Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
________ /В.М. Левчук
«____»________ 2020 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.01 Математика

УНИФИКАЦИЯ В НЕТРАНЗИТИВНОЙ ВРЕМЕННОЙ ЛОГИКЕ ЗНАНИЯ С УНИВЕРСАЛЬНОЙ МОДАЛЬНОСТЬЮ

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент ___________ /С.И. Башмаков

Выпускник ___________ /Т.Ю. Зверева

Красноярск 2020

Содержание

Введение

1 Определения и семантика

1.1 Определения для дедуктивной системы . . . .

1.2 Модальные логики . . . .

1.3 Теория унификации . . . .

1.4 Реляционная семантика Крипке для модальных логик . . . .

1.5 Реляционная семантика Крипке для временных логик . . . .

2 Линейная многомодальная логика знания и нетранзитивного времени с универсальной модальностью ULITK

2.1 Семантика . . . .

2.2 Финитная аппроксимируемость . . . .

2.3 Унификация в $\mathcal{ULITK}$ и следствия . . . .

Заключение

РЕФЕРАТ

Дипломная работа по теме «Унификация в нетранзитивной временной логике знания с универсальной модальностью» содержит **32** страницы текста, **31** использованный источник.

Ключевые слова: МОДАЛЬНЫЕ ЛОГИКИ, НЕТРАНЗИТИВНОЕ ВРЕМЯ, УНИФИКАЦИЯ, ФИНИТНАЯ АППРОКСИМИРУЕМОСТЬ, НЕКЛАССИЧЕСКИЕ ЛОГИКИ, ПРОЕКТИВНОСТЬ.

Цель работы – исследование унификации в одной нетранзитивной временной логике знания с универсальной модальностью.

В результате исследования выполнено семантическое построения линейной многомодальной логики знания и нетранзитивного времени с универсальной модальностью $\mathcal{ULITK}$, доказаны финитная аппроксимируемость и p-морфность конечных фреймов бесконечным, установлена проективность унификации и её тип, получен вид проективного унификатора для любой унифицируемой формулы в логике $\mathcal{ULITK}$.

Введение

Все основные логические утверждения, которые мы используем в настоящее время, впервые были сформулированы ещё в работах античных философов (например, Аристотеля) и дополнялись и развивались авторами более поздних времён. Логика из исторически сложившегося статуса формального основания математики (или «метаматематики» по Гильберту) к XIX веку перешла в положение самостоятельной и активно исследуемой дисциплины. В рамках логики изучаются ныне не только правила рассуждения и аргументации, как её рассматривали ранее, но и построение и полнота, непротиворечивость, аксиоматизируемость и другие свойства формальных математических объектов. Многообразие логических систем в том числе определяет множественность разделов этой науки в настоящее время.

Один из наиболее активно изучаемых разделов – модальные логики. Первые положения теории модальности также имели отражение ещё в работах античных учёных на заре зарождения науки. Позднее, в трудах философов (Г.В. Лейбниц, И. Кант, Ч.С. Пирс и др.) они получили своё развитие, однако ещё не рассматривались как отдельная дисциплина математики. С 20-х годов XX века начался процесс оснащения теории модальных логик техническим аппаратом, позволившим этой области за сравнительно небольшой промежуток времени оформиться в самостоятельную математическую дисциплину [ ]. Родоначальником теории модальных логик, использующей теорию исчислений – описание логической системы множеством теорем исчисления, был К. Льюис [ ]. Эта интерпретация всё ещё носила философский характер, но в отличии от предыдущих работ, описывающих модальности, именно в этой впервые было дано определение модальных логик и описаны 2 самых известных исчисления Льюиса: $\mathcal{S}4$ и $\mathcal{S}5$. Начиная с этого момента, исследователями был построен целый ряд исчислений, акиоматизирующих *модальные законы*. Понятия *необходимости* и *возможности* интересовали учёных и до этого, однако раньше рассматривались в интуитивном понимании, без формального описания.

Следующий важный шаг развития области модальных логик состоял во включении в рассуждения элемента времени. Впервые связь модальностей и временных отношений были рассмотрены А. Прайором в 1957 в [ ]. Подход к их описанию в этой интерпретации и сущность действия временных модальных операторов в логических системах быстро нашли отражение в теории стремительно развивающихся областей информатики [ ]. Временные логики нашли широкое применение в информационных науках при моделировании информационных процессов, вычислений и рассуждений. Особенно ярко это видно на примере логик $\mathcal{LTL}$ и $\mathcal{CTL}$, составляющих на сегодняшний день фундамент теории верификации программ.

Все основные временные логики построены на идее рефлексивного транзитивного времени, что позволяет эффективно применять в их исследовании развитый аппарат модальных логик. Однако, такие системы плохо описывают реальные ситуации, где зачастую требуется свойство динамичности, недетерминированности, нестабильности процесса передачи информации и учёт возможных ошибок в процессе трансляции. Всеми этими свойствами обладают логические системы, основанные на нетранзитивном отношении, что делает их крайне привлекательными с точки зрения приложений. Однако, они сравнительно мало изучены, что объясняется несомненно более сложными методами анализа свойств в сравнении с транзитивными вариантами логических систем. Рассмотрение точек зрения на нетранзитивное время в логических системах приведено в [ ].

Что же касается унификации, то несмотря на то, что в отдельных интерпретациях проблема унификации давно интересовала исследователей, впервые в современной терминологии она встречается в работах А. Робинсона [ ] и Д.Е. Кнута [ ] в контексте изучения *term rewriting systems* (систем преобразования выражений). В области информатики задача унификации формулировалась в виде вопроса: есть ли для двух термов преобразование, которое путём замены переменных установит между ними синтаксическое равенство? [ ]

В настоящее время задачи унификации рассматриваются в области логик и системного программирования. В области неклассических логик, к классу которых принадлежит рассматриваемая нами модальная система, задача унификации ставится так: «может ли формула быть преобразована в истинную в логике путём замены переменных?» В таком виде она формулируется и в этой работе.

В.В. Рыбаков решил эту проблему для модальных $\mathcal{S}4$, $\mathcal{G}rz$ и интуиционистских логик, [ ], в [ ] он предложил подход к определению всех унифицируемых формул для расширений $S4$ и $(K4 + [\Box\bot \equiv \bot])$. С использованием этой техники были найдены критерии неунифицируемости в линейных транзитивных временных логиках знаний с мультимодальными отношениями: над $\mathbb{N}$ ($\mathcal{LTK}$, [ ]) и над $\mathbb{Z}$ с альтернативными отношениями ($\mathcal{LFPK}$, [ ]).

Для изучения унификации С. Гиларди предложил новый подход, основанный на проективных формулах [ ], который позволил алгоритмизовать построение конечных полных наборов унификаторов для ряда логик [,]. Подход нашёл широкий отклик в дальнейших работах в этой области и в настоящее время является одним из основных и концептуально важных. Основываясь на этом подходе, В. Джик и П. Войтыляк установили проективную унификацию в расширениях логики $\mathcal{S}4.3$ [ ]. В [ ] была установлена связь решения проблемы допустимости при существовании вычислимых полных наборов унификаторов, что усилило важность подхода к унификации через проективные формулы. В [ ] В.В. Рыбаков нашел модификацию линейной временной логики $\mathcal{LTL}$ с оператором $Until$, для которой была установлена проективная унификация. Из проективной унификации следует существование наиболее общего унификатора (н.о.у.), но обратное неверно. Например, в [ ] доказано существование н.о.у. для каждой унифицируемой формулы в $\mathcal{LTL}$ с операторами $Next$ и $Until$, а также построен контрпример: унифицируемая, но не проективная формула. В [ ] проективная унификация доказана для $\mathcal{LFPK}$, $\mathcal{LFPK}^{U_+}_{U_-}$, $\mathcal{LFPK}^{U_+,N}_{U_-,P}$.

Сильная связь установлена между проблемами унификации и допустимости: формула φ унифицируема в логике $\mathcal{L}$, если правило вывода $\varphi/\bot$ недопустимо в $\mathcal{L}$. В некоторых случаях, когда логика имеет финитарный тип унификации, проблема допустимости так же сводится к унификации [,].

Важной задачей является поиск лучших унификаторов — *максимальных* и *наиболее общих* или *н.о.у.*), связанных с точки зрения взаимной выразимости: через *н.о.у.* или полный набор максимальных можно выразить все остальные унификаторы формулы. Установление существования *максимальных* и *наиболее общих* унификаторов зачастую является сложным вопросом. Однако любая унифицируемая формула с необходимостью обладает, как минимум, *корневым унификатором* ($ground$), полученным путем подстановки констант. Подход, основанный на построении *корневого* унификатора, имеет широкую применимость: как для доказательства унифицируемости произвольной формулы, так и для построения проективных унификаторов [, ,]. Однако идея построения проективного унификатора с использованием корневого не является универсальной и всеприменимой: в [ ] было показано, что не для каждой формулы в $\mathcal{I}nt$ корневой унификатор позволяет строить проективный унификатор. В [ ] было доказано, что для $\mathcal{S}4.3$ проективный унификатор не может быть эффективно выражен через корневой унификатор. Несмотря на это, использование таких унификаторов при решении задач унификации остается целесообразным даже тогда, когда логика имеет нульарный (худший) тип унификации (когда найдутся унифицируемые формулы без максимальных унификаторов и н.о.у. не существует): построение корневого унификатора остается возможным.

Задача унификации мало изучена для логик нетранзитивного времени, но в ряде работ такие системы рассматривались в контексте этой задачи. Например, Э. Ерабек доказал нульарный тип унификации в минимальной нормальной логике $\mathcal{K}$ [ ], а В. Джик – лучший — унитарный тип для $\mathcal{S}5$ и её расширений [ ]. Ф. Вольтер и М. Захарьящев [ ] доказали неразрешимость унификации над $\mathcal{K}$ с дополнительной универсальной модальностью.

С.И. Башмаковым доказана проективная унификация в линейной логике нетранзитивного времени с универсальной модальностью $\mathcal{ULITL}$ [ ], а также анонсировано обобщение результата для случая данной логики, обогащенной отношениями знаний агентов [ ].

Целью данной работы стало исследование унификации в линейной многомодальной логике знания и нетранзитивного времени с универсальной модальностью $\mathcal{ULITK}$.

Были поставлены следующие **задачи для исследования**: выполнить семантическое построение такой логики, показать p-морфизм фреймов, исследовать финитную аппроксимируемость, доказать или опровергнуть проективность унификации в логике, установить тип унификации в $\mathcal{ULITK}$.

Заключение

В рамках выпускной работы нами выполнено семантическое построение линейной многомодальной логики знания и нетранзитивного времени с универсальной модальностью $\mathcal{ULITK}$. Для данной логики доказан p-морфизм фреймов, финитная аппроксимируемость, исследованы вопросы теории унификации: доказано, что унифицируемость любой формулы в этой логике может быть эффективно установлена и может быть найден корневой унификатор, если таковой существует; установлена проективная унификация, которая гарантирует унитарный тип [ ] и (почти) структурную полноту [ ] в этой логике.

Список литературы

[1] Шапировский, И.Б. Современная модальная логика: между математикой и информатикой / И.Б. Шапировский, В.Б. Шехтман — Сборник: Современная логика: основания, предмет и перспективы развития, ИД Форум, Москва, 2018. — P. 265-305.

[2] Lewis, C.I. A survey of symbolic logic / C.I. Lewis. — University of California press, 1918. — 414 p.

[3] Prior, A. Time and Modality / A. Prior. — Oxford University Press, 1957. — 148 p.

[4] Gabbay D.M. Temporal Logic: - Mathematical Foundations and Computational Aspects / D.M. Gabbay, I.M. Hodkinson, M.A. Reynolds — Clarendon Press, Oxford, 1994.

[5] Rybakov V.V. Nontransitive temporal multiagent logic, information and knowledge, deciding algorithms / V.V. Rybakov — Siberian Mathematical Journal, — 2017. — V. 58 N. 5 . — P. 875-886.

[6] Robinson A. A machine oriented logic based on the resolution principle. / A. Robinson. — J. of the ACM, 1965. — P. 23-41

[7] Knuth, D.E. Simple word problems in universal algebras / D.E. Knuth, P.B. Bendix // Computational problems in abstract algebra. — 1970. — P. 263–297.

[8] Ghilardi S. Unification Through Projectivity / S. Ghilardi // J. Logic Comput. — V. 7 N. 6 — 1997. — P. 733–752.

[9] Rybakov V.V. UAdmissible Logical Inference Rules. / V.V. Rybakov // Series: Studies in Logic and the Foundations of Mathematics, Elsevier Sci. Publ., North-Holland — V. 136 — 1997. — P. 617.

[10] Rybakov V.V. An essay on unification and inference rules for modal logics / V.V. Rybakov // Bulletin of the Section of Logic. — V. 28 N. 3 — 1999. — P. 145–157.

[11] Bashmakov S.I. Unification and inference rules in the multi-modal logic of knowledge and linear time LTK / S.I. Bashmakov // Journal of SibFU. Mathematics and Physics. — V. 9 N. 2 — 2016. — P. 149–157.

[12] Bashmakov S.I. Non-unifiability in linear temporal logic of knowledge with multi-agent relations / S.I. Bashmakov, A.V. Kosheleva, V.V. Rybakov // Sib. Electronic Math. Reports. — V. 13 — 2016. — P. 923–929.

[13] Ghilardi S. Unification in Intuitionistic logic / S. Ghilardi // J. Symbolic Logic. — V. 62 N. 2 — 1999. — P. 859–880.

[14] Ghilardi S. Filtering Unification and Most General Unifiers in Modal Logic / S. Ghilardi, L. Sacchetti // J. Symbolic Logic. — V. 69 N. 3 — 2004. — P. 879–906.

[15] Dzik W. Projective unification in modal logic / W. Dzik, P. Wojtylak // J. Symbolic Logic. — V. 20 N. 1 — 2012. — P. 121–153.

[16] Iemhoff R. On the admissible rules of intuitionistic propositional logic / R. Iemhoff, G. Metcalfe // J. Symbolic Logic. — N. 66 — 2001. — P. 281–294.

[17] Rybakov V.V. Projective formulas and unification in linear temporal logic LTLU / V.V. Rybakov // Logic J. IGPL. — V. 22 N. 4 — 2014. — P. 665–672.

[18] Babenyshev S. Unification in linear temporal logic LTL/ S. Babenyshev, V. Rybakov // Logic J. IGPL. — N. 162 — 2011. — P. 991–1000.

[19] Bashmakov S.I. Projective formulas and unification in linear discrete temporal multi-agent logics/ S.I. Bashmakov, A.V. Kosheleva, V. Rybakov // Sib. Electronic Math. Reports. — V. 13 — 2016 — P. 923–929.

[20] Baader F. Unification in modal and description logics/ F. Baader, S. Ghilardi // Logic J. IGPL. — V. 19 — 2011 — P. 705–730.

[21] Baader F. Unification theory, in: A. Robinson, A. Voronkov (Eds.)/ F. Baader, W. Snyder // Handbook of Automated Reasoning, vol. I, Elsevier. — 2001 — P. 445–533.

[22] Dzik W. Unitary Unification of S5 Modal Logic and its Extensions/ W. Dzik // Bull. Section of Logic. — V. 32 N. 1-2 — 2003. — P. 19–26.

[23] Jerábek E. Blending margins: the modal logic K has nullary unification type/ E. Jerábek // J. Logic Comput. — V. 25 — 2015 — P. 1231–1240.

[24] Wolter F. Undecidability of the unification and admissibility problems for modal and description logics/ F. Wolter, M. Zakharyaschev // ACM Transactions on Comput. Logic. — V. 9 N. 4 — 2008.

[25] Bashmakov, S.I. Unification in linear modal logic on non-transitive time with the universal modality/ S.I. Bashmakov // J. SibFU. Mathematics and Physics. — V. 11 N. 1 — 2018 — P. 3–9.

[26] Bashmakov, S.I. Unification in linear multi-modal logic of knowledgeand non-transitive time/ S.I. Bashmakov // Handbook of the 6th World Congress andSchool on Universal Logic. — 2018 — P. 229.

[27] Одинцов С.П. Введение в неклассические логики: учеб. пособие./ С.П. Одинцов, С.О. Сперанский, С.А. Добрышевич // Новосиб. гос. ун-т. Новосибирск: РИЦ НГУ., 2014 — 133 P.

[28] Rybakov V.V. Admissible Logical Inference Rules/ V.V. Rybakov // S.: Studies in Logic and the Foundations of Mathematics. — V. 25 — 1997 — P. 616.

[29] Robinson A. A machine oriented logic based on the resolution principle/ A. Robinson // J. of the ACM. — V. 12 N. 1 — 2008. — P. 23–41.

[30] Bashmakov, S.I. Unification for multi-agent temporal logics with universal modality/ S.I. Bashmakov, A.V. Kosheleva, V. Rybakov // Journal of Applied Logics – IFCoLog Journal of Logics and their Applications. — V. 4 N. 4 — 2017 — P. 939–954.

[31] Pogorzelski W.A. Completeness theory for propositional logics/ W.A. Pogorzelski, P. Wojtylak // Birkhäuser Basel. — 2008.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_______/В.М. Левчук
«25» 06 2020 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.01 Математика

УНИФИКАЦИЯ В НЕТРАНЗИТИВНОЙ ВРЕМЕННОЙ ЛОГИКЕ ЗНАНИЯ С УНИВЕРСАЛЬНОЙ МОДАЛЬНОСТЬЮ

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент _______ /С.И. Башмаков
23.06.2020

Выпускник _______ /Т.Ю. Зверева
23.06.20

Красноярск 2020