

# ТЕРМОКОНЦЕНТРАЦИОННАЯ КОНВЕКЦИЯ В СИСТЕМЕ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ И БИНАРНОЙ СМЕСИ В ПЛОСКОМ КАНАЛЕ ПРИ МАЛЫХ ЧИСЛАХ МАРАНГОНИ <sup>1</sup>

М. В. Ефимова<sup>1,2</sup>, Н. Дараби<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительного моделирования СО РАН,

<sup>2</sup>Сибирский федеральный университет,

660036, Красноярск,

E-mail: efmavi@icm.krasn.ru, nematdarabi@gmail.com

Изучена сопряженная начально - краевая задача, возникающая при движении бинарной смеси и вязкой теплопроводной жидкости с общей поверхностью раздела под действием термоконтрационных сил. Найдено решение, описывающее стационарное течение в слоях, распределение температур и концентрации. С помощью метода преобразования Лапласа получено нестационарное решение задачи в изображениях, позволяющее описать эволюцию движения во все моменты времени с помощью численного обращения изображений.

**Ключевые слова:** начально – краевая задача, преобразование Лапласа, бинарная смесь, термоконтрационный эффект.

**Введение.** Исследование конвективного переноса массы, тепла и других физических величин в жидкостях важно как в фундаментальной науке, так и в плане практического применения. В ряде работ при анализе данного процесса отдельное внимание уделяется изучению влияния термоконтрационных эффектов на возникновение и эволюцию конвективных течений. Так в [1] описана начально-краевая задача о движении двух несмешивающихся вязких теплопроводных жидкостей с общей поверхно-

---

<sup>1</sup>Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ, грант 17-01-00229.

стью раздела, исследованы некоторые вопросы устойчивости соответствующих течений. В [2] анализировалось движение двух вязких теплопроводных жидкостей в плоском слое под действием перепада давления. Однонаправленное движение бинарной смеси и вязкой теплопроводной жидкости в теплоизолированной цилиндрической трубе под действием градиента давления рассмотрено в работе [3]. В приложениях часто возникают ситуации, когда имеется совместное движение трех жидкостей, контактирующих по некоторым поверхностям, одна из таких задач изучалась в [4].

В настоящей работе изучено двухслойное течение системы бинарной смеси и вязкой жидкости с общей поверхностью раздела при локальном нагреве твердых стенок по параболическому закону. Построено точное решение стационарной задачи. Решение нестационарной задачи методом Лапласа позволяет описать термоконцентрационное движение системы в зависимости от градиента поверхностного натяжения.

**Постановка задачи.** Пусть бинарная смесь заполняет слой  $|x| < \infty$ ,  $0 < y < l_1(x, t)$ , находящийся на твердой неподвижной подложке  $y = 0$ . Сверху этого слоя имеется слой вязкой теплопроводной жидкости  $|x| < \infty$ ,  $l_1(x, t) < y < l_2$ , где  $y = l_2 = \text{const}$  - твердая неподвижная стенка. Таким образом, линия  $y = l_1(x, t)$  является границей раздела двух сред. Система находится в условиях невесомости. Пусть  $\rho_{j0}$  - постоянные плотности сред при средних значениях температуры и концентрации;  $\theta_j, C$  - отклонения температуры и концентрации от средних значений ( $C$  - концентрация легкой компоненты). Предположим, что коэффициенты поверхностного натяжения линейно зависят от температуры и концентрации на границе раздела  $\sigma(\theta_1, C) = \sigma^0 - \varkappa_1\theta_1 - \varkappa_2C$  с постоянными  $\sigma^0 > 0$ ,  $\varkappa_1 > 0$ ,  $\varkappa_2$  (обычно  $\varkappa_2 < 0$ , поскольку поверхностное натяжение увеличивается с ростом концентрации).

Введем безразмерные независимые переменные  $\xi = x/l_{10}$ ,  $\eta = y/l_{10}$ ,

$\tau = \nu_1 t / l_{10}^2$ , а также скорости, давления, температуры и концентрацию

$$\mathbf{u}_j^* = \frac{\rho_{10} \nu_1}{\varkappa_1 \Delta \theta} \mathbf{u}_j, \quad P_j^* = \frac{l_{10}}{\varkappa_1 \Delta \theta} P_j, \quad \theta_j^* = \frac{1}{\Delta \theta} \theta_j, \quad C^* = \frac{\beta_1^c l_{10}^2}{\beta_1^\theta \Delta \theta} C,$$

где  $\nu_1$  - постоянная кинематическая вязкость,  $\Delta \theta$  - характерный перепад температур,  $l_{10} = \max |l_1(x, 0)|$ . Тогда уравнения движения сред в безразмерном виде запишутся так (знак звездочка далее опускается,  $u_j, v_j$  - компоненты скоростей)

$$\begin{aligned} u_{j\tau} + M(u_j u_{j\xi} + v_j u_{j\eta}) + \frac{\rho_{j0}}{\rho_{10}} P_{j\xi} &= \frac{\nu_j}{\nu_1} (u_{j\xi\xi} + u_{j\eta\eta}), \\ v_{j\tau} + M(u_j v_{j\xi} + v_j v_{j\eta}) + \frac{\rho_{j0}}{\rho_{10}} P_{j\eta} &= \frac{\nu_j}{\nu_1} (v_{j\xi\xi} + v_{j\eta\eta}), \\ \theta_{j\tau} + M(u_j \theta_{j\xi} + v_j \theta_{j\eta}) &= \frac{\chi_j}{\nu_1} (\theta_{j\xi\xi} + \theta_{j\eta\eta}), \\ C_\tau + M(u_1 C_\xi + v_1 C_\eta) &= \frac{1}{S} (C_{\xi\xi} + C_{\eta\eta} - \psi(\theta_{1\xi\xi} + \theta_{1\eta\eta})), \\ u_{j\xi} + v_{j\eta} &= 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Основная система (1) содержит пять безразмерных параметров: тепловое число Марангони  $M = \varkappa_1 \Delta \theta l_{10} / \rho_{10} \nu_1^2$ , числа Прандтля  $Pr_j = \nu_j / \chi_j$ , число Шмидта  $S = \nu_1 / D$ , аналог параметра разделения  $\psi = -\alpha \beta_1^c / \beta_1^\theta$ , отношение кинематических вязкостей  $\nu = \nu_2 / \nu_1$ ,  $D$  - постоянный коэффициент диффузии,  $\alpha D$  - коэффициент термодиффузии. Индекс  $j$  нумерует жидкости, первая жидкость расположена внизу.

На твердых стенках ( $\eta = 0$ ,  $\eta = l_2 / l_{10}$ ) заданы условия прилипания и распределение температуры по закону  $\theta_j = A_{j0} \xi^2 + B_{j0}$ , ( $j = 1, 2$ ), а также отсутствие потока вещества через поверхность  $\eta = 0$ .

На границе раздела (в работе [1] приведены общие условия на границе раздела двух сред) в динамическом условии будут дополнительно входить параметр  $\omega = \varkappa_2 \beta_1^\theta / \varkappa_1 \beta_1^c$  и число Вебера  $We = \sigma^0 / \varkappa_1 \Delta \theta$ . В реальных ситуациях для многих жидких сред  $We \gg 1$  [1]. Поэтому при таких числах Вебера  $l_{1\xi\xi} = 0$  и граница раздела может быть только прямой. Далее, считаем ее параллельной твердым стенкам  $\eta = 0$ ,  $\eta = l_2 / l_{10}$ , так что в без-

размерных переменных ее уравнение есть  $\eta = 1$ . Кроме того, предположим, что движение в слоях является ползущим ( $M \ll 1$ ), при этом параметр  $\omega$  считается конечным, чтобы учесть влияние концентрации в касательном граничном условии на процесс движения. В таком случае рассматриваемая задача становится линейной.

Ищем решение уже линейной задачи в виде

$$\begin{aligned} u_j &= U_j(\eta, \tau)\xi, & v_j &= V_j(\eta, \tau); \\ \theta_j &= A_j(\eta, \tau)\xi^2 + B_j(\eta, \tau), & c_1 &= H_1(\eta, \tau)\xi^2 + E_1(\eta, \tau), \\ p_j &= P(\xi, \eta, \tau). \end{aligned} \quad (2)$$

Поле скоростей в (2) соответствует хорошо известному решению Хименца для чисто вязкой жидкости [5]. В указанной работе оно описывает натекание жидкости из бесконечности на плоскость  $y = 0$  с условием прилипания на ней. В работе [6] это решение применялось для течения между двумя пластинами или течения в цилиндрической трубе (осесимметричный аналог решения (2)). Для движущихся пластин нестационарное решение (2) было рассмотрено в [7]. В работах [8, 9] дано дальнейшее развитие результатов [7], когда расстояние между пластинами меняется по степенному закону в зависимости от времени. В статье [10] построено решение задачи о нестационарном натекании вязкой жидкости на стенку — обобщение работы [5]. Теоретико-групповая природа решений (2) уравнений Навье – Стокса установлена в [11].

Подстановка вида решения (2) в линейную ( $M = 0$ ) систему (1) приводит к уравнениям

$$\begin{aligned} A_{j\tau} &= \frac{\chi_j}{\nu_1} A_{j\eta\eta}, & B_{j\tau} &= \frac{\chi_j}{\nu_1} (2A_j + B_{j\eta\eta}); \\ H_{1\tau} &= \frac{1}{S} (H_{1\eta\eta} - \psi A_{1\eta\eta}), & E_{1\tau} &= \frac{1}{S} (2H_1 + E_{1\eta\eta} - \psi(2A_1 + B_{1\eta\eta})); \\ -U_{j\tau} + \frac{\nu_j}{\nu_1} U_{j\eta\eta} &= S_j(\tau); \\ V_{j\eta} + U_j &= 0. \end{aligned} \quad (3)$$

Функции  $P_j(\xi, \eta, \tau)$  имеют представления

$$\frac{\rho_1}{\rho_j} P_j = S_j(\tau) \frac{\xi^2}{2} + h_j,$$

причем

$$h_{j\eta} = \frac{\nu_j}{\nu_1} V_{j\eta\eta} - V_{j\tau}.$$

Граничные условия на твердых стенках:

$$U_1(0, \tau) = 0, \quad U_2(l, \tau) = 0, \quad A_1(0, \tau) = A_{10}(\tau), \quad A_2(l, \tau) = A_{20}(\tau);$$

$$B_1(0, \tau) = B_{10}(\tau), \quad B_2(l, \tau) = B_{20}(\tau); \quad (4)$$

$$H_{1\eta}(0, \tau) - \psi A_{1\eta}(0, \tau) = 0; \quad E_{1\eta}(0, \tau) - \psi B_{1\eta}(0, \tau) = 0.$$

Условия на поверхности раздела при  $\eta = 1$ :

$$U_1 = U_2, \quad \mu U_{2\eta} - U_{1\eta} = -2A_1 - 2\omega H_1;$$

$$A_1 = A_2, \quad A_{1\eta} = kA_{2\eta}; \quad (5)$$

$$B_1 = B_2, \quad B_{1\eta} = kB_{2\eta};$$

$$H_{1\eta} - \psi A_{1\eta} = 0; \quad E_{1\eta} - \psi B_{1\eta} = 0;$$

$$\int_0^1 U_1(z, \tau) dz = 0, \quad \int_1^l U_2(z, \tau) dz = 0. \quad (6)$$

Здесь введены обозначения  $\rho = \rho_2/\rho_1$ ,  $l = l_2/l_{10} > 1$ ,  $\mu = \rho\nu$ . Граничные условия (4) и (5), содержащие параметр разделения  $\psi$ , означают отсутствие переноса вещества через твердую стенку и поверхность раздела соответственно.

Задачу дополним начальными условиями

$$U_j(y, 0) = 0, \quad V_j(y, 0) = 0, \quad A_j(y, 0) = A_j^0(y), \quad B_j(y, 0) = B_j^0(y),$$

$$H_1(y, 0) = H_1^0(y), \quad E_1(y, 0) = E_1^0(y).$$

Поскольку в большей степени при анализе нас будет интересовать влияние поверхностных сил на движение, начальные условия для скоростей без ограничения общности считаются нулевыми.

Интегральные условия (6) есть следствия неподвижности границы раздела  $\eta = 1$  и уравнений сохранения массы, поскольку

$$V_1 = - \int_0^\eta U_1(z, \tau) dz, \quad V_2 = - \int_\eta^l U_2(z, \tau) dz. \quad (7)$$

и  $V_1(1, \tau) = V_2(1, \tau) = 0$ .

Отметим особенность поставленной задачи: она является обратной, поскольку функции  $S_j(\tau)$  должны находиться вместе с  $A_j(\eta, \tau)$ ,  $B_j(\eta, \tau)$ ,  $U_j(\eta, \tau)$ . Сначала определяются функции  $A_j$ , затем  $H_1$  и  $U_j$ , а на последнем этапе - продольные градиенты давлений  $S_j(\tau)$  из равенств (6). Функции  $E_1$ ,  $B_j$  не влияют на поле скоростей, а вертикальные скорости в слоях находятся из равенств (7). В силу представления (2) температура на стенках имеет в точке  $\xi = 0$  ( $x = 0$ ) минимум для  $A_{j0}(\tau) > 0$ , либо максимум для  $A_{j0}(\tau) < 0$ . В силу эффекта Марангони жидкость и смесь могут двигаться в разные стороны. Заметим в конце этого пункта, что за характерный перепад температур можно принять  $\Delta\theta = l_{10}^2 \Delta A$ , где  $\Delta A = \max_{t \geq 0} |A_{20}(t) - A_{10}(t)| > 0$ . Если  $A_{20}(t) = A_{10}(t)$ , то можно полагать  $\Delta A = \max_j \max_y |A_{j0}(y)| > 0$ .

**Стационарное течение.** Задача (3) — (6) имеет стационарное решение, соответствующее постоянным  $A_{j0}$ ,  $B_{j0}$ ,  $j = 1, 2$ ; обозначим его  $A_j^c(\eta)$ ,  $H_1^c(\eta)$ ,  $U_j^c(\eta)$ ,  $S_j^c$ ,  $B_j^c(\eta)$ ,  $E_1^c(\eta)$ . Простые вычисления приводят к формулам (здесь выписаны лишь функции, отвечающие за гидродинамику течения - конвекцию)

$$\begin{aligned} A_1^c(\eta) &= a_1 \eta + A_{10}, & A_2^c(\eta) &= \frac{a_1}{k} (\eta - l) + A_{20}, \\ U_1^c(\eta) &= \frac{S_1^c}{2} \eta^2 + a_2 \eta, & U_2^c(\eta) &= \frac{1}{\nu} \left( \frac{S_2^c}{2} \eta^2 + a_3 \eta + a_4 \right), \\ H_1^c(\eta) &= \psi A_1^c, \end{aligned} \quad (8)$$

где

$$a_1 = \frac{k}{k + l - 1} (A_{20} - A_{10}), \quad a_2 = \frac{(1 - l)(1 + \omega\psi)(a_1 + A_{10})}{\mu + l - 1} \equiv (1 - l)n,$$

$$a_3 = -\frac{\nu(2l+1)n}{l-1}, \quad a_4 = \frac{\nu l(l+2)n}{2(l-1)},$$

$$S_1^c = 3(l-1)n, \quad S_2^c = \frac{3\nu n}{l-1}.$$

Вертикальные скорости находятся из (7):

$$V_1^c(\eta) = -\frac{S_1^c}{6}\eta^3 - \frac{a_2\eta^2}{2},$$

$$V_2^c(\eta) = \frac{1}{\nu} \left[ \frac{S_2^c}{6}(\eta^3 - l^3) + \frac{a_3}{2}(\eta^2 - l^2) + a_4(\eta - l) \right]. \quad (9)$$

**Решение в изображениях по Лапласу.** Сопряженная начально-краевая задача (3)–(6) интегрируется в квадратурах в пространстве изображений по Лапласу, что позволяет для конкретных жидких сред получить количественную картину движения. Пусть

$$\widehat{u}(y, p) = \int_0^{\infty} e^{-pt} u(y, t) dt$$

есть преобразование Лапласа функции  $u(y, t)$  (область его применения см., например, в [12]). В образах по Лапласу указанная выше задача сводится к сопряженной краевой задаче для ОДУ и имеет решение вида

$$\widehat{A}_1(\eta, p) = C_1^1 \operatorname{sh} \sqrt{p\operatorname{Pr}_1} \eta + C_1^2 \operatorname{ch} \sqrt{p\operatorname{Pr}_1} \eta -$$

$$-\sqrt{\frac{\operatorname{Pr}_1}{p}} \int_0^{\eta} A_1^0(z) \operatorname{sh} \sqrt{p\operatorname{Pr}_1} (\eta - z) dz, \quad \widehat{A}_2(\eta, p) = C_2^1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p\operatorname{Pr}_2}{\nu}} \eta +$$

$$+ C_2^2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p\operatorname{Pr}_2}{\nu}} \eta - \sqrt{\frac{\operatorname{Pr}_2}{\nu p}} \int_1^{\eta} A_2^0(z) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p\operatorname{Pr}_2}{\nu}} (\eta - z) dz;$$

$$\widehat{H}_1(\eta, p) = \psi \widehat{A}_1(\eta, p) + \sqrt{\frac{\operatorname{S}}{p}} \int_0^{\eta} \left\{ \psi \left[ p \widehat{A}_1(z, p) - A_1^0(z) \right] - \right.$$

$$\left. - H_1^0(z) \right\} \operatorname{sh} \sqrt{p\operatorname{S}} (\eta - z) dz - \frac{1}{\operatorname{sh} \sqrt{p\operatorname{S}}} \sqrt{\frac{\operatorname{S}}{p}} \int_0^1 \left\{ \psi \left[ p \widehat{A}_1(z, p) - \right. \right.$$

$$\left. \left. - A_1^0(z) \right] - H_1^0(z) \right\} \operatorname{ch} \sqrt{p\operatorname{S}} (1 - z) dz \operatorname{ch} \sqrt{p\operatorname{S}} \eta; \quad (11)$$

$$\begin{aligned}\widehat{U}_1(\eta, p) &= D_1^1 \operatorname{sh} \sqrt{p} \eta + D_1^2 \operatorname{ch} \sqrt{p} \eta - \frac{\widehat{S}_1(p)}{p}, \\ \widehat{U}_2(\eta, p) &= D_2^1 \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu}} \eta + D_2^2 \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu}} \eta - \frac{\widehat{S}_2(p)}{p},\end{aligned}\tag{12}$$

причем

$$\begin{aligned}C_1^1 &= \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{k}{\sqrt{\chi}} \left[ \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p\operatorname{Pr}_2}{\nu}} (l-1) F_1 + F_2 \right] + \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p\operatorname{Pr}_2}{\nu}} (l-1) F_3 \right\}, \\ C_1^2 &= \widehat{A}_{10}(p), \quad C_2^1 = \frac{1}{\Delta} \left[ \operatorname{ch} \sqrt{p\operatorname{Pr}_1} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p\operatorname{Pr}_2}{\nu}} l F_1 + \left( \operatorname{ch} \sqrt{p\operatorname{Pr}_1} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p\operatorname{Pr}_2}{\nu}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{k}{\sqrt{\chi}} \operatorname{sh} \sqrt{p\operatorname{Pr}_1} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p\operatorname{Pr}_2}{\nu}} \right) F_2 - \operatorname{sh} \sqrt{p\operatorname{Pr}_1} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p\operatorname{Pr}_2}{\nu}} F_3 \right], \\ C_2^2 &= \frac{1}{\Delta} \left[ -\operatorname{ch} \sqrt{p\operatorname{Pr}_1} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p\operatorname{Pr}_2}{\nu}} l F_1 + \left( \frac{k}{\sqrt{\chi}} \operatorname{sh} \sqrt{p\operatorname{Pr}_1} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p\operatorname{Pr}_2}{\nu}} - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p\operatorname{Pr}_2}{\nu}} \operatorname{ch} \sqrt{p\operatorname{Pr}_1} \right) F_2 + \operatorname{sh} \sqrt{p\operatorname{Pr}_1} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p\operatorname{Pr}_2}{\nu}} l F_3 \right], \\ \chi &= \frac{\chi_2}{\chi_1}, \quad \Delta = \frac{k}{\sqrt{\chi}} \operatorname{sh} \sqrt{p\operatorname{Pr}_1} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p\operatorname{Pr}_2}{\nu}} (l-1) + \operatorname{ch} \sqrt{p\operatorname{Pr}_1} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p\operatorname{Pr}_2}{\nu}} (l-1);\end{aligned}\tag{13}$$

$$F_1 = -\widehat{A}_{10}(p) \operatorname{ch} \sqrt{p\operatorname{Pr}_1} + \sqrt{\frac{\operatorname{Pr}_1}{p}} \int_0^1 A_1^0(z) \operatorname{sh} \sqrt{p\operatorname{Pr}_1} (1-z) dz,$$

$$F_2 = \widehat{A}_{20}(p) + \sqrt{\frac{\operatorname{Pr}_2}{\nu p}} \int_1^l A_2^0(z) \operatorname{sh} \sqrt{\frac{\operatorname{Pr}_2}{\nu}} (l-z) dz,\tag{14}$$

$$F_3 = -\widehat{A}_{10}(p) \operatorname{sh} \sqrt{p\operatorname{Pr}_1} + \sqrt{\frac{\operatorname{Pr}_1}{p}} \int_0^1 A_1^0(z) \operatorname{ch} \sqrt{p\operatorname{Pr}_2} (1-z) dz;$$

$$\begin{aligned}D_1^1 &= -\frac{1}{\Delta_1} \left\{ \left[ \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} (1 - \operatorname{ch} \sqrt{p}) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu}} (l-1) - \operatorname{sh} \sqrt{p} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu}} (l-1) \right] \frac{\widehat{S}_1(p)}{p} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} \left[ 1 - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu}} (l-1) \right] \frac{\widehat{S}_2(p)}{p} + \frac{1}{\sqrt{p}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu}} (l-1) L \right\}, \quad D_1^2 = \frac{\widehat{S}_1(p)}{p},\end{aligned}$$

$$D_2^1 = \frac{1}{\Delta_1} \left\{ \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu}} l (1 - \operatorname{ch} \sqrt{p}) \frac{\widehat{S}_1(p)}{p} + \left[ \frac{\operatorname{ch} \sqrt{p}}{\nu} \left( \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu}} - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu}} l \right) + \right.$$



$$+ \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} \operatorname{sh} \sqrt{p} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu}} \left[ \frac{\widehat{S}_2(p)}{p} + \frac{\operatorname{sh} \sqrt{p}}{\sqrt{p}} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu}} lL \right], \quad (15)$$

$$D_2^2 = \frac{1}{\Delta_1} \left\{ \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu}} l (\operatorname{ch} \sqrt{p} - 1) \frac{\widehat{S}_1(p)}{p} + \left[ \frac{\operatorname{ch} \sqrt{p}}{\nu} \left( \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu}} - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu}} l \right) - \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} \operatorname{sh} \sqrt{p} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu}} \right] \frac{\widehat{S}_2(p)}{p} - \frac{\operatorname{sh} \sqrt{p}}{\sqrt{p}} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu}} lL \right\}; \\ L = 2\widehat{A}_1(1, p) + 2\omega\widehat{H}_1(1, p), \quad (16)$$

$$\Delta_1 = -\frac{\mu}{\sqrt{\nu}} \operatorname{sh} \sqrt{p} \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu}} (l-1) - \operatorname{ch} \sqrt{p} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu}} (l-1);$$

$$\widehat{S}_1(p) = \frac{\sqrt{p} L}{Q_1 Q_4 - Q_2 Q_3} \times \\ \times \left\{ \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu}} (l-1) (\operatorname{ch} \sqrt{p} - 1) Q_4 - \operatorname{sh} \sqrt{p} \left[ \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu}} (l-1) - 1 \right] Q_2 \right\}, \quad (17)$$

$$\widehat{S}_2(p) = \frac{\sqrt{p} L}{Q_1 Q_4 - Q_2 Q_3} \times \\ \times \left\{ \operatorname{sh} \sqrt{p} \left[ \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu}} (l-1) - 1 \right] Q_1 - \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu}} (l-1) (\operatorname{ch} \sqrt{p} - 1) Q_3 \right\}; \\ Q_1 = \Delta_1 (\operatorname{sh} \sqrt{p} - \sqrt{p}) + \\ + (1 - \operatorname{ch} \sqrt{p}) \left[ \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} (1 - \operatorname{ch} \sqrt{p}) \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu}} (l-1) - \operatorname{sh} \sqrt{p} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu}} (l-1) \right],$$

$$Q_2 = \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} Q_3, \quad Q_3 = (\operatorname{ch} \sqrt{p} - 1) \left[ \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu}} (l-1) - 1 \right], \quad (18)$$

$$Q_4 = 2 \operatorname{ch} \sqrt{p} \left[ 1 - \operatorname{ch} \sqrt{\frac{p}{\nu}} (l-1) \right] - \frac{\mu}{\sqrt{\nu}} \operatorname{sh} \sqrt{p} \operatorname{sh} \sqrt{\frac{p}{\nu}} (l-1) - \Delta_1 \sqrt{\frac{p}{\nu}} (l-1).$$

Пусть

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} A_{j0}(\tau) = A_j^0 = \text{const}, \quad (19)$$

тогда используя явные выражения (10)–(18), после длинных вычислений можно установить предельные равенства

$$\lim_{p \rightarrow 0} p\widehat{A}_j(\eta, p) = A_j^c(\eta), \quad \lim_{p \rightarrow 0} \widehat{H}_1(\eta, p) = H_1^c(\eta), \\ \lim_{p \rightarrow 0} p\widehat{U}_j(\eta, p) = U_j^c(\eta), \quad \lim_{p \rightarrow 0} p\widehat{S}_j(p) = S_j^c, \quad (20)$$

где правые части суть стационарное решение (8).

Согласно [12] равенства (20) показывают, что при  $\tau \rightarrow \infty$  нестационарное решение  $A_j(\eta, \tau)$ ,  $H_1(\eta, \tau)$ ,  $U_j(\eta, \tau)$ ,  $S_j(\tau)$  стремится к стационарному режиму (8), если выполнено (19).

**Замечание 1.** При условиях (19) функции  $B_j(\eta, \tau)$ ,  $E_j(\eta, \tau)$ ,  $V_j(\eta, \tau)$  с ростом безразмерного времени  $\tau$  также выходят на свои стационарные значения.

**Замечание 2.** Используя метод априорных оценок [13], можно доказать, что

$$\begin{aligned} |A_j(\eta, \tau) - A_j^c(\eta)| &\leq N_j e^{-\delta\tau}, & |H_1(\eta, \tau) - H_1^c(\eta)| &\leq N_3 e^{-\delta_1\tau}, \\ |U_j(\eta, \tau) - U_j^c(\eta)| &\leq K_j e^{-\delta_2\tau}, & |S_j(\tau) - S_j^c| &\leq K_3 e^{-\delta_3\tau}, \end{aligned} \quad (21)$$

если сходятся интегралы

$$\int_0^{\infty} |A_{j0}(\tau) - A_j^0| e^{\delta\tau} d\tau, \quad \int_0^{\infty} |A_{j0}^{(k)}(\tau)| e^{\delta\tau} d\tau, \quad k = 1, 2. \quad (22)$$

В (21)  $N_j$ ,  $N_3$ ,  $K_j$ ,  $K_3$ ,  $\delta$ ,  $\delta_1$ ,  $\delta_2$ ,  $\delta_3$  — положительные постоянные, зависящие от физических параметров жидкости, бинарной смеси и толщин слоев. Условия (22) означают, что функции  $A_{j0}(\tau)$  стремятся по экспоненте с показателем  $-\delta$  к своим постоянным предельным значениям. Полученные же явные формулы (10)–(18) позволяют установить эволюцию движения и для функций  $A_{j0}(\tau)$ , не удовлетворяющих условиям (22). Более того, функции  $A_{j0}(\tau)$  могут иметь конечное число разрывов 1-го рода [12], [13].

**Численные результаты.** Полученные формулы в изображениях по Лапласу (10)–(12) были использованы для численного нахождения полей скоростей, температур и концентрации. Для иллюстрации физических эффектов была использована модельная система с параметрами  $\text{Pr}_1 = 29$ ,  $\text{Pr}_2 = 1.52$ ,  $\rho = 0.945$ ,  $\nu = 7.1$ ,  $k = 0.42$ ,  $\psi = 1.49$ ,  $\omega = -0.65$ ,  $l_1 = 0.001$ ,  $l_2 = 0.002$ .

На рис.1 представлены графики функций  $U(\eta)$ ,  $V(\eta)$  для стационарного случая, когда  $A_{20} = 0$ ,  $A_{10} < 0$ , т.е. температура имеет максимум на нижней твердой стенке в точке  $\xi = 0$ . Рис.1

Вертикальная компонента скорости в нижнем слое положительна, горизонтальная меняет знак, следовательно жидкость в нижнем слое при  $\xi = 0$  движется вертикально вверх вдоль оси  $\eta$ . Это согласуется с рис.2 , на котором показано векторное поле скоростей  $u = U(\eta)\xi, v = V(\eta)$  стационарного течения (8), (9), когда  $A_{20} = 0, A_{10} < 0$ . Рис.2

На рис.3, рис.4 представлены профили безразмерных составляющих компонент скорости потока по толщине системы в различные моменты времени. Положим, что  $A_{10} = b_1 + b_2 \exp(-b_3\tau) \sin(b_4\tau)$  с амплитудой  $b_2$  и частотой  $b_4$ . Причем при  $b_3 > 0$  при больших временах будет выполняться условие (19). На рис.3 представлено изменение во времени функций  $U(\eta, \tau), V(\eta, \tau)$  для  $A_{10} = 3 + \exp(-0.05\tau) \sin(0.5\tau), A_{20} = 0$ . Видно, что со временем составляющие компонент скорости выходят на стационарный режим (кривая 1), что согласуется с априорными оценками (21). С ростом  $|b_1|$  увеличивается интенсивность потока вблизи поверхности раздела. Рис.3  
Рис.4

Рассмотрим случай, когда условие (19) не выполняется ( $b_3 \leq 0$ ). Будем считать, что  $A_{10} = 2 \sin(0.1\tau)$ . В этом случае выхода на стационарный режим нет, наблюдается смена направления движения (рис.4) в разные моменты времени.

На рис.5 представлена зависимость градиента поверхностного натяжения на поверхности раздела  $\eta = 1$  от времени  $\sigma_\xi = -2(\alpha_1 A_1(1, \tau) + \alpha_2 H_1(1, \tau))\xi$  при  $\xi = 1$ . Видно, что если выполнено условие (19), то со временем градиент поверхностного натяжения стремится к константе (рис 5.а), что приводит к уравниванию термокапиллярных сил и движение устанавливается. Если же со временем градиент поверхностного натяжения не стабилизируется, что характерно, например, для тригонометрической зависимости  $A_{10}$ , то изменение знака  $\sigma_\xi$  меняет направление движения жидкости, а при  $\sigma_\xi = 0$  происходит уравнивание капиллярных и концентрационных сил и движение останавливается. Эти замечания хорошо согласуются с численными расчетами, что показывает согласованность Рис.5

рис. 3 с рис. 5а, а рис. 4 с рис. 5б.

**Заключение.** В данной работе получено точное решение уравнений конвекции в системе, состоящей из двух слоев несмешивающихся жидкостей при малых числах Марангони. В случае стационарной конвекции решение найдено в виде аналитических формул. Для решения нестационарной задачи использован метод Лапласа. Построено аналитическое решение задачи для определения поля скоростей, температур и концентрации в изображениях по Лапласу. Истинные поля скорости, температуры и концентрации для модельной системы восстановлены с помощью численного обращения преобразования Лапласа. Расчеты показывают, что термоконцентрационные силы порождают сложное циркуляционное движение в слоях, причем поток меняет направление по глубине. Поток симметричен относительно  $x = 0$ , являющейся точкой максимума или минимума температуры на твердой стенке. Полученные результаты могут применяться для описания двухфазных систем в микроканалах и процессов охлаждения пленок потоками жидкости или газа.

## Список литературы

- [1] Андреев В.К., Захватаев В.Е., Рябицкий Е.А. Термокапиллярная неустойчивость. *Новосибирск: Наука*, (2000), 280.
- [2] Андреев В.К. Эволюция совместного движения двух вязких теплопроводных жидкостей в плоском слое под действием нестационарного градиента давления. *ПМТФ*, **49**(2008), №4, 94-107.
- [3] Собачкина Н.Л. О совместном движении бинарной смеси и вязкой жидкости в теплоизолированной цилиндрической трубе, *Вычислительные технологии*, **16**(2011), №4, 120-133.

- [4] Лемешкова Е.Н. Прямая и обратная задача о совместном движении трех вязких жидкостей в плоских слоях, *Журн. СФУ. Сер. Матем. и физ.*, 4(2011), №3, 363-370.
- [5] NIEMENZ K. Die Grenzschicht an einem in den gleichförmigen Flüssigkeitsstrom eingetauchten geraden Kreiszyylinder // *Dinglers Polytech. J.* 1911. V. 3326. P. 321-324.
- [6] BRADY J. F., ACRIVOS A. Steady flow in a channel or tube with an accelerating surface velocity // *J. Fluid Mech.* 1981. V. 112. P. 127-150.
- [7] Riabouchinsky D. Quelques considerations sur les mouvements plans rotationnels d'un liquide // *C. R. Acad. Sci.* 1924. V. 179. P. 1133-1136.
- [8] Петров А. Г. Точное решение уравнений Навье – Стокса в слое жидкости между движущимися параллельно пластинами // *ПМТФ.* 2012. Т. 53, № 5. С. 13-18.
- [9] Петров А. Г. Построение решений уравнений Навье – Стокса для слоя жидкости между движущимися параллельно пластинами при малых и умеренных числах Рейнольдса // *ПМТФ.* 2013. Т. 54, № 1. С. 51-56.
- [10] Петрова А. Г., Пухначев В. В., Фроловская О. А. Нестационарное движение вблизи критической точки // *Успехи механики сплошных сред : сб. докл. междунар. конф. Иркутск : ООО “Мегапринт”, 2014. С. 385-388.*
- [11] Пухначев В. В. Групповые свойства уравнений Навье – Стокса в плоском случае // *ПМТФ.* 1960. № 1. С. 83-90.
- [12] ЛАВРЕНТЬЕВ М.А., ШАБАТ Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. - М.:Наука, 1973. - 736 с.
- [13] Андреев В.К., Черемных Е.Н. Совместное ползущее движение трех вязких жидкостей в плоском слое: априорные оценки и сходимость к

стационарному режиму // Сибирский журнал индустриальной математики. 2016. Т. 19. № 1. С. 3-17.

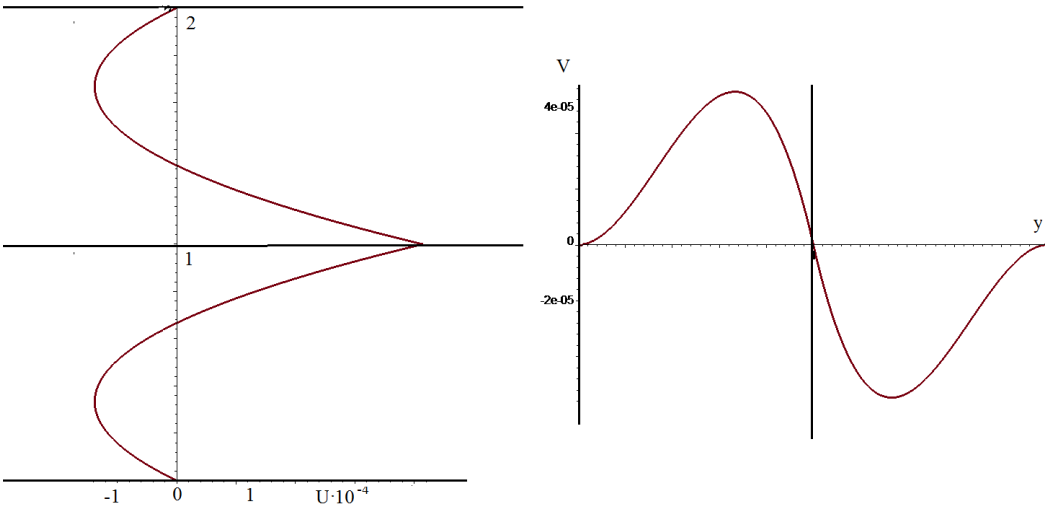


Рис. 1:

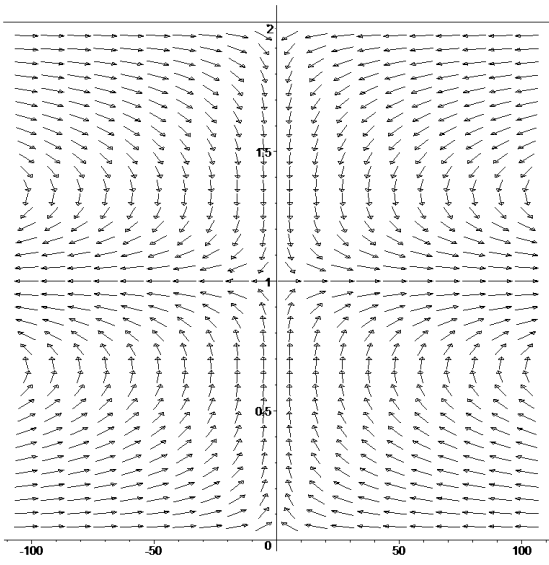


Рис. 2:

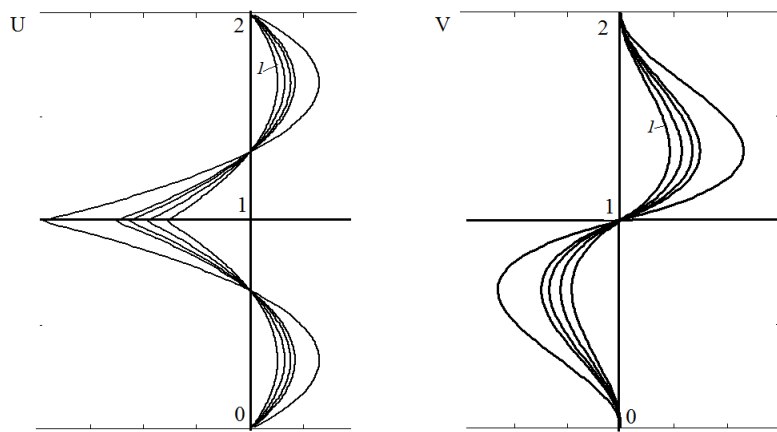


Рис. 3:

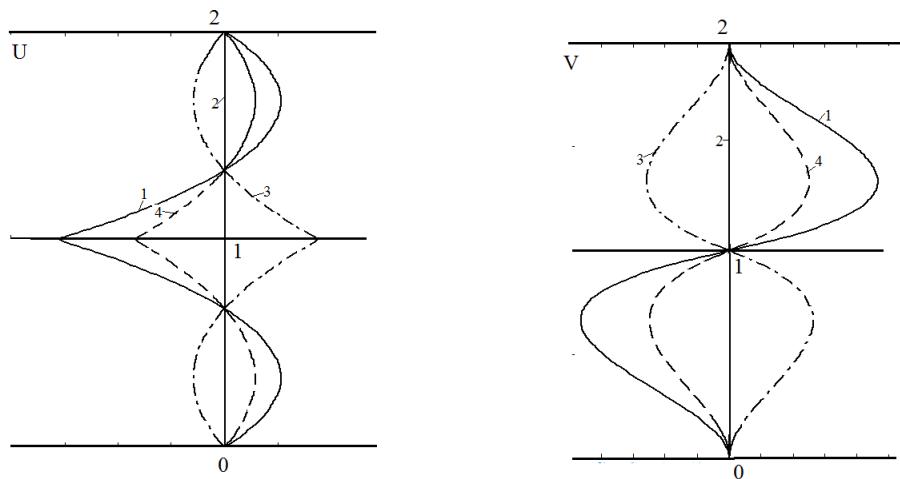
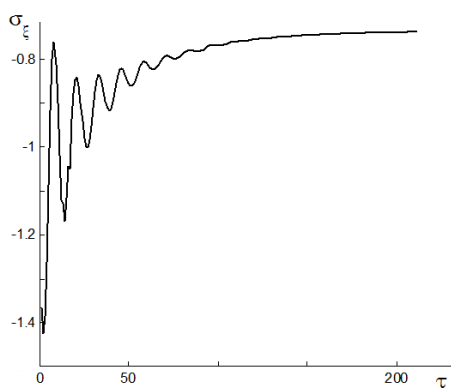
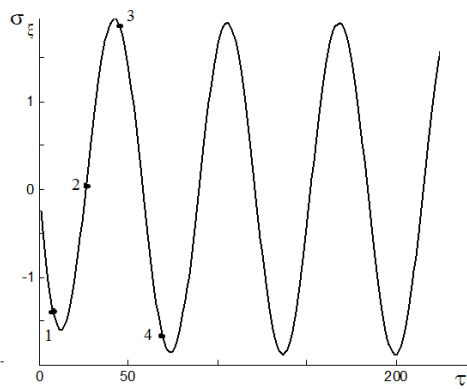


Рис. 4:



а)



б)

Рис. 5:



## ПОДПИСИ К РИСУНКАМ

Рис.1. Профили функций  $U$  и  $V$ . Стационарный случай.

Рис.2. Стационарное векторное поле  $u = U(\eta)\xi, v = V(\eta)$

Рис.3. Изменение во времени функций  $U, V$ . Выход на стационарный режим (кривая 1)

Рис.4. Изменение во времени функций  $U, V$ :  $\tau = 10$  (1),  $\tau = 25$  (2),  $\tau = 30$  (3),  $\tau = 60$  (4)

Рис.5. Зависимость градиента поверхностного натяжения от времени при различных  $A_{10}$ : а)  $A_{10} = 3 + \exp(-0.05\tau) \sin(0.5\tau)$ , б)  $A_{10} = 2 \sin(0.1\tau)$ :  $\tau = 10$  (1),  $\tau = 25$  (2),  $\tau = 30$  (3),  $\tau = 60$  (4).

## СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$t$  — время

$\tau$  — безразмерное время

$\mathbf{x} = (x, y)$  — вектор координат

$\xi, \eta$  — безразмерные координаты

$\mathbf{u} = (u, v)$  — вектор скорости

$T_0$  — постоянное среднее значение температуры

$C_0$  — постоянное среднее значение концентрации легкого компонента

$y = l_1(x, t)$  — граница раздела двух сред

$\rho_0$  — плотность смеси при средних значениях температуры и концентрации

$\rho$  — плотность жидкости

$\sigma(\theta_1, C)$  — коэффициент поверхностного натяжения

$p$  — отклонение давления от гидростатического

$\theta$  — температура

$C$  — концентрация легкого компонента

$M$  — число Марангони

$Pr$  — число Прандтля

$S$  — число Шмидта

$We$  — число Вебера

$\psi$  — параметр разделения

$\beta_T$  — коэффициент теплового расширения

$\beta_C$  — коэффициент концентрационного расширения

$\nu$  — коэффициент кинематической вязкости

$\chi$  — коэффициент температуропроводности

$D$  — коэффициент диффузии

$\alpha D$  — коэффициент термодиффузии

$\mu$  — динамическая вязкость

$\Delta\theta$  — характерный перепад температур

**THERMOCONCENTRATION CONVECTION IN THE  
SYSTEM OF VISCOUS LIQUID AND BINARY MIXTURE  
IN A FLAT CHANNEL BY SMALL MARANGONI NUMBERS**

*M.V. Efimova, N. Darabi*

The initial - boundary problem arising in the motion of a binary mixture and a viscous liquid is studied. A solution is found that describes the steady flow, the distribution of temperatures and concentrations. A nonstationary solution of the problem is obtained by the Laplace transform method. This allows one to describe the evolution of motion at all times.

Key words: initial - boundary problem, Laplace transform method, binary mixture, thermoconcentration effect.