

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт математики и фундаментальной информатики
Базовая кафедра математического моделирования и процессов управления

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_____ / В.В. Шайдуров
(подпись)
«__» _____ 2020 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

КВАТЕРНИОННЫЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ НАВИГАЦИИ

Направление 02.04.01 Математика и компьютерные науки
Магистерская программа 02.04.01.01 Математическое и компьютерное
моделирование

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент

_____ / А.П. Ляпин
(подпись, дата)

Выпускник

_____ / М.Ю. Казанцев
(подпись, дата)

Красноярск 2020

АННОТАЦИЯ

Цель работы - исследовать возможность применения кватернионных моделей для построения математической модели орбитального движения, а также исследовать методы численного решения дифференциальных уравнений движения, построенных на основе выбранной кватернионной модели.

В результате исследования решены следующие задачи:

- продемонстрирована возможность применения кватернионных моделей в качестве модели орбитального движения на примере модели Unified State Model;
- метод Рунге-Кутты объединен с методом Крауча-Гроссмана для численного решения дифференциальных уравнений движения, построенных на основе математической модели орбитального движения модели Unified State Model;
- проведены вычислительные эксперименты для верификации разработанного вычислительного алгоритма.

Ключевые слова: кватернион, кеплеровские элементы орбиты, численные методы.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	4
1 Основные понятия для описания вращательного движения.....	7
1.1 Постановка задачи определения ориентации. Углы Эйлера.....	7
1.2 Кватернионы.....	8
1.3 Годограф скорости.....	11
2 Метод моделирования орбит.....	13
2.1 Параметры ориентации орбиты.....	13
2.2 Составляющие скорости движения по орбите.....	16
2.3 Кинематика и динамика движения объекта по орбите.....	17
3 Численные методы расчета орбиты по USM модели.....	19
3.1 Методы интегрирования ОДУ.....	19
3.2 Численное моделирование.....	23
3.3 Применение фильтра Калмана для оценки вектора состояния космического аппарата.....	25
Заключение.....	29
Список использованных источников.....	30

ВВЕДЕНИЕ

Задача повышения точности прогнозирования движения небесных тел является основной задачей небесной механики от момента ее возникновения до наших дней. Современный космический эксперимент, а так же новые способы получения наблюдений предъявляют особенно высокие требования к точности вычисления пространственных положений небесных тел. В данной работе рассматривается задача прогнозирования движения небесных тел с применением численных методов решения дифференциальных уравнений [1].

Основными источниками погрешностей при таком подходе к задаче прогнозирования являются недостаточная точность аппроксимирующей формулы в численном методы, неустойчивость интегрируемой системы уравнений, неравномерность изменения функций правых частей этих уравнений, неточность физических и математических моделей действующих сил [1].

Значительным источником погрешностей при численном прогнозировании является сама система дифференциальных уравнений движения небесных тел.

При численном моделировании исследуемые орбиты небесных тел формализуются на основе систем дифференциальных уравнений, которые интегрируются численно. В связи с этим для высокоэффективного моделирования очень важно, насколько удачно выбраны уравнения, поскольку от этого непосредственно зависят точность и быстродействие их интегрирования [2].

Численное интегрирование дифференциальных уравнений связано со следующими трудностями. Правые части уравнений представляют собой быстроизменяющиеся функции, которые необходимо интегрировать с малым шагом. Это приводит к увеличению объема вычислений, что, в свою очередь, нередко сопряжено с быстрым накоплением ошибок округления. Кроме того, уравнения неустойчивы по Ляпунову. Хорошо известно, что ляпуновская

неустойчивость дифференциальных уравнений при численном интегрировании создает благоприятные условия для усиления всевозможных ошибок, неизбежно сопровождающих любой численный процесс [2].

С помощью кеплеровских элементов и прямоугольных координат можно с высокой точностью проводить численное моделирование орбиты. При этом существуют и другие параметры, которые позволяют с высокой степенью точностью решать эту же задачу. Так, например, в Unified State Model (USM) применяется семь параметров орбиты, в состав которых входит кватернион и три параметра годографа скорости [3]. Четыре элемента кватерниона задают ориентацию орбиты в связанной с объектом системы координат (ССК) относительно неподвижной инерциальной системы координат (ИСК). Годограф скорости описывает размер и форму орбиты. При невозмущенном движении параметры годографа скорости остаются постоянными, изменяются только элементы кватерниона в зависимости от времени. При наличии возмущений орбиты, параметры годографа будут изменяться намного медленнее по сравнению с прямоугольными координатами. Это может дать USM заметные преимущества по точности численного моделирования орбиты, чем использование прямоугольных координат для вычисления орбиты. В кеплеровских элементах орбиты присутствует только один быстроменяющийся параметр - это истинная аномалия, которая представляет собой угол между радиус-вектором тела \mathbf{r} и направлением на перицентр (точки орбиты небесного тела - ближайшей к центральному телу). Но в процессе расчета орбиты, при использовании кеплеровских элементов, могут возникать сингулярности, что может служить препятствием для их использования при описании некоторых видов орбит.

Некоторые важные особенности кватернионов, например, равенство единице модуля кватерниона, не может быть учтена при использовании традиционных методов численного интегрирования обыкновенных

дифференциальных уравнений (ОДУ), что влечет за собой появление дополнительных погрешностей. Данный факт привел к созданию специальных методов, избавленных от таких недостатков, например, метод Крауча-Гроссмана и Рунге-Кутта-Мунте-Кааса, представленных работах [4,5,6].

Цель данной магистерской диссертации это исследовать возможность применения кватернионных моделей для построения математической модели орбитального движения, а также исследовать методы численного решения дифференциальных уравнений движения, построенных на основе выбранной кватернионной модели.

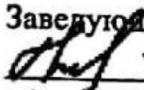
Удалены страницы с 7 по 29

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Бордовицина Т.В. Современные численные методы в задачах небесной механики. - М.: Наука, 136 с.
2. Авдюшев В.А. Численное моделирование орбит. - Томск: Изд-во НТЛ, 2010. - 282 с.
3. Vittaldev, V., Mooij, E. & Naeije, M.C. Unified State Model theory and application in Astrodynamics. *Celest Mech Dyn Astr* 112, 253–282 (2012)
4. Michael S. Andrie, John L. Crassidis Geometric Integration of Quaternions // *Journal of Guidance Control and Dynamics*. 2013. Vol. 36, № 3. P. 1762-1772
5. Crouch, P. and Grossman, R., Numerical Integration of Ordinary Differential Equations on Manifolds // *Journal of Nonlinear Science*. Vol. 3. 1993. P. 1–33
6. Aksel Sveier, Alexander M. Sjøberg and Olav Egeland Applied Runge–Kutta–Munthe-Kaas Integration for the Quaternion Kinematics // *Journal Of Guidance, Control, And Dynamics*. Vol. 42, No. 12, December 2019.
7. Wahba G. Problem 65-1: A least squares estimate of satellite attitude. *SIAM Review*, 1965, vol. 7, no. 3, pp. 409–409.
8. Челноков Ю. Н. Кватернионные и бикватернионные модели и методы механики твердого тела и их приложения. Геометрия и кинематика движения. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. - 512 с.
9. Челноков Ю. Н. Кватернионные модели и методы динамики, навигации и управления движением. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011. — 560 с.
10. Markley, F.L., and Crassidis, J.L, *Fundamentals of Spacecraft Attitude Determination and Control*, Springer, New York, NY, 2014, 486 p.
11. Sun, F. T. Hodograph mapping used for trajectory analysis, June 01, 1969 Technical Report NASA-TM-X-62852, PM-82 NASA Electronics Research Center; Cambridge, MA, United States 38 p.

12. Sun, F.: Hodograph analysis of the free-flight trajectories between two arbitrary terminal points. Contractor Report CR-153, NASA (1965), P. 38
13. Raol J. R., Sinha N. K. Estimation of orbital states of a satellite // Proceedings 7th IFAC/IFORS Symposium on Identification and System Parameter Estimation, York, UK, Volume 18, Issue 5, July 1985, P. 675-680
14. Raol J. R. and Sinha N. K. On the orbit determination problem // IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, vol. 21, no. 3, pp. 274–291, 1985.
15. Clark Cohen, Attitude determination using GPS: Development of all solid-state guidance, navigation, and control sensor for air and space vehicles based on the global positioning system, Ph.D. dissertation, Stanford University, December 1992.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Институт математики и фундаментальной информатики
Базовая кафедра вычислительных и информационных технологий

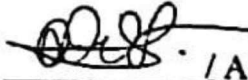
УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
 / В.В. Шайдуров
(подпись)
« 29 » июня 2020 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

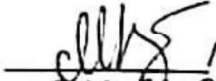
КВАТЕРНИОННЫЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ В ЗАДАЧАХ НАВИГАЦИИ

Направление 02.04.01 Математика и компьютерные науки
Магистерская программа 02.04.01.01 Математическое и компьютерное
моделирование

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук

 / А.П. Ляпин
25.06.2020

Выпускник

 / М.Ю. Казанцев
20.06.2020

Красноярск 2020