УДК 539.3+539.4

Интегро-интерполяционный метод решения плоской задачи для композита, армированного семейством криволинейных волокон

Н.А. Федорова*

Сибирский федеральный университет,
660041 Россия, Красноярск, Свободный, 79[1]

Получена 10.05.2008, окончательный вариант 17.06.2008, принята к печати 10.03.2009

Построена разрешающая система уравнений плоской задачи для среды, армированной семейством криволинейных волокон. Задача сформулирована в перемещениях для семейства равнонапряженных волокон, когда угол армирования задан как известная функция координат. Показано, что система может быть записана в дивергентной форме относительно перемещений. На основе метода Ритца получена численная схема, адаптированная к особенностям рассматриваемой задачи.

Ключевые слова: композит, криволинейные волокна, армирование.

1. Введение

При исследовании напряженно-деформированного состояния плоских конструкций из волокнистых композитов, используемых в авиастроении, судостроении, машиностроении, строительстве, в основном ограничиваются случаями прямолинейных структур армирования. В ряде работ, например [1],[2], [3], было показано, что использование сложных криволинейных структур армирования может приводить к эффективным конструкциям по расходу арматуры, по жесткости и прочности. В данной работе исследуется случай армирования одним семейством криволинейных волокон.

2. Постановка задачи

Рассмотрим плоскую задачу упругости для среды, армированной одним семейством волокон. Пусть армирование выполнено волокнами постоянного поперечного сечения. Для описания композита используется структурная модель [4]. Введем обозначения: интенсивность армирования семейства волокон $\omega_1(x, y)$, компонент тензора деформаций $\varepsilon_{ij}(x, y)$, деформацию в волокнах семейства $\varepsilon_1(x, y)$, напряжение в волокнах семейства – $\sigma_1(x, y)$, осредненные напряжения обозначим через $\sigma_{ij}(x, y)$, где x, y – декартовы координаты, $\varphi(x, y)$ – угол армирования, индексы $i, j = 1, 2$. В дальнейшем при обращении к перечисленным функциям для краткости аргументы будем опускать. Тогда структурную модель запишем в виде:

$$(\omega_1 l_{11})_{,1} + (\omega_1 l_{12})_{,2} = 0, \tag{1}$$

$$\varepsilon_{11} l_{11}^2 + \varepsilon_{22} l_{12}^2 + 2\varepsilon_{12} l_{11} l_{12} = \varepsilon_1^0, \tag{2}$$

$$\varepsilon_{11,22} + \varepsilon_{22,11} = 2\varepsilon_{12,12}. \tag{3}$$

* Corresponding author E-mail address: ran@akadem.ru

Использованы обозначения: $\varepsilon_1^T = \alpha_1^a T,\ \varepsilon_1^0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_1^T,\ l_{11} = \cos\varphi_1,\ \ l_{12} = \sin\varphi_1,\ \alpha_1^a-$ коэффициент линейного расширения материала семейства волокон, $T = const$ ($T-$ температура, заданная в единицах Си). Символы $_{,1},_{,2}$ означают частное дифференцирование по координатам x, y соответственно. Правая часть в (2) учитывает как случай равнодеформированного волокна ($\varepsilon_1 = const,\ \ \varepsilon_1^0 = const + \varepsilon_1^T$), так и случай нерастяжимого ($\varepsilon_1 = 0,\ \varepsilon_1^0 = \varepsilon_1^T$) .

Заметим, что уравнение (1) – это условие постоянства сечений волокон, (2) – деформация в волокнах семейства, правая часть уравнения учитывает деформации ε_1^T, вызванные постоянным полем температур, (3) – уравнение совместности деформаций.

Осредненные напряжения $\sigma_{ij}(x,y)$ запишем в виде:

$$\sigma_{ij} = (1-\omega_1)\sigma_{ij}^c + \sigma_k\omega_1 l_{1i} l_{1j}. \qquad (4)$$

Соотношения (4) есть определение силы, действующей на слой композитов как суммы сил, создаваемых связующим материалом, и сил, создаваемых армирующими слоями. В (4) напряжения в связующем определяются по формулам:

$$\sigma_{ii}^c = \frac{E}{(1-\nu^2)}(\varepsilon_{ii} + \nu\varepsilon_{jj} - \alpha_c(1+\nu)T),\ \sigma_{ij}^c = \frac{E}{(1+\nu)}\varepsilon_{ij},\ \ (j = 3-i,\ \ i = 1,2).$$

Здесь E, ν, α_c – соответственно модуль Юнга, коэффициент Пуассона и коэффициент температурного расширения связующего материала, E_1- модуль Юнга волокна. Напряжения σ_{ij} должны удовлетворять уравнениям равновесия:

$$\sigma_{1i,1} + \sigma_{i2,2} = b_i, \quad (i = 1,2). \qquad (5)$$

Правые части в (5)

$$b_i = -((1-\omega_1)\rho_c + \omega_1\rho_1)f_i$$

являются компонентами массовой распределенной нагрузки по направлениям прямоугольной декартовой системы координат; $\rho_c,\ \rho_1-$ массовые плотности материалов связующего и волокона ; f_i- компоненты удельной распределенной нагрузки, действующей на единицу массы.

К системе (1) – (5) присоединяются граничные условия на контуре. Уравнение контура Г задано в параметрическом виде: $x = \varphi(s),\ y = \psi(s),\ s-$некоторый параметр. Пусть на контуре Γ_p заданы статические условия с нормальными и касательными усилиями $p_n(s), p_\tau(s)$ соответственно:

$$\sigma_{11}n_1^2 + \sigma_{22}n_2^2 + 2\sigma_{12}n_1n_2 = p_n(s),\ (\sigma_{22}-\sigma_{11})n_1n_2 + \sigma_{12}(n_1^2 - n_2^2) = p_\tau(s). \qquad (6)$$

На другой части контура Γ_u заданы кинематические условия для перемещений u_1, u_2:

$$u_1(\Gamma_u) = u_1^0(s), \quad u_2(\Gamma_u) = u_2^0(s). \qquad (7)$$

В (6) $p_n(s),\ p_\tau(s)-$ известные функции, $n_1 = \cos\beta,\ n_2 = \sin\beta,\ \beta-$ угол, задающий направление внешней нормали к Γ_p. С учетом (4) граничные условия (6) принимают вид

$$\begin{aligned}
&\omega_1\sigma_1\cos^2(\varphi-\beta) + (1-\omega_1)[m_3(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22} - L^T)\cos^2\beta + \\
&+m_3(\varepsilon_{22} + \nu\varepsilon_{11} - L^T)\sin^2\beta + m_4\varepsilon_{12}\sin\beta\cos\beta] = p_n(s), \\
&\omega_1\sigma_1\sin 2(\varphi_1-\beta) + (1-\omega_1)m_3(\varepsilon_{22} - \varepsilon_{11} + \nu(\varepsilon_{11}-\varepsilon_{22}))\sin 2\beta + \\
&+2(1-\omega_1)m_4\varepsilon_{12}\cos 2\beta = 2p_\tau(s).
\end{aligned} \qquad (8)$$

В (8) использованы обозначения для констант

$$L^T = \alpha_c(1+\nu)T,\ m_3 = Em_1,\ m_4 = Em_2,\ m_1 = \frac{1}{1-\nu^2},\ m_2 = \frac{1}{1+\nu}.$$

Интенсивность ω_1 задаем на той части Γ_ω контура, где волокно входит в конструкцию:

$$\omega_1(\Gamma_\omega) = \omega_1^*(s). \tag{9}$$

Ограничение для интенсивности армирования имеет вид

$$0 < \omega_1 \leq 0,7.$$

3. Семейство равнонапряженных волокон

Тогда правая часть в (2) примет вид $\varepsilon_1^0 = \varepsilon_1 + \varepsilon_1^T$, напряжение в волокне $\sigma_1 = Const$. В этом случае система (1),(2),(3) – замкнутая система восьми уравнений относительно восьми неизвестных

$$\omega_1, \varphi, \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}, \varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{12}.$$

Переформулируем названную систему в перемещениях, выразив напряжения через деформации, а деформации через перемещения, используя соотношения Коши. К системе присоединим граничные условия на контуре $\Gamma_u:\ u(\Gamma_u) = u(s)$ либо граничные условия (6), где деформации выражены через перемещения.

При подстановке напряжений через перемещения в уравнения равновесия нужно вычислить следующие выражения:

$$\left(\sigma_1\omega_1\cos^2\varphi\right)_{,1} + \left(\sigma_1\omega_1\cos\varphi\sin\varphi\right)_{,2},$$

$$\left(\sigma_1\omega_1\cos\varphi\sin\varphi\right)_{,1} + \left(\sigma_1\omega_1\sin^2\varphi\right)_{,2}.$$

При их вычислении выделяем слагаемые вида

$$\left(\omega_1\cos\varphi\right)_{,1} + \left(\omega_1\sin\varphi\right)_{,2},$$

которые в силу условия постоянства сечений волокон (1) равны нулю, что упрощает данные выражения, и они становятся соответственно равными:

$$\sigma_1\omega_1\left(\cos\varphi(\cos\varphi)_{,1} + \sin\varphi(\cos\varphi)_{,2}\right)$$

$$\sigma_1\omega_1\left(\cos\varphi(\sin\varphi)_{,1} + \sin\varphi(\sin\varphi)_{,2}\right).$$

Для формулировки системы удобно ввести $z = \operatorname{tg}\varphi(x,y)$. Тогда производные от функции, задающей угол армирования, вычисляем по формулам

$$\varphi_{,1} = \frac{z_{,1}}{1+z^2};\ \varphi_{,2} = \frac{z_{,2}}{1+z^2}.$$

В итоге система для равнонапряженного семейства волокон относительно искомых переменных $\omega_1, \varphi, u_1, u_2$ записывается в виде:

$$\omega_{1,1} + z\omega_{1,2} + \omega_1(-z\frac{z_{,1}}{1+z^2} + \frac{z_{,2}}{1+z^2}) = 0, \tag{10}$$

$$u_{1,2} + \frac{1}{z}u_{1,1} + u_{2,1} - zu_{2,2} - \varepsilon_1^0(\frac{1}{z} + z) = 0, \tag{11}$$

$$\begin{aligned} &\omega m_3(u_{1,11} + \nu u_{2,21}) + \frac{1}{2}\omega m_4(u_{1,22} + u_{2,12}) + m_3(-\omega_{1,1})(u_{1,1} + \nu u_{2,2} - L^T) + \\ &+\frac{1}{2}m_4(-\omega_{1,2})(u_{1,2} + u_{2,1}) + \sigma_1\omega_1(-\frac{z}{(1+z^2)^2}(z_{,1}) - \frac{z^2}{(1+z^2)^2}(z_{,2})) = b_1, \end{aligned} \tag{12}$$

$$\begin{aligned} &\omega m_3(u_{2,22} + \nu u_{1,12}) + \frac{1}{2}\omega m_4(u_{1,21} + u_{2,11}) + m_3(-\omega_{1,2})(u_{2,2} + \nu u_{1,1} - L^T) + \\ &+\frac{1}{2}m_4(-\omega_{1,1})(u_{1,2} + u_{2,1}) + \sigma_1\omega_1(\frac{1}{(1+z^2)^2}(z_{,1}) + \frac{z}{(1+z^2)^2}(z_{,2})) = b_2. \end{aligned} \tag{13}$$

В системе использованы обозначения $\omega = 1 - \omega_1$.

Первые два уравнения системы содержат производные только первого порядка, поэтому чтобы исследовать тип системы, продифференцируем эти уравнения по одной из координат. Затем построим характеристический многочлен [5] для данной системы

$$P(\lambda) = det(A^{11}\lambda^2 + 2A^{12}\lambda + A^{22}),$$

где

$$A^{11} = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{z\omega_1}{1+z^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{z} & 1 \\ 0 & 0 & \omega m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\omega m_4}{2} \end{pmatrix},$$

$$A^{12} = \begin{pmatrix} z & \frac{\omega_1}{1+z^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -z \\ 0 & 0 & 0 & \omega(\nu m_3 + \frac{m_4}{2}) \\ 0 & 0 & \omega(\nu m_3 + \frac{m_4}{2}) & 0 \end{pmatrix}, A^{22} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\omega m_4}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega m_3 \end{pmatrix}.$$

При исследовании типа системы установили, что характеристический многочлен (полином) тождественно равен нулю, что означает вырождение типа системы. Ее решение представляет определенные трудности и требует специального подхода. В данной работе находим частные решения после введения угла армирования как заданной функции координат, что позволяет определить интенсивность армирования из уравнения (10). Уравнение (11) рассматриваем после вычисления u_1, u_2 как ограничение на условие равнонапряженности. Решаем уравнения (12),(13) совместно как систему относительно $u_1,\ u_2$. Ее характеристический полином имеет вид

$$P(\lambda) = det(A^{11}\lambda^2 + 2A^{12}\lambda + A^{22}),$$

где

$$A^{11} = \begin{pmatrix} \omega m_3 & 0 \\ 0 & 0,5\omega m_4 \end{pmatrix},$$

$$A^{12} = \begin{pmatrix} 0 & \omega(\nu m_3 + 0,5m_4) \\ \omega(\nu m_3 + 0,5m_4) & 0 \end{pmatrix}, A^{22} = \begin{pmatrix} 0,5\omega m_4 & 0 \\ 0 & \omega m_3 \end{pmatrix}.$$

Уравнение $P(\lambda) = 0$ после подстановки m_3, m_4 через модуль Юнга E и коэффициент Пуассона ν запишется после некоторых упрощений как биквадратное уравнение

$$\lambda^4 + \frac{3\nu^2 - 1 + 10\nu}{2(\nu - 1)}\lambda^2 + 1 = 0.$$

Находим четыре корня биквадратного уравнения:

$$\lambda_k = \pm\frac{\sqrt{-(\nu-1)(3\nu^2 - 1 + 10\nu) \pm \sqrt{9\nu^4 + 78\nu^2 + 60\nu^2 - 15 + 12\nu)}}}{2(\nu - 1)}, \ (k = \overline{1,4}).$$

Исследование выражения под радикалом $(9\nu^4 + 78\nu^2 + 60\nu^2 - 15 + 12\nu)$ как функции от ν показало, что оно имеет отрицательный знак на интервале $[0; 0,38]$. Это означает, что корни λ_k – комплексно сопряженные на этом интервале. Рассматриваемая система (12), (13) имеет эллиптический тип. Заметим, что для многих материалов коэффициент Пуассона принимают равным от $0,25$ до $0,3$ [6],[7]. Следовательно, возможные значения коэффициентов Пуассона попадают в указанный интервал, где корни λ_k– комплексно сопряженные. Для построения численной схемы запишем оба уравнения в дивергентном виде. Предварительно введем следующие обозначения:

$$y_1 = \omega_1(x, y), \ y_2 = z(x, y), \ z_1 = (1 - y_1)m_3, \ z_2 = (1 - y_1)m_4/2. \tag{14}$$

Здесь y_1, y_2– известные функции координат, u_1, u_2– неизвестные функции. Заметим выполнение следующих соотношений для слагаемых, входящих в первое уравнение

$$(1 - y_1)m_3 u_{1,11} + m_3(-y_{1,1})u_{1,1} = (z_1 u_{1,1})_{,1},$$
$$(1 - y_1)m_3\nu u_{2,11} + m_3(-y_{1,1})\nu u_{2,1} = (\nu z_1 u_{2,2})_{,1},$$
$$\frac{(1 - y_1)}{2}m_4 u_{1,22} + \frac{1}{2}m_4(-y_{1,2})u_{1,2} = (z_2 u_{1,2})_{,2},$$
$$\frac{(1 - y_1)}{2}m_4 u_{2,12} + \frac{1}{2}m_4(-y_{1,2})u_{2,1} = (z_2 u_{2,1})_{,2}.$$

В итоге оно запишется

$$(z_1 u_{1,1})_{,1} + (\nu z_1 u_{2,2})_{,1} + (z_2 u_{1,2})_{,2} + (z_2 u_{2,1})_{,2} + F_1 = 0, \tag{15}$$
$$F_1 = -b_1 + m_3 y_{1,1} L^T + \sigma_1 y_1 (-\frac{y_2}{(1 + y_2^2)^2} y_{2,1} - \frac{{y_2}^2}{(1 + y_2^2)^2} y_{2,2}).$$

Используем соотношения для второго уравнения

$$(1 - y_1)m_3 u_{2,22} + m_3(-y_{1,1})u_{2,2} = (z_1 u_{2,2})_{,2},$$
$$(1 - y_1)m_3\nu u_{1,12} + m_3(-y_{1,2})\nu u_{1,1} = (\nu z_1 u_{1,1})_{,2},$$
$$\frac{(1 - y_1)}{2}m_4 u_{1,12} + \frac{1}{2}m_4(-y_{1,2})u_{1,2} = (z_2 u_{1,2})_{,1},$$
$$\frac{(1 - y_1)}{2}m_4 u_{2,11} + \frac{1}{2}m_4(-y_{1,2})u_{2,1} = (z_2 u_{2,1})_{,1}.$$

В итоге второе уравнение запишется

$$(z_1 u_{2,2})_{,2} + (\nu z_1 u_{1,1})_{,2} + (z_2 u_{1,2})_{,1} + (z_2 u_{2,1})_{,1} + F_2 = 0, \tag{16}$$
$$F_2 = -b_2 + m_3 y_{1,2} L^T + \sigma_1 y_1 \Big(\frac{1}{(1 + y_2^2)^2} y_{2,1} + \frac{y_2}{(1 + y_2^2)^2} y_{2,2}\Big).$$

4. Краевая задача для прямоугольной пластинки

Пусть граничный контур $\Gamma-$ граница G, где $G-$ прямоугольная пластинка со сторонами, параллельными координатным осям $G = \{(x_1, x_2)|, 0 \le x_i \le d_i,\ i = 1, 2\}$. В этом случае определенный выше угол $\beta = \pi/2$. Кинематические условия (7) не меняются. Статические условия (6) после замены компонент деформации на перемещения по формулам Коши примут вид

$$u_{2,2} + \nu u_{1,1} = \frac{p_n(s) - \dfrac{\sigma_1\omega_1 z^2}{1+z^2}}{\omega m_3} + L^T, \qquad (17)$$
$$u_{1,2} + \nu u_{2,1} = \frac{2p_\tau(s) + \dfrac{\sigma_1\omega_1 z}{2(1+z^2)}}{-\omega}.$$

При построении разностной схемы для системы (15),(16) поставим задачу отыскания вектора $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$ с граничными условиями на контуре в общем виде

$$\begin{aligned} z_1u_{1,1} + z_1\nu u_{2,2} &= -f_1(x_1, 0), \\ z_2u_{1,2} + z_2u_{2,1} &= -f_1(0, x_2), \\ z_2u_{1,1} + z_1\nu u_{2,2} &= -f_2(x_1, d_1), \\ z_2u_{1,2} + z_2u_{2,1} &= -f_2(d_2, x_2). \end{aligned} \qquad (18)$$

5. Свойства дифференциального оператора поставленной задачи

Покажем, что оператор является симметричным и положительно определенным. В качестве области определения оператора L вводится линеал функций, являющихся непрерывными вместе со своими первыми и вторыми производными в замкнутой области G и удовлетворяющих граничным условиям (18).

Выпишем функционал $I(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (L\mathbf{u}, \mathbf{v}) + (\mathbf{F}, \mathbf{v})$

$$I(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \iint\limits_G \Big[\frac{\partial}{\partial x_1}(z_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1})v_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}(z_1\nu\frac{\partial u_2}{\partial x_2})v_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}(z_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2})v_1 + \frac{\partial}{\partial x_2}(z_2\frac{\partial u_2}{\partial x_1})v_1 + F_1v_1\Big]dx_1dx_2 +$$

$$+\iint\limits_G \Big[\frac{\partial}{\partial x_2}(z_1\frac{\partial u_2}{\partial x_2})v_2 + \frac{\partial}{\partial x_2}(z_1\nu\frac{\partial u_1}{\partial x_1})v_2 + \frac{\partial}{\partial x_1}(z_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2})v_2 + \frac{\partial}{\partial x_1}(z_2\frac{\partial u_2}{\partial x_1})v_2 + F_2v_2\Big]dx_1dx_2,$$

где $\mathbf{u} = (u_1, u_2)$, $\mathbf{v} = (v_1, v_2)$, $\mathbf{F} = (F_1, F_2)$.

Используя тождества, возникающие при нахождении интеграла по частям, например,

$$\frac{\partial}{\partial x_1}(z_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1})v_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}(z_1v_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}) + z_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_1},$$

запишем функционал в виде

$$I(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \iint\limits_G \Big[z_1\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + z_1\nu\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + z_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + z_2\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + z_1\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_2} +$$

$$+z_1\nu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_2}+z_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+z_2\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+F_1v_1+F_2v_2\Big]dx_1dx_2+ \tag{19}$$
$$+\int_0^{d_1}\Big[f_1(x_1,0)v_1+f_1(x_1,d_2)v_1+f_2(x_1,0)v_2+f_2(x_1,d_2)v_2\Big]dx_1+$$
$$+\int_0^{d_2}\Big[f_1(0,x_2)u_1+f_1(d_1,x_2)u_1+f_2(0,x_2)u_2+f_2(d_1,x_2)u_2\Big]dx_2.$$

Из формул (19) легко видеть, что при замене $\mathbf{u}$ и $\mathbf{v}$ $I(\mathbf{u},\mathbf{v})=I(\mathbf{v},\mathbf{u})$, т. е. функционал симметричен.

Исследуем свойство положительной определенности оператора L, выпишем $(L\mathbf{u},\mathbf{u})$:

$$L(\mathbf{u},\mathbf{u})=\int\int_G\Big[z_1(\frac{\partial u_1}{\partial x_1})^2+z_1(\frac{\partial u_2}{\partial x_2})^2+z_2(\frac{\partial u_1}{\partial x_2})^2+z_2(\frac{\partial u_2}{\partial x_1})^2+z_2\frac{\partial u_2}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}+$$
$$+z_2\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\frac{\partial u_2}{\partial x_1}+z_1\nu\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+z_1\nu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_1}{\partial x_2}\Big]dx_1dx_2=$$
$$=\int\int_G\Big[z_1(\frac{\partial u_1}{\partial x_1})^2+z_1(\frac{\partial u_2}{\partial x_2})^2+2z_1\nu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}+z_2(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2})^2\Big]dx_1dx_2.$$

Покажем, что $(L\mathbf{u},\mathbf{u})\geq 0$ для любого $\mathbf{u}$, принадлежащего заданному линеалу функций. Действительно,

$$z_2(\frac{\partial u_1}{\partial x_1}+\frac{\partial u_2}{\partial x_2})^2\geq 0,$$

поскольку $z_2>0$, что следует из соотношений (14) и ограничений на значения интенсивностей армирования, аналогично $z_1>0$. Выражение

$$z_1(\frac{\partial u_1}{\partial x_1})^2+z_1(\frac{\partial u_2}{\partial x_2})^2+2z_1\nu\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\geq 0,$$

если $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}>0$. В противном случае, если $\dfrac{\partial u_1}{\partial x_1}\dfrac{\partial u_2}{\partial x_2}<0$, тогда $z_1\Big((\frac{\partial u_1}{\partial x_1})^2+(\frac{\partial u_2}{\partial x_2})^2-$

$$-2\nu\big|\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\big|\Big)\geq z_1\Big((\frac{\partial u_1}{\partial x_1})^2+(\frac{\partial u_2}{\partial x_2})^2-2\Big|\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\Big|\Big)=z_1\Big(\Big|\frac{\partial u_1}{\partial x_1}\Big|-\Big|\frac{\partial u_2}{\partial x_2}\Big|\Big)^2\geq 0.$$

Оценка следует из того, что коэффициент Пуассона $0<\nu<1$.

Установили, что дифференциальный оператор поставленной плоской задачи упругости для среды, армированной одним семейством волокон, является симметричным и положительно определенным. Следовательно, применим метод Ритца.

6. Построение разностной схемы

Решение задачи (15), (16) с граничными условиями (18) в силу дивергентной формы записи системы, $L\mathbf{u}+\mathbf{F}=0$, где $L-$ дифференциальный оператор системы, $\mathbf{F}-$ правая часть, должно доставлять минимум следующему функционалу

$$I(\mathbf{u},\mathbf{u})=(L\mathbf{u},\mathbf{u})+(\mathbf{F},\mathbf{u}),$$

где $\mathbf{u}=(u_1,u_2)$, $\mathbf{F}=(F_1,F_2)$. Выпишем этот функционал. Согласно методу Ритца [8] аппроксимируем пространство $\mathbf{W}_2^1(G)$, в котором ищутся решения, конечномерным подпространством $\mathbf{V}$ и назовем приближенным решением задачи вектор $\overline{\mathbf{u}}=(v_1,v_2)$,

$v_i \in \mathbf{V}$, который минимизирует функционал $I(\mathbf{u},\mathbf{u})$ на пространстве $\mathbf{V}$. Этот функционал можно преобразовать так:

$$I(\mathbf{u},\mathbf{u}) = W(\mathbf{u}) + \int_0^{d_1}\int_0^{d_2}(F_1u_1 + F_2u_1)dx_1dx_2 +$$
$$+\int_0^{d_1}[f_1(x_1,0)u_1 + f_1(x_1,d_2)u_1 + f_2(x_1,0)u_2 + f_2(x_1,d_2)u_2]dx_1 +$$
$$+\int_0^{d_2}[f_1(0,x_2)u_1 + f_1(d_1,x_2)u_1 + f_2(0,x_2)u_2 + f_2(d_1,x_2)u_2]dx_2, \tag{20}$$

где $W(\mathbf{u})-$ энергия упругой деформации преобразуется к виду

$$W(\mathbf{u}) = \frac{1}{2}\int\int_G [z_1((u_{1,1})^2 + (u_{2,2})^2) + z_2((u_{1,2})^2 + (u_{2,1})^2) + \tag{21}$$
$$+2z_1\nu u_{1,1}u_{2,2} + 2z_2u_{2,1}u_{1,2}]dx_1dx_2.$$

Введем в области G прямоугольную равномерную сетку. Разобьем область на прямоугольные ячейки со сторонами h_1, h_2 и вершинами в узлах сетки. Каждую ячейку в свою очередь разобьем прямой, проходящей через ее противоположные вершины, на два треугольника. Обозначим левые верхние треугольники через $\Delta^+[i]$, а правые нижние – через $\Delta^-[i]$. В качестве подпространства $\mathbf{V}$ пространства $\mathbf{W}_2^1(G)$ возьмем пространство непрерывных в области и линейных над каждым треугольником $\Delta^{\pm}[i]$ функций.

Приближенное решение задачи (15),(16) будем искать в виде $\overline{\mathbf{u}} = (v_1, v_2)$:

$$v_i = \sum_{j_1=0}^{N_1}\sum_{j_2=0}^{N_2} y_{ij_1j_2}\eta_{j_1j_2}, \tag{22}$$

где $\eta_{j_1j_2}-$ базис пространства $\mathbf{V}$. В качестве базиса в $\mathbf{V}$ можно взять совокупность непрерывных в G, линейных над каждым треугольником $\Delta^{\pm}[i]$ функций, каждая из которых отлична от нуля лишь в одном узле сетки. При выбранном базисе коэффициенты $y_{ij_1j_2}$ в (22) имеют значение приближенного решения в узлах сетки.

Дифференцируя $I(\overline{\mathbf{u}},\overline{\mathbf{u}})$ по переменным $y_{ij_1j_2}$ и приравнивая первые производные нулю, получим следующую систему алгебраических уравнений для определения значений решения в узлах сетки $y_{ij_1j_2}$:

$$(z_1v_{1x_1})_{\overline{x_1}} + \frac{1}{2}((z_1\nu v_{2\overline{x_2}})_{\overline{x_1}} + (z_1\nu v_{2x_2})_{x_1}) +$$
$$+(z_2v_{1x_2})_{\overline{x_2}} + \frac{1}{2}((z_2v_{2\overline{x_1}})_{\overline{x_2}} + (z_2v_{2x_1})_{x_2}) = \frac{-1}{h_1h_2}\Phi_1(x_1,x_2), \tag{23}$$
$$(z_1v_{2x_2})_{\overline{x_2}} + \frac{1}{2}((z_1\nu v_{1\overline{x_1}})_{x_2} + (z_1\nu v_{1x_1})_{\overline{x_2}}) +$$
$$+\frac{1}{2}((z_2v_{1\overline{x_2}})_{x_1} + (z_2v_{1x_2})_{\overline{x_1}}) + (z_2v_{2x_1})_{\overline{x_1}} = \frac{-1}{h_1h_2}\Phi_2(x_1,x_2).$$

В (23) $\Phi_1(x_1,x_2), \Phi_2(x_1,x_2)-$ сеточные выражения, содержащие значения правых частей; в уравнениях введены сеточные операторы дифференцирования по следующему правилу:

$$u_{\overline{x_1}} = \frac{(u_i - u_{i-1})}{h_1},\ u_{x_1} = \frac{(u_{i+1} - u_i)}{h_1}, \tag{24}$$
$$u_{\overline{x_2}} = \frac{(u_i - u_{i-1})}{h_2},\ u_{x_2} = \frac{(u_{i+1} - u_i)}{h_2}.$$

Заметим, что для достаточно гладких правых частей погрешности аппроксимаций имеют вид $\psi_i = o(h_1^2 + h_2^2)$ [8, 9].

В работе построена численная схема решения плоской задачи в перемещениях для композита, армированного одним семейством волокон, когда угол армирования введен как заданная функция координат. Схема учитывает все особенности этой задачи.

Список литературы

[1] Немировский Ю.В., Кургузов В.Д. Прочность и жесткость стеновых железобетонных панелей со сложными структурами армирования // Известия вузов. Строительство. 2003. № 2. С. 4-11.

[2] Немировский Ю.В., Федорова Н.А. Моделирование деформирования плоских авиационных конструкций, армированных семействами криволинейных волокон // Вестник Сиб. гос. аэрокосмич. ун-та. Вып. 6(13). Красноярск, 2006. С. 38-44.

[3] Федорова Н.А. Решение плоской задачи упругой среды, армированной тремя семействами волокон // Вычисл. технологии. 2005. Т. 10. С. 90-100.

[4] Немировский Ю.В., Янковский А.П. Рациональное проектирование армированных конструкций. Новосибирск: Наука, 2002. 487 с.

[5] Бицадзе А.В. Некоторые классы уравнений в частных производных. М: Наука,1981. 448 с.

[6] Тимошенко С.П., Гудьер Дж. Теория упругости. М: Наука, 1979. 550 с.

[7] Композиционные материалы. Справочник / В.В. Васильев,В.Д. Протасов и др. М: Машиностроение, 1990. 512 с.

[8] Самарский А.А. Теория разностных схем. М: Наука, 1989. 614 с.

[9] Самарский А.А., Николаев Е.С. Методы решения сеточных уравнений. М: Наука, 1989. 425 с.

Integro-Interpolational Method of Plane Problem Solving for Reinforced by Family of Curvelinear Fibers Composite

Natalia A. Feodorova
Siberian Federal University
79 Svobodny, Krasnoyarsk, 660041 Russia

It is constructed the permitting system of equations of plane problem for environment reinforced by the family of curved fibers. The problem articulated in the movement for family of equal strained fibers when the angle of reinforce is the known function of coordinates. It is displayed that the system can be written in divergence form on the movement. Based on the Ritz method the numerical pattern adapted to the singularities of the task is received.

Key words: composite, curvelinear fibers, reinforcement.