УДК 681.5.015

Дисперсионные характеристики статических моделей стохастических объектов

А.И. Рубан*
Сибирский федеральный университет,
660041 Россия, Красноярск, Свободный, 79[1]

Получена 15.05.2008, окончательный вариант 15.06.2008, принята к печати 10.03.2009

Построены дисперсионные характеристики, определяющие качество статических параметрических моделей стохастических объектов, и найдены их оценки при предположении, что условная дисперсия выхода постоянна. Параметрические модели, нелинейные по каналу "вход-выход", но линейные относительно оптимизируемых параметров. Показано, что непараметрическая оценка регрессии близка к объективно существующей идеальной модели и по оценкам дисперсионных характеристик можно следить за изменением качества субоптимальных параметрических моделей при подборе их структуры. На тестовых численных примерах произведено сравнение качества непараметрической и параметрической моделей при различном уровне помех.

Ключевые слова: дисперсионная идентификация, статическая параметрическая модель, стохастический объект, непараметрическая оценка регрессии.

Введение

Рассматриваем объект, который имеет один вход X и один выход Y. X и Y являются непрерывными случайными величинами. Особое место среди идеализированных характеристик (моделей) стохастического объекта занимает регрессия

$$M\{Y|x\} \equiv= \eta(x) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} yf(y|x)dy, \tag{1}$$

которая представляет собой среднюю зависимость между выходом и входом объекта [1, 2].

Регрессия $\eta(X)$ удовлетворяет критерию минимума среднего квадратического отклонения выходов объекта и модели

$$\eta(X) = \arg\min_{\bar{\eta}(X)} M_{Y,X}\{(Y - \bar{\eta}(X))^2\}. \tag{2}$$

Минимальное значение оптимизируемого в (2) квадратичного показателя

$$D_1 = M_{Y,X}\{(Y - \eta(X))^2\} \tag{3}$$

названо в [1, 2] **средней условной дисперсией.** Там же введена **средняя дисперсия регрессии**

$$D_2 = M_X\{(\eta(X) - m_Y)^2\} \tag{4}$$

* Corresponding author E-mail address: ai-rouban@mail.ru; rouban@mail.ru
1 © Siberian Federal University. All rights reserved

и приведена теорема о разложении дисперсии выхода объекта $D_Y = M_Y\{(Y - m_Y)^2\}$ на сумму дисперсий D_1 и D_2 :

$$D_Y = D_1 + D_2 \equiv M_{Y,X}\{(Y - \eta(X))^2\} + M_X\{(\eta(X) - m_Y)^2\}. \tag{5}$$

В дальнейшем для упрощения записи формул убираем индексы операторов математического ожидания $M\{\cdot\}$, где были указаны случайные величины, по которым ведется усреднение.

На основе средней дисперсии регрессии D_2 строится [1, 2] безразмерная характеристика – **дисперсионное отношение**

$$\eta_{Y|X} = \sqrt{D_2/D_Y}, \tag{6}$$

которое принадлежит интервалу $[0; 1]$. Показано также, что дисперсионное отношение равно коэффициенту корреляции между выходом объекта и выходом модели в виде регрессии:

$$\eta_{Y|X} \equiv R_{Y|\eta(X)} = \frac{M\{[Y - m_Y][\eta(X) - m_{\eta(X)}]\}}{\sigma_Y \sigma_{\eta(X)}}, \tag{7}$$

где m_Y, $m_{\eta(X)}$ — математические ожидания, причём $m_{\eta(X)} = m_Y$; $\sigma_Y = \sqrt{D_Y}$, $\sigma_{\eta(X)} = \sqrt{D_2}$ — средние квадратические отклонения. Кроме того, квадрат нормированного коэффициента корреляции $r_{YX} = \frac{M\{(Y-m_Y)(X-m_X)\}}{\sigma_Y \sigma_X}$ между Y и X не превосходит квадрата дисперсионного отношения

$$r^2_{XY} \leq \eta^2_{Y|X}. \tag{8}$$

Дисперсионное отношение $\eta_{Y|X}$ достигает предельных значений в следующих случаях.

$\eta_{Y|X} = 0$, если выход объекта Y не зависит от входа X. Обратное утверждение верно не всегда.

$\eta_{Y|X} = 1$, если Y и X связаны жесткой зависимостью в виде функции $Y = \Im(X)$. Тогда $M\{Y|X\} = \Im(X)$. В этом случае другие воздействия (кроме X) не влияют на выход Y и $D_1 = 0$ (т. е. $D_2 = D_Y$).

Неравенство (8) позволило [1, 2] построить характеристику

$$\gamma_{Y|X} = \sqrt{\frac{\eta^2_{Y|X} - r^2_{YX}}{\eta^2_{Y|X}}} = \sqrt{1 - \frac{r^2_{YX}}{\eta^2_{Y|X}}} \tag{9}$$

которая названа **относительной степенью нелинейности** по каналу вход X выход Y и находится в интервале $[0; 1]$. По её величине можно судить о степени линейности (или нелинейности) истинных усреднённых характеристик объекта или, как говорят, "о линейности (или нелинейности) объекта". При $\gamma_{Y|X} = 0$ объект линейный, при $\gamma_{Y|X} = 1$ — нелинейный.

В работах [3, 4] на основе использования непараметрической оценки Розенблатта -— Парзена для плотностей распределения вероятностей [5, 6] построены сравнительно простые и эффективные оценки вышеуказанных дисперсионных характеристик.

Постановка задачи

При разработке моделей объектов стремятся построить хорошие — субоптимальные – параметрические нелинейные модели и количественно оценить их качество. При этом все вычисления должны быть выполнены на основе одной реализации синхронных измерений

входа и выхода объекта. Вычислительная схема количественного оценивания теоретических характеристик качества линейной (по каналу "вход-выход") параметрической модели на основе экспериментальных данных построена в [3, 4, 6]. В основе решения лежит использование состоятельной непараметрической оценки регрессии. В этой оценке важно "хорошо" настроить (для каждой конкретной реализации измерений входа и выхода объекта) так называемый коэффициент размытости. После его получения мы располагаем хорошей по своей сути (состоятельной "в статистическом смысле слова") моделью. Её в дальнейшем можно применять (и это часто с успехом делают) при решении достаточно сложных проблем, например, при синтезе эффективных алгоритмов: классификации в распознавании образов, адаптивного оптимального управления, глобальной оптимизации.

Наряду с несомненным достоинством непараметрической оценки регрессии (за счёт универсализма и состоятельности) она имеет недостатки. Первый из них состоит в том, что при расчёте её (даже для каждого фиксированного $X = x$ значения входа) приходится непрерывно "перелопачивать" выборку (экспериментальные данные). Во-вторых, оценка представляет собой "универсальный вычислитель", который позволяет практически для любого стохастического объекта на основе "синхронных" измерений его входа и выхода вычислять однозначную высокого качества статическую модель без привлечения априорной информации. Непараметрической модели в таком специфичном виде нельзя придать физический смысл и очень трудно в неё включить априорную информацию о ранее полученных параметрических моделях. Её трудно адаптировать к изменяющимся условиям, и она не обладает прогнозирующим свойством.

Человечество на протяжении всей своей истории с успехом применяет субоптимальные параметрические модели и не спешит заменять их другими моделями, да и острой необходимости в этом не существует. Параметрические модели удобны при адаптации к изменяющимся условиям и при прогнозировании свойств объектов. По этой причине возникает проблема количественного оценивания качества предлагаемых исследователем параметрических нелинейных моделей. В представленной работе предложен путь решения этой проблемы. Общая схема та же, что и при оценивании качества линейных (по каналу вход-выход объекта) параметрических моделей [3, 4, 6].

В предлагаемой работе построены теоретические статистические характеристики (дисперсионные характеристики) и вычислительные алгоритмы их оценивания (на основе измерений входа и выхода объекта). На численных примерах продемонстрирована правильность предложенного способа оценивания качества получаемых моделей.

Дисперсионные характеристики параметрических моделей

Построим дисперсионные характеристики нелинейных параметрических статических моделей стохастических объектов. Берём за основу широко распространённую параметрическую **нелинейную** (по каналу вход–выход) **модель** объекта с **линейными параметрами**

$$\widetilde{Y} = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \varphi_j(X), \tag{10}$$

параметры $\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_m$ которой найдены из критерия минимума среднего квадратичного отклонения выхода объекта Y и модели $\bar{\alpha}_0 + \sum\limits_{j=1}^{m} \bar{\alpha}_j \varphi_j(X)$

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \ldots,\ \alpha_m = \arg \min_{\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_m} M\{[Y - \bar{\alpha}_0 - \sum_{j=1}^{m} \bar{\alpha}_j \varphi_j(X)]^2\}. \tag{11}$$

Модель (10) субоптимальная, т. е. она оптимальная (в смысле квадратичного критерия (11)) по параметрам в классе моделей выбранной структуры.

Как и для регрессии справедлива **теорема о разложении дисперсии выхода объекта** на две дисперсионные компоненты:

$$D_Y = M\{(Y - \widetilde{Y})^2\} + M\{(\widetilde{Y} - m_Y)^2\} \equiv D_{1,\text{парам}} + D_{2,\text{парам}}. \tag{12}$$

Средняя дисперсия $D_{2,\text{парам}} = M\{(\widetilde{Y} - m_Y)^2\}$ характеризует ту часть дисперсии D_Y выхода объекта Y, которая вызвана влиянием входной переменной X, и это влияние описано с помощью субоптимальной модели (10).

Если объект полностью описан моделью (10) (т. е. нет дополнительных воздействий на объект и нет дополнительной стохастичности внутри объекта; в этом случае $Y = \widetilde{Y}$), то $D_{1,\text{парам}} = 0$ и $D_{2,\text{парам}} = D_Y$.

Если объект никак не описан моделью (10), то $D_{1,\text{парам}} = D_Y$ и одновременно $D_{2,\text{парам}} = 0$.

По аналогии с дисперсионным отношением (6), в котором использована оптимальная модель в виде регрессии $\eta(X)$ введём дисперсионное отношение, основанное на применении субоптимальной модели $\widetilde{Y}$ (10),

$$\eta_{Y|X,\text{парам}} = \sqrt{\frac{D_2, \text{парам}}{D\{Y\}}}. \tag{13}$$

Оно также лежит в интервале $[0; 1]$ и равно нормированному коэффициенту корреляции $R_{Y|\widetilde{Y}}$ между выходами объекта и модели (10) ($R_{Y|\widetilde{Y}}$ называют часто множественным коэффициентом корреляции):

$$\eta_{Y|X,\text{парам}} \equiv R_{Y|\widetilde{Y}} = \frac{M\{[Y - m_Y][\widetilde{Y} - m_Y]\}}{\sigma_Y \sigma_{\widetilde{Y}}}, \tag{14}$$

где $M\{\widetilde{Y}\} = m_Y,\ \sigma_{\widetilde{Y}} = \sqrt{M_X\{[\widetilde{Y} - m_Y]^2\}}$.

Для дисперсионных отношений (6), (13) справедливо неравенство:

$$\eta_{Y|X,\text{парам}} \leq \eta_{Y|X}. \tag{15}$$

Об улучшении качества субоптимальной параметрической модели $\widetilde{Y}$ можно судить по приближению $\eta_{Y|X,\text{парам}}$ к $\eta_{Y|X}$, что эквивалентно приближению $D_{2,\text{парам}}$ к D_2.

Введём коэффициент

$$\lambda_{\widetilde{Y} \Leftrightarrow \eta} = \frac{\eta_{Y|X,\text{парам}}}{\eta_{Y|X}} \equiv \sqrt{\frac{D_{2,\text{парам}}}{D_2}} \equiv \sqrt{\frac{M\{[\widetilde{Y} - m_Y]^2\}}{M\{(\eta(X) - m_Y)^2\}}}, \tag{16}$$

который характеризует **степень близости параметрической модели** $\widetilde{Y} = \alpha_0 + \sum\limits_{j=1}^{m} \alpha_j \varphi_j(X)$ **и регрессии** $\eta(X)$. Заметим, что $\lambda_{\widetilde{Y} \Leftrightarrow \eta}$ представляет собой усреднённую дисперсионную характеристику.

Если коэффициент $\lambda_{\widetilde{Y} \Leftrightarrow \eta}$ равен единице, то обе модели в среднем одинаково хорошо описывают объект, т. е. субоптимальная параметрическая модель (10) достигла своих предельных свойств — она лучшая.

Если коэффициент $\lambda_{\widetilde{Y} \Leftrightarrow \eta}$ меньше единицы, то параметрическая модель хуже регрессии и есть необходимость улучшать параметрическую модель за счёт замены одних базисных функций $\varphi_j(X)$ другими или добавления новых базисных функций.

Если даже $\lambda_{\widetilde{Y} \Leftrightarrow \eta} = 1$, то это не означает, что объект хорошо описан с помощью построенной модели $\widetilde{Y}$. Можно лишь утверждать, что в среднем качество описания объекта на основе субоптимальной параметрической модели $\widetilde{Y}$ и на основе регрессии одинаковое. Если же при этом одинаковые дисперсионные отношения $\eta_{Y|X,\text{парам}} = \eta_{Y|X}$ меньше единицы, то для получения лучшей модели необходимо кроме выбранных входов использовать дополнительные входные воздействия объекта и заново строить модель.

Используем также относительный коэффициент корреляции между выбранной параметрической моделью и регрессией:

$$\Re_{\widetilde{Y} \Leftrightarrow \eta} = \frac{M\{[\widetilde{Y} - m_Y][\eta(X) - m_Y]\}}{\sqrt{M\{[\widetilde{Y} - m_Y]^2\}}\sqrt{M\{[\eta(X) - m_Y]^2\}}} \ . \tag{17}$$

Модуль этого коэффициента корреляции $|\Re_{\widetilde{Y} \Leftrightarrow \eta}|$ по своей сути эквивалентен коэффициенту $\lambda_{\widetilde{Y} \Leftrightarrow \eta}$.

Непараметрическая оценка регрессии

Исходной информацией служит независимая выборка: (x_i, y_i), $i = \overline{1, n}$. Считаем, что условная дисперсия выхода объекта является постоянной (не зависит от входа): $D\{Y|x\} \equiv \equiv M_Y\{[Y - \eta(x)]^2 | X = x\} = \text{const}$. Эта гипотеза похожа на используемое в методе наименьших квадратов предположение, что измерения выхода объекта "равноточные".

Состоятельная оценка регрессии, построенная на основе использования непараметрической оценки условной плотности распределения вероятности [5, 6],

$$\hat{M}\{Y|x\} \equiv \eta_n(x) = \sum_{i=1}^{n} K_N\left(\frac{x - x_i}{h}\right) y_i, \quad K_N\left(\frac{x - x_i}{h}\right) = \frac{K\left(\frac{x - x_i}{h}\right)}{\sum\limits_{j=1}^{n} K\left(\frac{x - x_j}{h}\right)} \tag{18}$$

относится к классу универсальных оценок. Здесь $K(\cdot)$ — ядро, h — коэффициент размытости. Ядра лучше брать усечёнными (в целях существенного сокращения объема вычислений) и достаточной степени гладкости, например параболическим:

$$K(z) = \begin{cases} 0.75(1 - z^2), & |z| \le 1, \\ 0, & 1 \le |z|. \end{cases}$$

Оценка (18) представляет собой **выпуклую** комбинацию измерений y_i выхода объекта. Веса $K_N(\cdot)$ в этой выпуклой комбинации определяются входом объекта. Чем ближе измерение x_i к значению x, для которого рассчитывается оценка $\eta_n(x)$, тем значение нормированного колоколообразного ядра $K_N(\cdot)$ больше.

Коэффициент размытости h вычисляется из решения экстремальной задачи, в которой квадратичный показатель соответствия выхода объекта и выхода модели на системе экспериментальных точек построен либо "методом скользящего экзамена":

$$I_1 = \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{\eta}_n(x_i))^2 = \min_h, \quad \bar{\eta}_n(x_i) = \sum_{j=1, j\neq i}^{n} K_N\left(\frac{x_i - x_j}{h}\right) y_j, \tag{19}$$

либо прямым разбиением выборки на две части (по одной строится оценка регрессии, а по другой — минимизируемый показатель):

$$I_2 = \sum_{i\in M_{n_1}} (y_i - \eta_{n_2}(x_i))^2 = \min_h, \quad \eta_{n_2}(x) = \sum_{j\in M_{n_2}} K_N\left(\frac{x - x_j}{h}\right) y_j. \tag{20}$$

Здесь номера первой части выборки образуют множество M_{n_1} мощности n_1 и аналогично номера второй части выборки образуют множество M_{n_2} мощности n_2. Примером множеств M_{n_1} и M_{n_2} служат нечётные и чётные номера измерений в упорядоченной по x_i выборке: $(x_i, y_i),\ i = \overline{1, n}$.

При равномерных отсчётах по оси x, т. е. при $x_{i+1} - x_i = \Delta,\ i = \overline{1, n-1}$, целесообразно перейти от размерного коэффициента размытости h ядра к безразмерному $\beta = \Delta/h$, лежащему в интервале $[0; 1]$:

$$K_N\left(\frac{x - x_j}{h}\right) = K_N\left(\frac{\Delta}{h}\frac{x - x_j}{\Delta}\right) = K_N\left(\beta\frac{x - x_j}{\Delta}\right).$$

При построении непараметрической оценки регрессии теперь необходимо настраивать коэффициент β по вышеуказанным критериям.

Оценивание дисперсионных характеристик

Предположение, что условная дисперсия $D\{Y|x\} = \text{const}$, приводит к тому, что при расчёте математических ожиданий $M\{\psi(X, Y)\}$ на основе экспериментальных данных $(x_i, y_i),\ i = \overline{1, n}$ надо перейти к обычному оператору "среднего арифметического":

$$M\{\psi(X, Y)\} \Rightarrow \hat{M}\{\psi(X, Y)\} \equiv \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\psi(x_i, y_i).$$

Оценка является несмещённой, состоятельной, асимптотически нормально распределённой (при сравнительно слабых ограничениях для усредняемых переменных).

Вычисляем оценку дисперсионного отношения (6):

$$\hat{\eta}_{Y|X} = \sqrt{\frac{\hat{D}_2}{\hat{D}_Y}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\eta_n(x_i) - \hat{m}_Y)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \hat{m}_Y)^2}}, \tag{21}$$

$$\hat{D}_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(\eta_n(x_i) - \hat{m}_Y)^2, \quad \hat{m}_Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i, \quad \hat{D}_Y = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{m}_Y)^2.$$

Оценка дисперсионного отношения (13), основанного на применении оценки субоптимальной модели

$$\hat{y}(x) = \hat{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{m} \hat{\alpha}_j \varphi_j(x) \quad (\text{т. е.} \quad \hat{y}_i \equiv \hat{y}(x_i) = \hat{\alpha}_0 + \sum_{j=1}^{m} \hat{\alpha}_j \varphi_j(x_i),\ i = \overline{1,n}), \tag{22}$$

имеет вид:

$$\hat{\eta}_{Y|X,\text{парам}} = \sqrt{\frac{\hat{D}_{2,\text{парам}}}{\hat{D}_Y}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \hat{m}_Y)^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}(y_i - \hat{m}_Y)^2}}, \tag{23}$$

где оптимальные параметры $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_m$ которой найдены из **критерия наименьших квадратов [7]:**

$$\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_m = \arg \min_{\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_m} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [y_i - \bar{\alpha}_0 - \sum_{j=1}^{m} \bar{\alpha}_j \varphi_j(x_i)]^2, \tag{24}$$

т. е. параметры удовлетворяют системе линейных уравнений

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [y_i - \hat{\alpha}_0 - \sum_{j=1}^{m} \hat{\alpha}_j \varphi_j(x_i)] \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} [y_i - \hat{y}_i] = 0,$$

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi_l(x_i)[y_i - \hat{\alpha}_0 - \sum_{j=1}^{m} \hat{\alpha}_j \varphi_j(x_i)] \equiv \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \varphi_l(x_i)[y_i - \hat{y}_i] = 0, \quad l = \overline{1,m}. \tag{25}$$

$\hat{y}(x)$ является оценкой параметрической модели (10), а $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \ldots, \hat{\alpha}_m$ — это оценки соответствующих параметров этой модели.

Теорема (12) (о разложении дисперсии выхода объекта на две дисперсионные компоненты) справедлива и для оценок соответствующих дисперсий:

$$\hat{D}_Y = \hat{D}_{1,\text{парам}} + \hat{D}_{2,\text{парам}}. \tag{26}$$

Оценки $\hat{D}_Y$, $\hat{D}_{2,\text{парам}}$ приведены в (21), а $\hat{D}_{1,\text{парам}} = \frac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} [y_i - \hat{y}_i]^2$. При доказательстве используются условия оптимальности параметров (25).

Оценка коэффициента (16)

$$\hat{\lambda}_{\widetilde{Y} \Leftrightarrow \eta} = \frac{\hat{\eta}_{Y|X,\text{парам}}}{\hat{\eta}_{Y|X}} = \sqrt{\frac{\hat{D}_{2,\text{парам}}}{\hat{D}_2}} = \sqrt{\frac{\sum\limits_{i=1}^{n}[\hat{y}_i - \hat{m}_Y]^2}{\sum\limits_{i=1}^{n}[\eta_n(x_i) - \hat{m}_Y]^2}} \tag{27}$$

характеризует степень близости выходов субоптимальной параметрической модели (22) и оптимальной непараметрической модели —- оценки регрессии $\hat{M}\{Y|x_i\} \equiv \eta_n(x_i),\ i = \overline{1,n}$.

Оценка относительного коэффициента корреляции (17)

$$\hat{\Re}_{\widetilde{Y} \Leftrightarrow \eta} = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \hat{m}_Y)(\eta_n(x_i) - \hat{m}_Y)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(\hat{y}_i - \hat{m}_Y)^2}\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}(\eta_n(x_i) - \hat{m}_Y)^2}} \tag{28}$$

также представляет собой коэффициент взаимосвязи между субоптимальной параметрической моделью (22) и непараметрической оценкой регрессии.

Процесс обработки информации при сравнении качества непараметрической и параметрической моделей представлен на рис. 1.

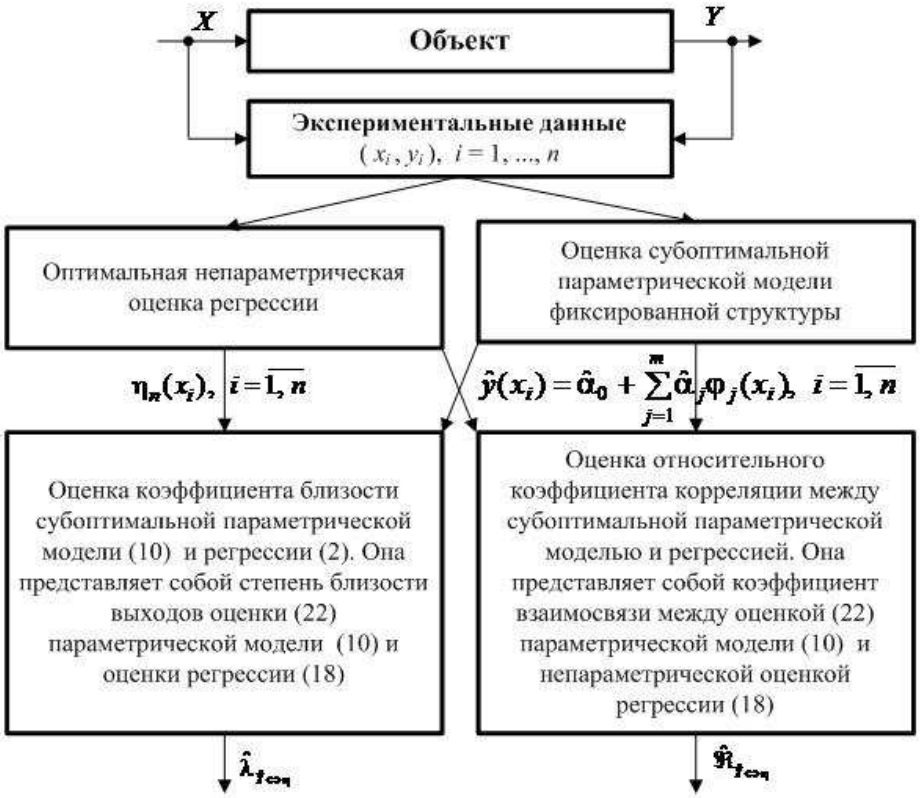

Рис. 1. Схема расчета характеристик близости непараметрической и параметрической статистических моделей стохастических объектов

Пример

В выборке $(x_i, y_i),\ i = \overline{1, 100}$, входа и выхода объекта значения входа x_i берутся последовательно из диапазона $[0; 10]$ на равных друг от друга интервалах Δ. Каждое значение выхода y_i равно сумме значений выбранной сигнальной части $\phi(x_i)$ и помехи:

$$y_i = \phi(x_i) + \sigma\xi_i,\ \phi(x_i) = |x_i - 5| + \cos x_i + 3\sin 2x_i - |x_i - 2|. \tag{29}$$

Здесь σ — среднеквадратичное уклонение аддитивной помехи, ρ — отношение "шум-сигнал", ξ_i — значение генератора нормально распределённой помехи с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией. Величина ρ равна отношению интервала изменения помехи к интервалу a изменения сигнальной части выхода имитируемого объекта. При нормально распределённой помехе интервал изменения её обычно берётся равным 6σ. В этом случае $\rho = \frac{6\sigma}{a}$, и тогда среднеквадратичное уклонение помехи $\sigma = \frac{\rho a}{6}$ определяется величиной отношения "шум-сигнал" ρ, которая варьируется от 0.01 до 2 (что

соответствует интервалу от 1 до 200%) на приводимых ниже графиках для дисперсионных характеристик.

При аддитивной равномерно распределённой в интервале $[-\theta, \theta]$ помехе слагаемое в (29), соответствующее помехе, имеет вид $\theta\zeta_i$, ζ_i — значение генератора равномерно распределённой в интервале $[-1; 1]$ помехи. Тогда $\rho = \frac{2\theta}{a}$ и $\theta = \frac{\rho a}{2}$.

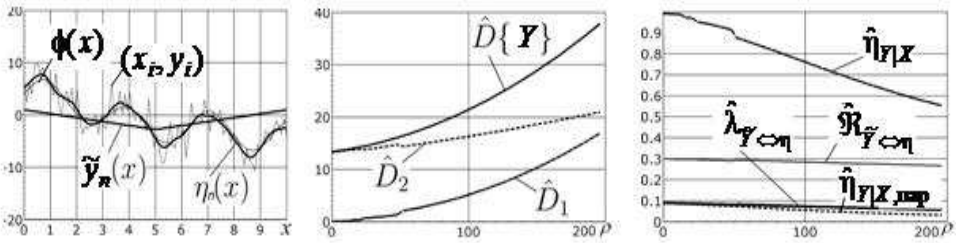

Рис. 2. Фрагмент поведения (при 100 %-й помехе) непараметрической модели $\eta_n(x)$ и **первого** варианта параметрической модели $\tilde{y}_n(x)$ (слева), а также зависимость оценок дисперсионных характеристик от уровня ρ стохастичности объекта

Первый вариант. Структура выбранной параметрической модели имеет вид $\widetilde{y}(x) = \alpha_0 + \alpha_1|x-5|$. В ней присутствует постоянная компонента α_0 и базисная функция $|x-5|$ с параметром α_1. При наличии экспериментальных данных, представленных в левой части рис. 2 для 100 %-й нормально распределённой помехи, из квадратичного критерия рассчитаны параметры модели $\widetilde{y}_n(x) = -2.973 + 0.803|x-5|$. По тем же экспериментальным данным настроена (при этом оптимальный коэффициент размытости $\beta = 0.12$) непараметрическая оценка регрессии $\eta_n(x)$. Она даже визуально существенно лучше оптимальной параметрической модели. Непараметрическая модель близка к сигнальной части выхода объекта $\phi(x)$.

На этом же рисунке представлено поведение оценок всех основных дисперсионных характеристик при изменении отношения "шум-сигнал" ρ от 1 до 200%. Оценка $\hat{D}_2$ дисперсии регрессии слабо меняется, что указывает на хорошее качество непараметрической оценки регрессии и при высоком уровне помех.

Параметрическая и непараметрическая оценки регрессии далеки друг от друга, и $\hat{\lambda}_{\widetilde{Y}\Leftrightarrow\eta}$ близка к нулю. Оценка относительного коэффициента корреляции $\hat{\Re}_{\widetilde{Y}\Leftrightarrow\eta}$ между этими моделями тоже невелика, но больше $\hat{\lambda}_{\widetilde{Y}\Leftrightarrow\eta}$. Оценка дисперсионного отношения для регрессии $\hat{\eta}_{Y|X}$ существенно больше дисперсионного отношения $\hat{\eta}_{Y|X,\text{парам}}$ для параметрической модели. Сравнительно большая величина оценки дисперсионного отношения $\hat{\eta}_{Y|X}$ для регрессии подтверждает высокое качество непараметрической оценки регрессии.

Второй вариант. Модель $\widetilde{y}(x) = \alpha_0 + \alpha_1|x-5| + \alpha_2\cos x$ имеет две базисные функции, которые взяты из набора базисных функций, присутствующих в сигнальной части выхода объекта (29). При 100 %-й нормально распределённой помехе оценка субоптимальной параметрической модели $\widetilde{y}_n(x) = -3.002 + 0.911|x-5| + 0.748\cos x$ и непараметрическая оценка регрессии (при оптимальном коэффициенте размытости $\beta = 0.11$) представлены в левой части рис. 3.

Из рис. 3 видно, что параметрическая оценка регрессии находится ближе к непараметрической, чем в прошлом эксперименте. В случае 10 %-й помехи оценка коэффициента их близости $\hat{\lambda}_{\widetilde{Y}\Leftrightarrow\eta}$ поднимается с 0.1 (рис. 2) до 0.23, а величина оценки $\hat{\Re}_{\widetilde{Y}\Leftrightarrow\eta}$ коэффициента корреляции возрастает с 0.3 до 0.48.

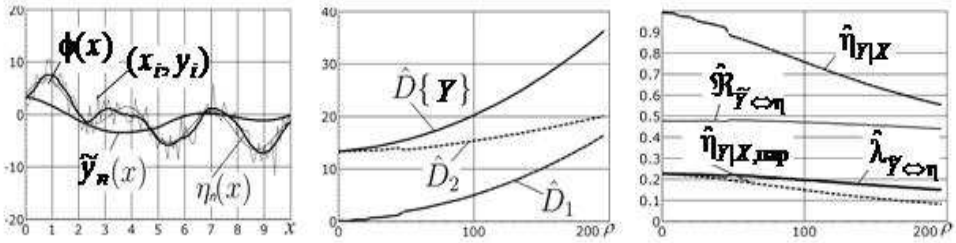

Рис. 3. Фрагмент поведения (при 100 %-й помехе) непараметрической модели $\eta_n(x)$ и **второго** варианта параметрической модели $\widetilde{y}_n(x)$ (слева), а также зависимость оценок дисперсионных характеристик от уровня ρ стохастичности объекта

Третий вариант. Параметрическая модель является более сложной и включает три базисные функции (специально из того же набора базисных функций, которые присутствуют в сигнальной части при имитации объекта): $\widetilde{y}(x) = \alpha_0 + \alpha_1|x-5| + \alpha_2\cos x + \alpha_3 \sin 2x$. Её конкретный численный вариант при 100 %-й нормально распределённой помехе имеет вид: $\widetilde{y}_n(x) = -1.273 + 0.892|x-5| + 0.757\cos x + 2.571\sin 2x$. Непараметрическая оценка регрессии имеет оптимальный коэффициент $\beta = 0.11$. Эти модели представлены в левой части рис. 4.

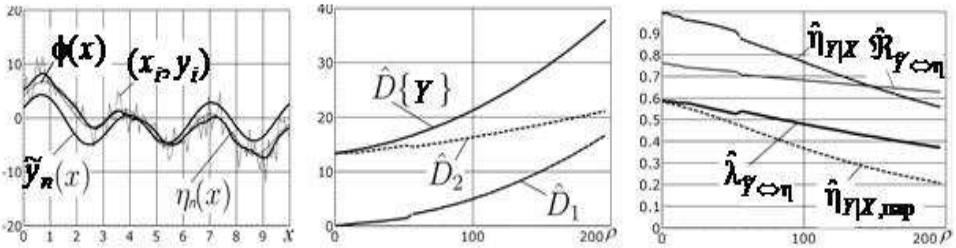

Рис. 4. Фрагмент поведения (при 100 %-й помехе) непараметрической модели $\eta_n(x)$ и **третьего** варианта параметрической модели $\widetilde{y}_n(x)$ (слева), а также зависимость оценок дисперсионных характеристик от уровня ρ стохастичности объекта

Качество параметрической модели возросло. Это подтверждает и возрастание оценок для дисперсионного отношения $\hat{\eta}_{Y|X,\text{парам}}$, для коэффициента близости $\hat{\lambda}_{\widetilde{Y}\Leftrightarrow\eta}$ непараметрической и параметрической моделей и для относительного коэффициента корреляции $\hat{\Re}_{\widetilde{Y}\Leftrightarrow\eta}$ между моделями.

Четвёртый вариант. Параметрическая модель $\widetilde{y}(x) = \alpha_0 + \alpha_1|x-5| + \alpha_2\cos x + \alpha_3\sin 2x + \alpha_4|x-2|$ по структуре совпадает с сигнальной частью выхода объекта (при его имитации). На рис. 5 при величине помехи 100 % оптимальная модель $\widetilde{y}_n(x) = 0.172 + 0.988|x-5| + 0.856\cos x + 2.796\sin 2x - 1.117|x-2|$. Она фактически накрывает сигнальную часть выхода. Отклонение вызвано только влиянием помехи. В непараметрической оценке регрессии оптимальный коэффициент размытости $\beta = 0.10$.

Как следует из рис. 5, при небольшом уровне помех параметрическая оценка бывает даже лучше непараметрической, при этом оценка $\hat{\lambda}_{\widetilde{Y}\Leftrightarrow\eta}$ несколько выше 1. Оценка относительного коэффициента корреляции $\hat{\Re}_{\widetilde{Y}\Leftrightarrow\eta}$ тоже близка к 1, но никогда не превышает её. Все дисперсионные характеристики говорят о наилучшем выборе структуры параметрической модели. С ростом уровня помех непараметрическая оценка всё-таки лучше параметрической.

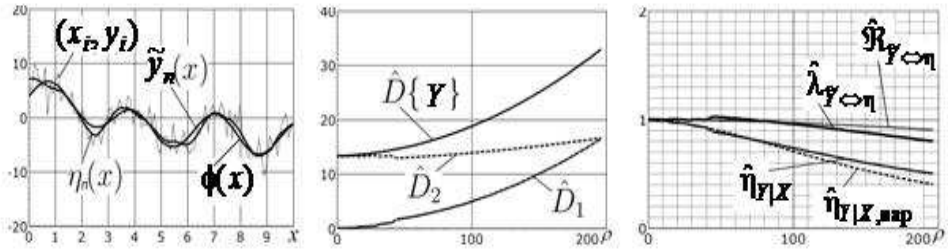

Рис. 5. Фрагмент поведения (при 100 %-й помехе) непараметрической модели $\eta_n(x)$ и **четвертого** варианта параметрической модели $\tilde{y}_n(x)$ (слева), а также зависимость оценок дисперсионных характеристик от уровня ρ стохастичности объекта

Анализ всех численных результатов показывает, что оценка относительного коэффициента корреляции $\hat{\Re}_{\tilde{Y}\Leftrightarrow\eta}$ имеет несколько меньшую чувствительность к изменению близости непараметрической и параметрической оценок регрессии по отношению к $\hat{\lambda}_{\tilde{Y}\Leftrightarrow\eta}$.

Автор благодарен научному сотруднику М. А. Меретилову за выполненные численные расчёты.

Заключение

В многомерном случае (когда объект имеет несколько входов $\overrightarrow{X}$ и один выход Y) все вышеприведенные дисперсионные характеристики сохраняются. В них лишь скалярную случайную величину X надо заменить на векторную $\overrightarrow{X}$. Расчеты всех оценок (особенно непараметрической оценки регрессии), естественно, усложняются, но главная идея остаётся неизменной.

Вышеприведённая схема анализа моделей стохастических объектов применима и к нелинейным (по каналу "вход-выход" и по параметрам) параметрическим субоптимальным моделям $\widetilde{Y} = \alpha_0 + \Im(\overrightarrow{\alpha}, X)$, оптимальные параметры α_0, $\overrightarrow{\alpha}$ которых удовлетворяют критерию наименьших квадратов.

Все приведённые результаты справедливы для так называемого **гомоскедастичного** варианта, т. е. когда условная дисперсия выхода $D\{Y|x\}$ является постоянной величиной. Это условие было выполнено в численных примерах при имитации объекта за счёт представления выхода объекта в виде суммы сигнальной части (некоторой функции от входа) и помехи, дисперсия которой постоянная для всех значений из рассматриваемого диапазона изменения входа. **Гомоскедастичность нарушается**, например, если вход объекта измеряется с аддитивной помехой (даже с постоянной дисперсией). **Гетероскедастичные** случаи [2] требуют специальных исследований, но общая идея сохраняется.

Для практики важно рассмотрение проблемы построения робастных (крепких по отношению к выбросам измерений) непараметрических и параметрических моделей и сравнения их качества. Дисперсионные характеристики при этом надо заменить на модульные, установить закономерности между ними и построить их оценки. Общий подход, предложенный в данной работе, переносится и на робастные модели.

Результаты могут быть распространены и на динамические стохастические объекты.

Список литературы

[1] Райбман Н. С., Чадеев В. М. Построение моделей процессов производства. М.: Энергия, 1975. 376 с.

[2] Дисперсионная идентификация / Под ред. Н. С. Райбмана. М.: Наука, 1981. 336 с.

[3] Рубан А. И. Непараметрическая дисперсионная идентификация // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. 1989. № 3. С. 212.

[4] Rouban A. I. Nonparametric dispersing identification // Advances in Modeling & Analysis: Series D. Mathematical Tools; General Computer Tools. France: A.M.S.E. 1998. Vol. 1. №2. P. 43–50.

[5] Рубан А. И. Идентификация стохастических объектов на основе непараметрического подхода // Автоматика и телемеханика. 1979. №11. С. 106–118.

[6] Рубан А. И. Методы анализа данных: учеб. пособие. 2-е изд., испр. и доп. Красноярск: ИПЦ КГТУ, 2004. 319 с. (Глава 4)

[7] Себер Дж. Линейный регрессионный анализ. М.: Мир, 1980. 456 с.

The Dispersing Characteristics of Static Models of Stochastic Objects

Anatoly I. Rouban
Siberian Federal University
79 Svobodny, Krasnoyarsk, 660041 Russia

The dispersing characteristics determining quality of static parametrical models of stochastic objects are constructed, and their estimations are found at the assumption, that the conditional variance of an output is constant. Parametrical models are nonlinear on the channel "input – output" but they are linear concerning optimized parameters. It is shown that the nonparametric estimation of regression is close to objectively existing ideal model and according to dispersing characteristics it is possible to keep up with change of quality of suboptimal parametrical models at selection of their structure. Quality of nonparametric and parametrical models compared on several numerical tests with various level of noise.

Key words: dispersing identification, static parametrical model, stochastic object, a nonparametric estimation for regression.