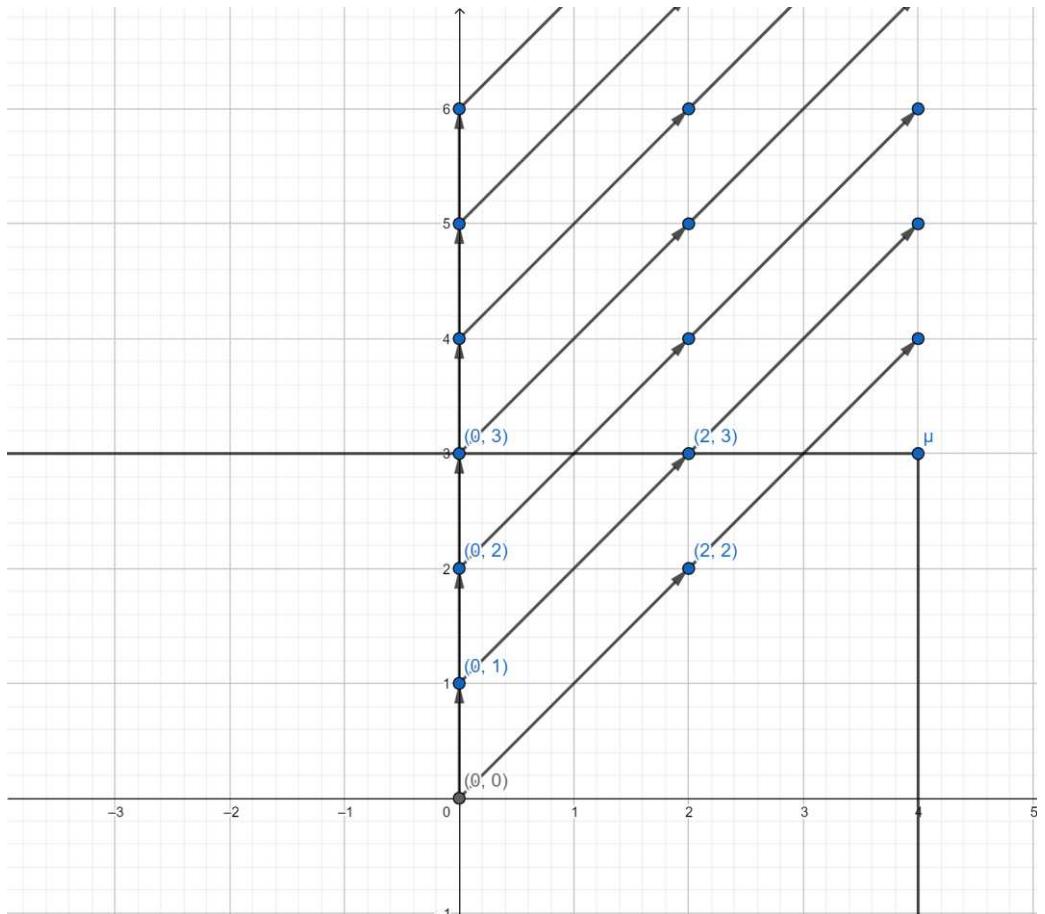


Рисунок 5 - Конус K_1

Вычислим $P_{A_1}(\nu)$ и $P_A(\mu - \nu; \varphi_1)$ в этих точках:

$$\nu = (0, 0), P_{A_1}(\nu) = 1, P_A(\mu - \nu; \varphi_1) = 12c_1^3c_2c_3 + 35c_1^5c_2^3,$$

$$\nu = (0, 1), P_{A_1}(\nu) = 1, P_A(\mu - \nu; \varphi_1) = 3c_1^3c_3 + 15c_1^5c_2^2,$$

$$\nu = (0, 2), P_{A_1}(\nu) = 1, P_A(\mu - \nu; \varphi_1) = 5c_1^5c_2,$$

$$\nu = (0, 3), P_{A_1}(\nu) = 1, P_A(\mu - \nu; \varphi_1) = c_1^5,$$

$$\nu = (2, 2), P_{A_1}(\nu) = 1, P_A(\mu - \nu; \varphi_1) = 3c_1^3c_2,$$

$$\nu = (2, 3), P_{A_1}(\nu) = 1, P_A(\mu - \nu; \varphi_1) = c_1^3.$$

Рассмотрим второе слагаемое:

$$\sum_{\nu \in K_2} P_{A_2}(\nu) P_A(\mu - \nu; \varphi_2).$$

Рассмотрим два конуса: $K_2 = \langle \alpha^1, \alpha^3 \rangle$ и конус $-K + \mu$, где $K = \langle \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3 \rangle$. В их пересечении будет только восемь точек с целыми координатами.

тами: $(0, 0), (1, 0), (2, 0), (3, 0), (4, 0), (2, 2), (3, 2), (4, 2)$. В этих точках обе функции векторного разбиения не равны нулю.

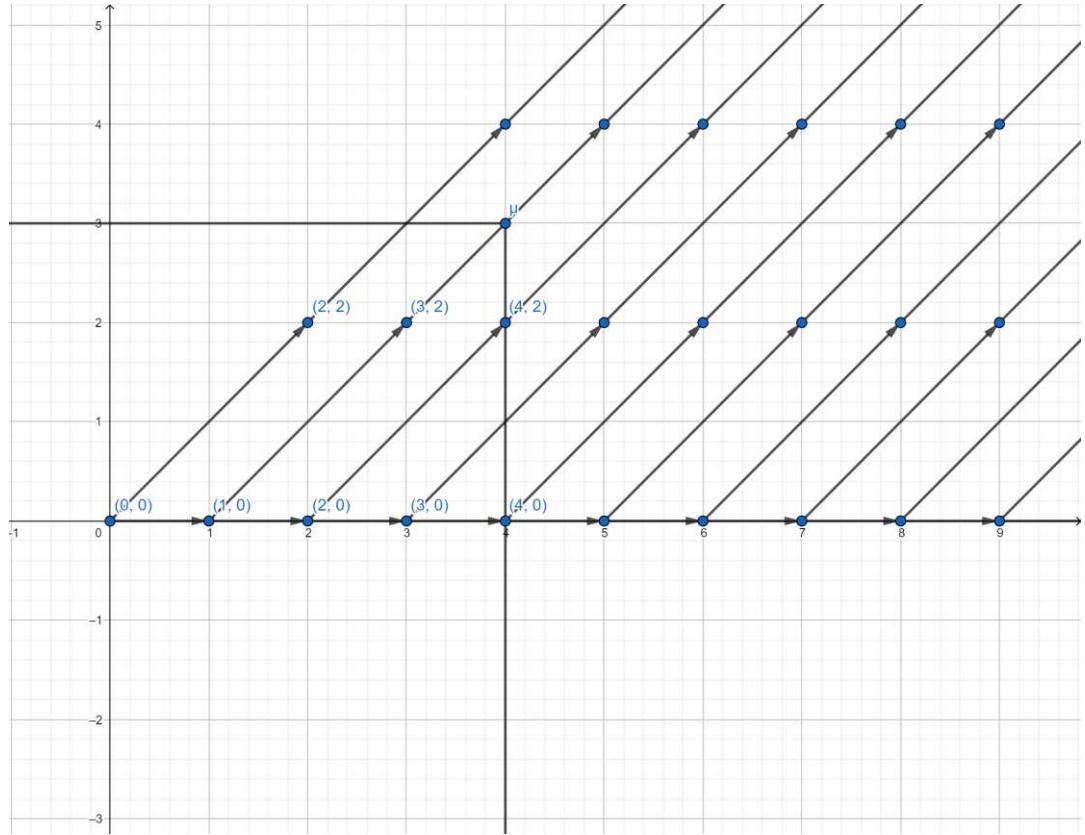


Рисунок 6 - Конус K_2

Вычислим $P_{A_2}(\nu)$ и $P_A(\mu - \nu; \varphi_2)$ в этих точках:

$$\nu = (0, 0), P_{A_2}(\nu) = 1, P_A(\mu - \nu; \varphi_2) = 12c_1^2 c_2^2 c_3 + 35c_1^4 c_2^4,$$

$$\nu = (1, 0), P_{A_2}(\nu) = 1, P_A(\mu - \nu; \varphi_2) = 6c_1 c_2^2 c_3 + 20c_1^3 c_2^4,$$

$$\nu = (2, 0), P_{A_2}(\nu) = 1, P_A(\mu - \nu; \varphi_2) = 2c_2^2 c_3 + 10c_1^2 c_2^4,$$

$$\nu = (3, 0), P_{A_2}(\nu) = 1, P_A(\mu - \nu; \varphi_2) = 4c_1 c_2^4,$$

$$\nu = (4, 0), P_{A_2}(\nu) = 1, P_A(\mu - \nu; \varphi_2) = c_2^4,$$

$$\nu = (2, 2), P_{A_2}(\nu) = 1, P_A(\mu - \nu; \varphi_2) = 3c_1^2 c_2^2,$$

$$\nu = (3, 2), P_{A_2}(\nu) = 2, P_A(\mu - \nu; \varphi_2) = 2c_1 c_2^2,$$

$$\nu = (4, 2), P_{A_2}(\nu) = 3, P_A(\mu - \nu; \varphi_2) = c_2^2.$$

Рассмотрим третье слагаемое

$$\sum_{\nu \in K_3} P_{A_3}(\nu) P_A(\mu - \nu; \varphi_3).$$

Рассмотрим два конуса: $K_3 = \langle \alpha^1, \alpha^2 \rangle$ и конус $-K + \mu$, где $K = \langle \alpha^1, \alpha^2, \alpha^3 \rangle$. В их пересечении будет только двадцать точек с целыми координатами: $(0, 0), (0, 1), (0, 2), (0, 3), (1, 0), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 0), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 0), (3, 1), (3, 2), (3, 3), (4, 0), (4, 1), (4, 2), (4, 3)$. В этих точках обе функции векторного разбиения не равны нулю.

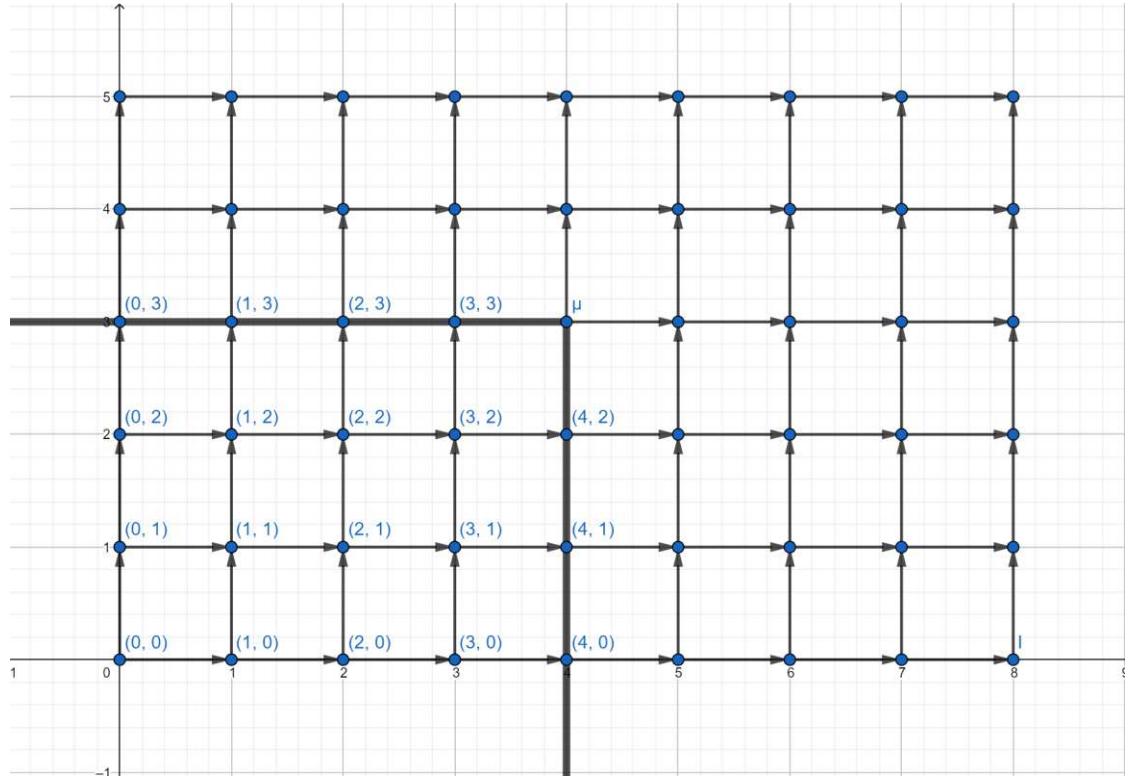


Рисунок 7 - Конус K_3

Вычислим $P_{A_3}(\nu)$ и $P_A(\mu - \nu; \varphi_3)$ в этих точках:

$$\nu = (0, 0), P_{A_3}(\nu) = 1, P_A(\mu - \nu; \varphi_3) = 12c_1^2 c_2 c_3^2 + 35c_1^4 c_2^3 c_3,$$

$$\nu = (1, 0), P_{A_3}(\nu) = 1, P_A(\mu - \nu; \varphi_3) = 6c_1 c_2 c_3^2 + 20c_1^3 c_2^3 c_3,$$

$$\nu = (2, 0), P_{A_3}(\nu) = 1, P_A(\mu - \nu; \varphi_3) = 2c_2 c_3^2 + 10c_1^2 c_2^3 c_3,$$

$$\nu = (3, 0), P_{A_3}(\nu) = 1, P_A(\mu - \nu; \varphi_3) = 4c_1 c_2^3 c_3,$$

$$\nu = (4, 0), P_{A_3}(\nu) = 1, P_A(\mu - \nu; \varphi_3) = c_2^3 c_3,$$

$$\nu = (0, 1), P_{A_3}(\nu) = 1, P_A(\mu - \nu; \varphi_3) = 3c_1^2 c_3^2 + 15c_1^4 c_2^2 c_3,$$

$$\nu = (0, 2), P_{A_3}(\nu) = 1, P_A(\mu - \nu; \varphi_3) = 5c_1^4 c_2 c_3,$$

$$\nu = (0, 3), P_{A_3}(\nu) = 1, P_A(\mu - \nu; \varphi_3) = c_1^4 c_3,$$

$$\nu = (1, 1), P_{A_3}(\nu) = 2, P_A(\mu - \nu; \varphi_3) = 2c_1 c_3^2 + 10c_1^3 c_2^2 c_3,$$

$$\begin{aligned}
\nu &= (1, 2), P_{A_3}(\nu) = 2, P_A(\mu - \nu; \varphi_3) = 4c_1^3 c_2 c_3, \\
\nu &= (1, 3), P_{A_3}(\nu) = 4, P_A(\mu - \nu; \varphi_3) = c_1^3 c_3, \\
\nu &= (2, 1), P_{A_3}(\nu) = 3, P_A(\mu - \nu; \varphi_3) = c_3^2 + 6c_1^2 c_2^2 c_3, \\
\nu &= (2, 2), P_{A_3}(\nu) = 6, P_A(\mu - \nu; \varphi_3) = 3c_1^2 c_2 c_3, \\
\nu &= (2, 3), P_{A_3}(\nu) = 10, P_A(\mu - \nu; \varphi_3) = c_1^2 c_3, \\
\nu &= (3, 1), P_{A_3}(\nu) = 4, P_A(\mu - \nu; \varphi_3) = 3c_1 c_2^2 c_3, \\
\nu &= (3, 2), P_{A_3}(\nu) = 10, P_A(\mu - \nu; \varphi_3) = 2c_1 c_2 c_3, \\
\nu &= (3, 3), P_{A_3}(\nu) = 20, P_A(\mu - \nu; \varphi_3) = c_1 c_3, \\
\nu &= (4, 1), P_{A_3}(\nu) = 5, P_A(\mu - \nu; \varphi_3) = c_2^2 c_3, \\
\nu &= (4, 2), P_{A_3}(\nu) = 15, P_A(\mu - \nu; \varphi_3) = c_2 c_3, \\
\nu &= (4, 3), P_{A_3}(\nu) = 1, P_A(\mu - \nu; \varphi_3) = 1.
\end{aligned}$$

В итоге, получим:

$$\begin{aligned}
&\sum_{\nu \in K_1} P_{A_1}(\nu) P_A(\mu - \nu; \varphi_1) + \sum_{\nu \in K_2} P_{A_2}(\nu) P_A(\mu - \nu; \varphi_2) + \\
&\sum_{\nu \in K_3} P_{A_3}(\nu) P_A(\mu - \nu; \varphi_3) = 12c_1^3 c_2 c_3 + 35c_1^5 c_2^3 + 3c_1^3 c_3 + 15c_1^5 c_2^2 + 5c_1^5 c_2 + \\
&c_1^5 + 3c_1^3 c_2 + c_1^3 + 12c_1^2 c_2^2 c_3 + 35c_1^4 c_2^4 + 6c_1 c_2^2 c_3 + 20c_1^3 c_2^4 + 2c_2^2 c_3 + \\
&10c_1^2 c_2^4 + 4c_1 c_2^4 + c_2^4 + 3c_1^2 c_2^2 + 2c_1 c_2^2 + c_2^2 + 12c_1^2 c_2 c_3^2 + 35c_1^4 c_2^3 c_3 + \\
&6c_1 c_2 c_3^2 + 20c_1^3 c_2^3 c_3 + 2c_2 c_3^2 + 10c_1^2 c_3^3 + 4c_1 c_2^3 c_3 + c_2^3 c_3 + 3c_1^2 c_3^2 + \\
&15c_1^4 c_2^2 c_3 + 5c_1^4 c_2 c_3 + c_1^4 c_3 + 2c_1 c_3^2 + 10c_1^3 c_2^2 c_3 + 4c_1^3 c_2 c_3 + c_1^3 c_3 + c_3^2 + \\
&6c_1^2 c_2^2 c_3 + 3c_1^2 c_2 c_3 + c_1^2 c_3 + 3c_1 c_2^2 c_3 + 2c_1 c_2 c_3 + c_1 c_3 + c_2^2 c_3 + c_2 c_3 + \\
&1 = 2.
\end{aligned}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные результаты работы заключаются в следующем:

Изучены диофантовы уравнения, а также разработан алгоритм вычисления функции векторного разбиения $P_A(\lambda; \varphi)$ путём решения систем линейных диофантовых уравнений вида $Ax = \lambda$ и получения тождеств Чарнди-Булларда.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Lyapin, A. P. Generating functions for vector partitions and a basic recurrence relation / A. P. Lyapin, S. Chandragiri // Journal of Difference Equations and Applications. – 2019. – №17. – С. 1052–1061.
2. Ахтамова, С. С. О сечениях производящих рядов в задачах о решеточных путях / С. С Ахтамова, В. Ю. Гришунов, А. П. Ляпин, С. А. Тихомиров // Прикладная математика и физика. – 2020. – Т. 52(2). – С. 146-151.
3. Ляпин, А. П. О рациональности многомерных возвратных степенных рядов / А. П. Ляпин, Е. К. Лейнартас // Журнал СФУ. Сер. 3. Математика и физика. – 2009. – С. 449-454.
4. Пухликов, А. В. Теорема Римана–Роха для интегралов и сумм квазиполиномов по виртуальным многогранникам / А. В. Пухликов, А. Г. Хованский // Алгебра и анализ. – 1992. – Т. 4. –С. 188–216.
5. Wiles, A. Modular elliptic curves and Fermat’s last theorem / A. Wiles // Annals of Mathematics. – 1995. – №3. – Vol. 141. – P. 443 – 551.
6. Stanley, R. Enumerative Combinatorics / R. Stanley // Cambridge Univ. Press. – Cambridge, 1999. – Vol. 1.
7. Sturmfels, B. On Vector Partition Functions / B. Sturmfels // Journal of Combinatorial Theory. – 1995. – PP. 302-309.
8. Brion, M. Vector Partition Functions and Lattice Points in Rational Polytopes / M. Brion, M. R. Vergne // American Math. Soc. – 1997. – №1. – Vol. 10. – PP. 797-833.
9. Chaundy T.W. John Smith’s Problem / T. W. Chaundy, J. E. Bullard. // Math. Gazette. – 1960. – Vol. 44. – PP. 253-260.
10. Herrmann O. On the Approximation Problem in Nonrecursive Digital Filter Design / O. Herrmann // IEEE Trans, Circuit Theory. – 1971. – Vol. 18. – PP. 411-413.

11. Daubechies, I. Ten Lectures on Wavelets / I. Daubechies // SIAM. – Philadelphia, 1992.
12. Koornwinder, T. H. On an Identity by Chaundy and Bullard I / T. H. Koornwinder, M. J. Schlosser // Indag. Math.(N.S.). – 2008. – PP. 239-261.
13. Koornwinder, T. H. On an Identity by Chaundy and Bullard I / T. H. Koornwinder, M. J. Schlosser // Indag. Math.(N.S.). – 2013. – PP. 174-180.
14. Egorychev, G. P. Combinatorial Identity from the Theory of Integral Representations in complex numbers / G. P. Egorychev // Gos. Univ. Mat. – Irkutsk, 2011. – Vol. 4(4). – PP. 32-44 (in Russian).
15. Krivokolesko, V. P. On Identities with Polynomial Coefficients / V. P. Krivokolesko, E. K. Leinartas // Gos. Univ. Mat. – Irkutsk, 2012. – Vol. 5(3). – PP. 56-63. (in Russian)
16. Фролов Т. С. О свойствах функции векторного разбиения / Т. С. Фролов // Материалы 59-й Международной научной студенческой конференции. – Новосибирск, 2021. – С. 37.
17. Lyapin A. P. The Cauchy Problem for Multidimensioal Difference Equations in Lattice Cones / A.P.Lyapin, S.Chandragiri // J. Sib.Fed. Univ. Math. Phys. – 2020. – Vol. 13(2). – PP. 187–196.

ПРИЛОЖЕНИЕ

```
Program.cs
using System;
using System.Collections.Generic;

namespace ConsoleApp1
{
    class Program
    {
        static void Main(string[] args)
        {
            SLAU sLAU = new SLAU("File.txt");
            int[] rangeOfValidValues = sLAU.RangeOfValidValues();
            List<int[]> validValues = sLAU.SearchValidSolutions(rangeOfValidValues);
            if (validValues.Count != 0)
            {
                sLAU.Print(validValues);
                Console.WriteLine($"Функция веторного разбиения φ равна {sLAU.FunctionVectorSplitting(validValues)}");
            }
            else
            {
                Console.WriteLine("Решений нет.");
            }
        }
    }
}

SLAU.cs
using System;
using System.Collections.Generic;
using System.IO;
using System.Linq;
using System.Text;
using static System.Math;

namespace ConsoleApp1
{
    public class SLAU
    {
        int ColumnCount { get; set; }
        int RowCount { get; set; }
        int[,] Matrix;
        int[] Vector;
        public SLAU()
        {
            ColumnCount = 0;
            RowCount = 0;
            Matrix = null;
            Vector = null;
        }
    }
}
```

```

public SLAU(string Path)
{
    using (StreamReader sr = new StreamReader(Path))
    {
        string[] buf;
        string data = sr.ReadToEnd();
        buf = data.Trim().Split('\n').Where(s => s
!= "" && s != "\r").ToArray();
        RowCount = buf.Length;
        ColumnCount = buf[0].Trim().Split(' ')
.Length - 1;
        Matrix = new int[RowCount, ColumnCount];
        Vector = new int[RowCount];
        for (int i = 0; i < RowCount; i++)
        {
            var arr = buf[i].Trim().Split(' ');
            for (int j = 0; j < ColumnCount; j++)
            {
                Matrix[i, j] = Convert.ToInt32(arr[j]);
            }
            Vector[i] = Convert.ToInt32(arr[ColumnCount]);
        }
    }

    public int[] RangeOfValidValues()
    {
        int[] result = new int[ColumnCount];
        double min = int.MaxValue;
        for (int i = 0; i < ColumnCount; i++)
        {
            min = int.MaxValue;
            for (int j = 0; j < RowCount; j++)
            {
                if (Matrix[j, i] != 0)
                {
                    if (min > (Vector[j] / Matrix[j, i]))
                    {
                        min = Vector[j] / Matrix[j, i];
                    }
                }
            }
            result[i] = (int)min;
        }
        return result;
    }

    bool CheckSolution(int[] x)
    {

```

```

        int sum;
        for (int i = 0; i < RowCount; i++)
        {
            sum = 0;
            for (int j = 0; j < ColumnCount; j++)
            {
                sum += x[j] * Matrix[i, j];
            }
            if (sum != Vector[i])
            {
                return false;
            }
        }
        return true;
    }

    public List<int[]> SearchValidSolutions(int[] range)
    {
        int[] xVect = new int[ColumnCount];
        int ind = 0;
        List<int[]> res = new List<int[]>();

        try
        {
            while (true)
            {
                for (int i = ColumnCount - 1; i > -2; i--)
                {
                    xVect[i] += 1;
                    if (xVect[i] <= range[i])
                    {
                        break;
                    }
                    else
                    {
                        xVect[i] = 0;
                        continue;
                    }
                }
                //for (int i = 0; i < ColumnCount; i++)
// Все вектора, удовлетворяющие области допустимых решений
                //{
                //    Console.WriteLine("{0} ", xVect[i]);
                //}
                //Console.WriteLine();

                if (CheckSolution(xVect))
                {
                    res.Add((int[])xVect.Clone());
                }
            }
        }
    }
}

```

```

        }
    }
    catch (System.IndexOutOfRangeException)
    {
    }

    return res;
}

public int Factorial(int n)
{
    if (n == 1)
    {
        return 1;
    }
    else
    {
        return Factorial(n - 1) * n;
    }
}

int MemberVectorSplitting(int[] vector)
{
    int sum = 0;
    int factorial = 1;
    foreach (var item in vector)
    {
        sum += item;
        if (item != 0) factorial *= Factorial(item);
    }
    return Factorial((int)sum) / factorial;
}

public int FunctionVectorSplitting(List<int[]>
validValues)
{
    int result = 0;
    foreach (var vector in validValues)
    {

        result += MemberVectorSplitting(vector);
    }
    return result;
}

public void Print(List<int[]> validValues)
{
    int k = 1;
    char zero = '\u2080';
    List<char>indexes = new List<char>();
    indexes.Add((char)(zero));
    int countDigit;
    foreach (var item in validValues)

```

```

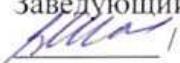
    {
        countDigit = k.ToString().Length;
        if (countDigit > indexes.Count)
        {
            indexes[countDigit - 2] = (char)(zero +
1);
            indexes.Add((char)(zero - 1));
        }
        string indRes = "";
        for (int i = countDigit - 1; i < countDigit;
i++)
        {
            indexes[i]++;
        }
        Console.WriteLine($"{k}");
        for (int i = 0; i < item.Length; i++)
        {
            Console.WriteLine($"X{i + 1} =
{item[i]}");
        }
        k++;
        foreach (var symb in indexes)
        {
            indRes += symb;
        }
        Console.OutputEncoding = Encoding.Unicode;
        Console.WriteLine($"φ{indRes}
{MemberVectorSplitting(item)}\n");
    }
}

```

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Базовая кафедра вычислительных и информационных технологий

УТВЕРЖДАЮ

Заведующий кафедрой
 / В.В. Шайдуров

«17 » июня 2021 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

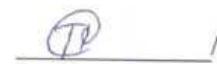
Направление 02.03.01 Математика и компьютерные науки

**АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ФУНКЦИИ ВЕКТОРНОГО
РАЗБИЕНИЯ И ТОЖДЕСТВА
ЧАУНДИ-БУЛЛАРДА**

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент

 / А. П. Ляпин
17.06.21

Выпускник

 / Т. С. Фролов
17.06.21

Красноярск 2021