Серия «Математика»
20–. Т. –. С. 1—9

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

И З В Е С Т И Я
Иркутского государственного университета

УДК 519.1
MSC 15 +16
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.20–.24.1

Короткое вычисление кратной суммы Кривоколеско–Лейнартаса с линейными ограничениями на индексы суммирования

Г. П. Егорычев

Сибирский федеральный университет

Аннотация. В конце 1970-х автором был разработан метод интегрального представления и вычисления комбинаторных сумм различного типа (метод коэффициентов) с использованием формальных степенных рядов Лорана над $\mathbb{C}$, теории аналитических функций и теории кратных вычетов в $\mathbb{C}^n$. С тех пор этот метод нашёл многочисленные применения в различных областях математики в нашей стране и за рубежом. На мой взгляд, особенно интересно и актуально использование метода коэффициентов при решении трудной проблемы вычисления кратных сумм с линейными ограничениями на индексы суммирования. Проблемы такого типа нередко возникают на практике при решении различных комбинаторных задач. Например, в 2016 году автором в «Известиях ИГУ» была вычислена кратная сумма с q-биномиальными кэффициентами и линейными рекуррентными соотношениями на индексы суммирования, возникшая при перечислении всех собственных t-мерных подпространств V_m над полем $GF(q)$.

В 2012 году В. П. Кривоколеско и Е. К. Лейнартас доказали в «Известия ИГУ» с использованием композиции Адамара кратное тождество с полиномиальными коэффициентами и ограничениями различного типа на пределы суммирования, содержащее семейство свободных параметров. Это тождество является обобщением тождеств, изученных ранее несколькими авторами, начиная с построения фильтров Добеши в вейвлет-теории. Здесь по стандартной схеме метода коэффициентов проведено, не зная ответа, короткое и простое вычисление кратной суммы Кривоколеско–Лейнартаса. Это вычисление также автоматически дает эквивалентный способ вычисления указанной суммы с помощью традиционного метода производящих функций, используя лишь хорошо известные операции над соответствующими кратными степенными рядами Лорана.

Ключевые слова: комбинаторные суммы, метод коэффициентов, интегральные представления, производящие функции

1. Введение

Недавно В. П. Кривоколеско и Е. К. Лейнартас [4] с помощью свойств композиции Адамара доказали следующее утверждение: *Пусть* μ – *фиксированное натуральное число,* $1 \leqslant \mu \leqslant n$, *и комплексные числа* $z = (z_1, \ldots, z_n)$ *такие, что*

$$|z_1| + \ldots + |z_{\mu-1}| < 1, \ z_1 + z_2 + \ldots + z_n = 1. \tag{1.1}$$

Тогда справедлива следующая формула кратного суммирования с полиномиальныи коэффициентами и линейными ограничениями на индексы суммирования:

$$S_n = \sum_{j=\mu}^{n} z_j \sum_{\beta \in B^s_{\mu,j}} \binom{\beta_1 + \ldots + \beta_n}{\beta_1, \ldots, \beta_n} \prod_{i=1}^{n} z_i^{\beta_i} \equiv 1. \tag{1.2}$$

Здесь $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ *и для* $j = \mu, \mu+1, \ldots, n$ *множество*

$$B^s_{\mu,j} = \{\beta \in \mathbb{Z}^n_+ : \beta_\mu \leqslant s_\mu, \ldots, \beta_{j-1} \leqslant s_{j-1}, \beta_j = s_j, \beta_{j+1} \leqslant s_{j+1}, \ldots, \beta_n \leqslant s_n\}$$

и полиномиальный коэффициент

$$\binom{\beta_1 + \ldots + \beta_n}{\beta_1, \ldots, \beta_n} = \frac{(\beta_1 + \ldots + \beta_n)!}{\beta_1! \ldots \beta_n!}.$$

Формула (1.2) возникла и является непосредственным обобщением комбинаторных тождеств, изученных ранее несколькими авторами [8], [11], [6], [2].

Вычисление кратной суммы (1.2) мы будем проводить по общей схеме метода коэффициентов [1], [9], который нашёл ряд приложения в различных областях математики (см., например, [12], [5], [10], [7], [3]). Вначале дадим краткое описание метода коэффициентов.

2. Метод коэффициентов

Пусть L – множество степенных рядов Лорана с действительными, либо комплексными коэффициентами, содержащее лишь конечное число членов с отрицательными степенями; $L_k = \{A(z)\}$ – множество формальных степенных рядов Лорана порядка k,

$$A(z) = \sum_{i=0}^{k} a_i z^{-i} + \sum_{i=1}^{\infty} a_i z^i, \ a_k \neq 0.$$

Для $A(z) \in L$ определим *оператор формального вычета*

$$res_z\{A(z)\} := a_{-1}. \tag{2.1}$$

Известия Иркутского государственного университета.
20–. Т. –. Серия «Математика». С. 1–9

Два ряда $A(z) = \sum_k a_k z^k$ и $B(z) = \sum_k b_k z^k$ из L равны тогда и только тогда, когда $a_k = b_k$ для всех k. Оператор $res_z\{A(z)\}$ определён на множестве L формальных степенных рядов Лорана с известными операциями сложения, умножения, суперпозиции и обращения, а также операциями дифференцирования и интегрирования рядов (см., например, [1]). Если

$$A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

то из (2.1) следует

$$a_n = res_z\{A(z)z^{-n-1}\}, \, , n = 0, 1, \ldots .$$

Например, одно из возможных представлений для биномиального коэффициента

$$\binom{n}{k} = res_z\{(1+z)^n z^{-k-1}\}, \, , k = 0, 1, \ldots, n,$$

а для полиномиального коэффициента

$$\binom{\beta_1 + \ldots + \beta_n}{\beta_1, \ldots, \beta_n} = res_{z_1,\ldots,z_n}\left\{\frac{1}{(1 - z_1 - \ldots - z_n)}\prod_{i=1}^{n} z_i^{-\beta_i - 1}\right\}. \qquad (2.2)$$

Из определения оператора $res_z\{A(z)\}$ и свойств операций для рядов из L непосредственно вытекают правила действия (правила вывода) для оператора $res_z\{A(z)\}$. Ниже приведены лишь те из них, которые используются нами при вычислених в этой заметке, опуская правила замены, обращения, дифференцирования и интегрирования.

Правила вывода для оператора $res_z\{A(z)\}$

Пусть $A(z) = \sum_k a_k z^k$ и $B(z) = \sum_k b_k z^k$ – два ряда из L.

Правило снятия вычета. *Равенство*

$$res_z\{A(z)z^{-k-1}\} = res_z\{B(z)z^{-k-1}\}$$

выполняется для всех $k = 0, 1, \ldots$, *тогда и только тогда, когда* $A(z) = B(z)$.

Правило линейности. *Для любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$

$$\alpha res_z\{A(z)\} + \beta res_z\{B(z)\} = res_z\{\alpha A(z) + \beta B(z)\}.$$

По индукции отсюда следует, что операторы $res_z\{A(z)\}$ *и суммирования коммутативны для любого конечного числа слагаемых.*

Правило подстановки.

$$\sum_k w^k res_z\{A(z)\} = [A(z)]_{z=w} = A(w).$$

В случае, если ряд $A(z)$ сходится в выколотой окрестности начала координат, то полагаем

$$res_z\{A(z)\} = res_{z=0}\{A(z)\},$$

где под $res_{z=0}\{A(z)\}$ понимается классический вычет в точке $z = 0$ из теории функций комплексного переменного, и, в случае необходимости, мы переходим к использованию теории вычетов одного или нескольких комплексных переменных [1].

3. Основной результат

Пусть

$$S(w) = \sum_{s_\mu \dots s_n = 0}^{\infty} S_n\, w_\mu^{s_\mu} \dots w_n^{s_n} \tag{3.1}$$

– производящая функция степенного типа от комплексных переменных $w = (w_\mu, \dots, w_n)$ для последовательности $\{S_n\}$ из (1.2) от неотрицательных целочисленных параметров $s_\mu, \dots, s_n$.

Теорема 1. *(a) Следующая формула справедлива:*

$$S(w) = \prod_{i=\mu}^{n} \frac{1}{1 - w_i}. \tag{3.2}$$

(b) Если условие (1.1) выполняется, то тождество (1.2) справедливо.

Доказательство. Используя интегральную формулу (2.2) для полиномиального коэффициента, по правилу линейности получаем

$$S_n = \sum_{j=\mu}^{n} z_j \sum_{\beta \in B^s_{\mu,j}} \binom{\beta_1 + \dots + \beta_n}{\beta_1, \dots, \beta_n} \prod_{i=1}^{n} z_i^{\beta_i} =$$

$$\sum_{j=\mu}^{n} z_j^{s_j+1} \sum_{\beta_1 \dots \beta_{\mu-1}=0}^{\infty} \sum_{\beta_\mu \dots [j] \dots \beta_n = 0}^{s_\mu \dots [j] \dots s_n} \prod_{i=1, i\neq j}^{n} z_i^{\beta_i} \times$$

$$res_{x_1 \dots x_n} \left\{ \frac{1}{(1 - x_1 - \dots - x_n)}\, x^{-s_j-1} \prod_{i=1, i\neq j}^{n} x_i^{-\beta_i - 1} \right\} =$$

$$res_{x_\mu \dots x_n} \left\{ \sum_{j=\mu}^{n} \frac{z_j}{x_j} \left(\frac{z_j}{x_j}\right)^{s_j} \prod_{i=1,\, i\neq j}^{n} \frac{1}{x_i} \sum_{\beta_j=0}^{s_j} \left(\frac{z_i}{x_i}\right)^{\beta_i} \times\right.$$

$$\left[\sum_{\beta_1\ldots\beta_{\mu-1}=0}^{\infty} res_{x_1\ldots x_{\mu-1}}\left\{\frac{1}{(1-x_1-\ldots-x_n)}\,x^{-s_j-1}\prod_{i=1}^{\mu-1}x_i^{-\beta_i-1}\right\}\right]\Bigg\}.$$

Проведем суммирование по индексам $i=\mu,\ldots,n\ i\neq j,\ (n-\mu)$-раз по формуле конечной геометрической прогрессии

$$\frac{1}{x_i}\sum_{\beta_j=0}^{s_j}\left(\frac{z_i}{x_i}\right)^{\beta_i}=\frac{1-(z_i/x_i)^{s_i+1}}{x_i-z_i},$$

и суммирование по индексам $\beta_1,\ldots,\beta_{\mu-1}$ в квадратных скобках по правилу подстановки $(\mu-1)$-раз: замены $x_i=z_i$, $i=1,\ldots,\mu-1$. Имеем

$$S_n=res_{x_\mu\ldots x_n}\left\{\sum_{j=\mu}^{n}\frac{z_j}{x_j}\left(\frac{z_j}{x_j}\right)^{s_j}\prod_{i=1,\,i\neq j}^{n}\frac{1-(z_i/x_i)^{s_i+1}}{x_i-z_i}\times\right.$$

$$\left.\left[\frac{1}{(1-x_1-\ldots-x_n)}\right]_{x_i=z_i,\,i=1,\ldots,\mu-1}\right\}=$$

$$res_{x_\mu\ldots x_n}\left\{\sum_{j=\mu}^{n}\frac{z_j}{x_j}\left(\frac{z_j}{x_j}\right)^{s_j}\prod_{i=1,\,i\neq j}^{n}\frac{1-(z_i/x_i)^{s_i+1}}{x_i-z_i}\times\right.$$

$$\left.\frac{1}{(1-z_1-\ldots-z_{\mu-1}-x_\mu-\ldots-x_n)}\right\}. \tag{3.3}$$

Используя интегральную формулу (3.3) для суммы S_n, по правилу линейности получаем

$$S(w)=\sum_{s_\mu\ldots s_n=0}^{\infty}w_\mu^{s_\mu}\ldots w_n^{s_n}\times$$

$$res_{x_\mu\ldots x_n}\left\{\sum_{j=\mu}^{n}\frac{z_j}{x_j}\left(\frac{z_j}{x_j}\right)^{s_j}\prod_{i=1,\,i\neq j}^{n}\frac{1-(z_i/x_i)^{s_i+1}}{x_i-z_i}\times\right.$$

$$\left.\frac{1}{(1-z_1-\ldots-z_{\mu-1}-x_\mu-\ldots-x_n)}\right\}=$$

$$res_{x_\mu\ldots x_n}\left\{\sum_{j=\mu}^{n}\frac{z_j}{x_j}\sum_{s_j=0}^{\infty}\left(\frac{z_jw_j}{x_j}\right)^{s_j}\prod_{i=1,\,i\neq j}^{n}\frac{1}{x_i-z_i}\sum_{s_i=0}^{\infty}\left(w_i^{s_i}-\frac{z_i}{x_i}\left(\frac{z_iw_i}{x_i}\right)^{s_i}\right)\times\right.$$

$$\left.\frac{1}{(1-z_1-\ldots-z_{\mu-1}-x_\mu-\ldots-x_n)}\right\}. \tag{3.4}$$

Суммируя здесь по индексам $s_\mu, \ldots, s_n$ по формуле бесконечной геометрической прогрессии, в предположении, что $|w_i z_i/x_i| < 1$, $i = \mu, \ldots, n$ и $|w_i| < 1$, $i = \mu, \ldots, n$, $i \neq j$. Имеем

$$\frac{1}{x_i - z_i} \sum_{s_i=0}^{\infty} \left(w_i^{s_i} - \frac{z_i}{x_i} \left(\frac{z_i w_i}{x_i} \right)^{s_i} \right) = \frac{1}{x_i - z_i} \left(\frac{1}{1 - w_i} - \frac{z_i}{x_i - z_i w_i} \right) =$$

$$\frac{1}{(1 - w_i)(x_i - z_i w_i)}, \ i = \mu, \ldots, n, \ i \neq j; \ \ \frac{z_j}{x_j} \sum_{s_j=0}^{\infty} \left(\frac{z_j w_j}{x_j} \right)^{s_j} = \frac{z_j}{x_j - z_j w_j}.$$

Отсюда в соответствие и с (3.4), имеем

$$S(w) = res_{x_\mu \ldots x_n} \left\{ \sum_{j=\mu}^{n} \frac{z_j}{x_j - z_j w_j} \prod_{i=1, i \neq j}^{n} \frac{1}{(1 - w_i)(x_i - z_i w_i)} \times \right.$$

$$\left. \frac{1}{(1 - z_1 - \ldots - z_{\mu-1} - x_\mu - \ldots - x_n)} \right\} =$$

$$\prod_{i=\mu}^{n} \frac{1}{(1 - w_i)} \times \sum_{j=\mu}^{n} z_j (1 - w_j) \times$$

$$res_{x_\mu \ldots x_n} \left\{ \frac{1}{(1 - z_1 - \ldots - z_{\mu-1} - x_\mu - \ldots - x_n)} \prod_{i=\mu}^{n} \frac{1}{(x_i - z_i w_i)} \right\}.$$

В последнем выражении для $S(w)$ берем вычеты первого порядка по каждой переменной x_i в точке $x_i = z_i w_i$, и, с учётом условия (1.1) $1 - z_1 - \ldots - z_{\mu-1} = z_{mu} + \ldots + z_n$, имеем

$$S(w) = \prod_{i=\mu}^{n} \frac{1}{(1 - w_i)} \times \sum_{j=\mu}^{n} \frac{z_j (1 - w_j)}{w_\mu - \ldots - w_n - w_\mu z_\mu - \ldots - w_n z_n} =$$

$$\prod_{i=\mu}^{n} \frac{1}{(1 - w_i)}.$$

Таким образом, пункт (a) доказан, и согласно (3.1) и (3.2)

$$S(n) = \sum_{s_\mu \ldots s_n = 0}^{\infty} res_{x_\mu \ldots x_n} \left\{ S(w) \prod_{i=\mu}^{n} w_i^{-s_i - 1} \} \right\} =$$

$$\sum_{s_\mu \ldots s_n = 0}^{\infty} res_{x_\mu \ldots x_n} \left\{ \prod_{i=\mu}^{n} \frac{1}{1 - w_i} \prod_{i=\mu}^{n} w_i^{-s_i - 1} \right\} =$$

$$res_{x_\mu \ldots x_n}\left\{\sum_{l_\mu \ldots l_n=0}^{\infty} w_\mu^{l_\mu}\ldots w_n^{l_n}\prod_{i=\mu}^{n} w_i^{-s_i-1}\right\}\equiv 1.$$

□

4. Заключение

Здесь по стандартной схеме метода коэффициентов найдено новое, прямое и простое вычисление суммы S_n из (1.2), не требующее знания ответа. Тем самым доказана эффективность применения метода коэффициентов при вычислении кратных сумм с полиномиальными коэффициентами и линейными ограничениями на индексы суммирования, содержащие семейство свободных параметров. При этом линейные ограничения определяются заданием конечных и бесконечных кратных сумм с независимыми индексами суммирования. Наконец, приведенные в теореме 1 вычисления суммы S_n означают, что их нетрудно переписать с помощью традиционного метода производящих функций, используя лишь хорошо известные операции над соответствующими кратными степенными рядами Лорана.

Список литературы

1. Егорычев Г. П. Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм// Наука: Новосибирск. 1977. English: Transl. of Math. Monographs, 59, AMS, 1984, 286 p.; 2-nd Ed. in 1989.
2. Егорычев Г. П. Комбинаторное тождество из теории интегральных представлений в $\mathbb{C}^n$// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2011. Т.4, № 4. С. 39–44.
3. Егорычев Г. П. Перечисление собственных t-мерных подпространств пространств V_m над полем $GF(q)$// Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2016. Т.17. С. 12–22.
4. Кривоколеско В. П., Лейнартас Е. К. О тождествах с полиномиальными коэффициентами//Изв. Иркут. гос. ун-та. Сер. Математика. 2012. Т.5, № 3. С. 56–62.
5. Леонтьев В. К. Избранные задачи комбинаторного анализа//М.: Моск. гос. техн. у-нт. 2001. 182 с.
6. Шелкович В. М., Южаков А. П. Структура одного класса асимптотических распределений В. К. Иванова// Изв. вузов. Сер. Математика. 1991. № 4. С. 70—73.
7. Davletshin M. N., Egorychev G. P., Krivokolesko V. P. New applications of the Egorychev method of coefficient of integral representations and calculation combinatorial sums//Preprint arXiv: math./ 1506.03596vl, Jun 2015. P. 1–64.
8. Deubechies I. Ten Lectures on Wavelets. SIAM, Philadelphia, 1992. P. XIX+357.

9. Egorychev G. P. Method of coefficients: an algebraic characterization and recent applications // Advances in Combinatorial Math. Springer-Verlag. Proc. of the Waterloo Workshop in Computer Algebra 2008, dedicated to the 70th birthday G. Egorychev. 2009. P. 1–30.
10. Krattenthaler Ch. A new q-Lagrange formula and some applications //Proc. Amer. Math. Soc. Vol. 90. 1984. P. 338–344.
11. Zeilberger D. On an identity of Deubechies// Amer. Math. Monthly. 1993. Vol. 100. P. 487.
12. Zeilberger D. Proof of the alternating sign matrix conjecture// arXiv: math./ 9407211vl, 2 July 1994. P. 1–84.

Егорычев Георгий Петрович,
доктор физико-математических наук, профессор, Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, пр. Свободный, 79, Красноярск, 660041, Россия,
тел.: +7(391)9135924671
(e-mail: gegorych@mail.ru)

G.P. Egorychev

A short calculation of the multiple Krivokolesko–Leinartas sum with linear restrictions on summation indexes

Abstract. In the late seventies the author hed been developed a method of integral representation and calculation of the combinatorial sums of various type (the method of coefficients) with use of formal Laurent power series over $\mathbb{C}$, theories analytical and theories of multiple residues in $\mathbb{C}^n$. Since then this method has found numerous applications in various areas of mathematics in our country and abroad. In my opinion, use of a method of coefficients is especially interesting and actual at the decision of a difficult problem of calculation of the multiple sums with linear restrictions on summation indexes. Problems of such type quite often arise in practice at the decision of various combinatorial problems. For example, in 2016 the author in ≪Izvestia ISU≫ had been calculated the multiple sum with q-binomial coefficients and linear recurrent rectictions on summation indexes, arisen at the enumeration of all own t-dimensional subspaces of the space V_m over field $GF(q)$.

In 2012 V.P. Krivokolesko and E.K. Leinartas in ≪Izvestia ISU≫ with use of Hadamard composition have proved the multiple identity with polynomial coefficients and restrictions of various type on the limits of summation, containing the family of free parametres. This identity is generalisation of the identities studied earlier by several authors, since constructions of filters Deubechies in the wavelets-theory. Here under standard scheme of the method of coefficients it is spent, not knowing the answer, short and simple calculation of Krivokolesko–Leinartas sum. These calculations also automatically give an equivalent way of calculation of the specified sum by means of a traditional method of generation functions, using only well-known operations over corresponding multiple formal Laurent power series.

Keywords: combinatorial sums, the method of coefficients, integral representations, generating functions

References

1. Egorychev G.P. Integral repreesentation and the computation of combinatorial sums. Nauka, Novosibirsk, 1977, 287 p. (In Russian); English: Transl. of Math. Monographs, AMS, vol. 59, 1984, 286 p.; 2-nd Ed. in 1989.
2. Egorychev G.P. Combinatorial identity from the theory of integral representations in $\mathbb{C}^n$. *Izv. Irkutsk. State Univ., Ser. Math., 2011, vol. 4, no. 4, pp. 39–44.* (In Russian)
3. Egorychev G.P. The enumeration of own t-dimentional subspases of a spase V_m over the field $GF(q)$. *Izv. Irkutsk. State Univ., Ser. Math., 2016, vol. 17 no. 3, pp. 12–22.* (In Russian)
4. Krivokolesko V.P., Leinartas E.K. On identities with polynomial coefficients. *Izv. Irkutsk. State Univ., Ser. Math., 2012, vol. 5, no. 3., pp. 56–62.*(in Russian)
5. Leont'ev V.K. Selected problems of combinanatorial analysis. *Moskow, Mosk. State Tech. Univ., 2001, 182 p.* (In Russian)
6. Shelkovich V.M., Yuzhakov A.P. The structure of one class asymptotic V.K. Ivanov's distributions. *Izv. Vuzov, Ser. Math., 1991, no. 4., pp. 70—73.* (in Russian)
7. Davletshin M.N., Egorychev G.P., Krivokolesko V.P. New applications of the Egorychev method of coefficients of integral representations and calculation of combinatorial sums. Preprint arXiv: math./ 1506.03596vl, Jun 2015, pp. 1–64.
8. Deubechies I. Ten lectures on Wavelets. SIAM, Philadelphia, 1992, 357 p.
9. Egorychev G.P. Method of Coefficients: an algebraic characterization and recent applications. Advances in Combinatorial Math., Springer-Verlag; Proc. of the Waterloo Workshop in Computer Algebra 2008, dedicated to the 70th birthday G. Egorychev, 2009, pp. 1–30.
10. Krattenthaler Ch. A new q-Lagrange formula and some applications. *Proc. Amer. Math. Soc., vol. 90, 1984, pp. 338–344.*
11. Zeilberger D. On an identity of Deubechies. *Amer. Math. Monthly, 1993, vol. 100, pp. 487.*
12. Zeilberger D. Proof of the alternating sign matrix conjecture. arXiv: math./ 9407211vl, 2 July 1994, pp. 1–84.

Egorychev Georgy Petrovich,

Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), professor, Institute of Mathematics and Computer Science, Siberian Federal University, Svobodny, 79, Krasnoyarsk, 660041, Russia tel.: +79135924671
(e-mail: gegorych@mail.ru)