

Министерство науки и высшего образования РФ
Федеральное государственное автономное образовательное
учреждение высшего образования

«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой

ростись *инициалы, фамилия*

«__» _____ 20__ г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

15.03.03 «Прикладная механика»

Исследование устойчивости стержней и пластин

Руководитель _____ доцент, к.т.н. А.Е. Митяев

Выпускник _____ В.В.Войтюкова

Красноярск 2019

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	3
1 ОБЗОРНАЯ ЧАСТЬ	5
1.1 Общие сведения.....	5
1.2 Устойчивость стержней	9
1.2.1 Устойчивость сжатого стержня. Задача Эйлера.	10
1.2.2 Зависимость критической силы от условий закрепления стержня.....	12
1.3 Модельные задачи и методы исследования устойчивости упругих систем	18
1.3.1 Метод Эйлера.....	18
1.3.2 Метод Лагранжа.	19
1.3.3 Метод Кармана (начальных несовершенств).	21
1.3.4 Энергетический метод С.П. Тимошенко.	23
1.4 Задача Эйлера об устойчивости сжатого стержня.....	24
1.6 Устойчивость сжатого стержня с шарнирно-закрепленными краями	30
1.7 Устойчивость пластин при локальных нагрузках	31
1.8 Явление потери устойчивости пластин.....	38
1.9 Закритическое поведение пластин	45
2 РАСЧЁТНАЯ ЧАСТЬ	53
2.1 Описание стержневой системы	53
2.1.1 Решение задачи стержневой системы	53
2.2 Устойчивость прямоугольной пластины и её расчёт	62
2.2.2 Устойчивость шарнирно опёртых прямоугольных пластин при равномерном сжатии в одном направлении	62
2.2.3 Устойчивость свободно опёртой пластины, сжатой в двух направлениях.....	65
ЗАКЛЮЧЕНИЕ	69
СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ	70

					<i>БР – 15.03.03 ПЗ</i>		
<i>Изм.</i>	<i>Лист</i>	<i>№ докум.</i>	<i>Подпись</i>	<i>Дата</i>			
<i>Разраб.</i>		<i>Войтюкова В.В</i>			<i>Лит.</i>	<i>Лист</i>	<i>Листов</i>
<i>Провер.</i>		<i>Митяев А.Е</i>				2	70
<i>Н. Контр.</i>		<i>Митяев А.Е</i>			<i>Кафедра ПрМ</i>		
<i>Утверд.</i>		<i>Митяев А.Е</i>					

ВВЕДЕНИЕ

При проектировании инженерных сооружений три условия должны быть выполнены: 1) условие прочности, 2) условие жесткости, 3) условие устойчивости. Назначая размеры инженерных сооружений таким образом, чтобы напряжения материала нигде не превосходили некоторых определенных значений, мы всегда можем удовлетворить условию первому. Второе условие требует таких соотношений между размерами проектируемых частей, при которых изменения формы конструкции под действием внешних сил не превосходили бы некоторых определенных норм. Не всегда бывает достаточно удовлетворить только этим двум условиям, и приходится исследовать также вопрос об устойчивости тех форм равновесия проектируемых частей, которые положены в основание расчетов.

Требования проектировщиков и конструкторов в области машиностроения, авиастроения, строительства и других отраслей промышленности обусловили интерес к проблемам устойчивости пластин и стержней.

Особое влияние на развитие теории устойчивости таких конструкций вплоть до наших дней оказывают фундаментальные работы выдающегося ученого С.П. Тимошенко. Им были решены задачи устойчивости однородных и изотропных тонких прямоугольных пластин. В данной работе будут использоваться формулировки из его книги, а также методы и примеры.

Большой интерес представляет сформулированный С.П.Тимошенко энергетический метод решения задач устойчивости упругих систем. *Согласно этому методу, критические значения внешних усилий находятся из условия равенства работ внешних и внутренних силовых факторов на перемещениях потери устойчивости.*

Являясь простым и наглядным, энергетический метод Тимошенко позволяет *приблизительно* решать задачи устойчивости пластин, для которых невозможно найти точное решение.

Перв. примен.

Справ. №

Подпись и дата

Инв. № дубл.

Взам. инв. №

Подпись и дата

Инв. № подл.

Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата

БР – 15.03.03 ПЗ

Лист

3

В данной бакалаврской работе дан краткий обзор по устойчивости пластин и стержней, а также изложен метод расчета стержневой конструкции и прямоугольной пластины. Содержатся теоретические данные по основам метода сил и практического метода расчета стержней и пластин на устойчивость. Приводятся необходимые для выполнения расчетно-проектировочной работы сведения, включающие исходные данные, порядок выполнения задания, порядок подготовки данных. Представлен пример выполнения расчетно-проектировочной работы.

Перв. примен.

Справ. №

Подпись и дата

Инв. № дубл.

Взам. инв. №

Подпись и дата

Инв. № подл.

Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата

БР – 15.03.03 ПЗ

1 ОБЗОРНАЯ ЧАСТЬ

1.1 Общие сведения

Для того, чтобы выполнить бакалаврскую работу, необходимо было разобраться в выбранной теме и в каждом определении, и понятии.

- *Что такое строительная механика?*

Строительная механика – это наука о расчетах на прочность, жёсткость и устойчивость сооружений. *Сооружение* – это совокупность твердых тел, неподвижно соединенных между собой. Строительная механика обеспечивает строительство инженерных сооружений современными методами статического и динамического расчета.

Требования, предъявляемые к сооружениям:

1. Прочность, жёсткость и устойчивость;
2. Экономичность;
3. Неподвижность относительно основания и неизменность приданной геометрической формы в течение всего срока службы.

Задачами строительной механики являются определение внутренних усилий во всех элементах сооружений, изучение упругих перемещений, возникающих под действием внешней нагрузки, исследование устойчивости сооружений, а также установление законов образования наивыгоднейших форм сооружений.

- *Что такое исследование?*

Исследование – это поиск новых знаний или систематическое расследование с целью установления фактов, изучение объекта или чего-то нового.

• *Что такое устойчивость?*

Устойчивость – это способность системы или тела сохранять текущее состояние при влиянии внешних воздействий. Если текущее состояние при этом не сохраняется, то такое состояние называется неустойчивым.

• *Что такое прочность?*

Прочность – это свойство материала сопротивляться разрушению под действием напряжений, возникающих под действием внешних сил. Свойство конструкции выполнять назначение, не разрушаясь в течение заданного времени.

Прочность подразделяют на статическую, под действием постоянных нагрузок, динамическую и усталостную (выносливость), имеющую место при действии циклических переменных нагрузок.

Для конструкций различают общую прочность — способность всей конструкции выдерживать нагрузки без разрушения, и местную — та же способность отдельных узлов, деталей, соединений.

• *Что такое жёсткость?*

Жёсткость – способность тела или конструкции сопротивляться образованию деформации. Жёсткость измеряется коэффициентом пропорциональности между усилием и относительной линейной, угловой деформацией или кривизной.

• *Что такое растяжение-сжатие?*

Растяжение-сжатие в сопротивлении материалов – вид продольной деформации стержня или бруса, возникающий в том случае, если нагрузка к нему прикладывается по его продольной оси.

Перв. примен.				
Справ. №				
Подпись и дата				
Инв. № дубл.				
Взам. инв. №				
Подпись и дата				
Инв. № подл.				
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата
БР – 15.03.03 ПЗ				Лист
				6

- *Что такое стержень?*

Стержень – это главная часть чего-либо. А так же – это тело удлинённой формы, два размера которого (высота и ширина) малы по сравнению с третьим размером (длиной).

Гибкость стержня – отношение расчётной длины стержня к наименьшему радиусу инерции его поперечного сечения.

$$\lambda = \frac{l_0}{i}$$

Это выражение играет важную роль при проверке сжатых стержней на устойчивость. В частности, от гибкости зависит коэффициент продольного изгиба φ . Стержень с большей гибкостью, при прочих неизменных параметрах, имеет более низкую прочность на сжатие и сжатие с изгибом.

Расчётная длина l_0 вычисляется по формуле:

$$l_0 = \mu l,$$

где μ – коэффициент, зависящий от условий закрепления стержня;

l – геометрическая длина. Расчётная длина также называется приведённой или свободной.

Понятие приведённая длина впервые ввёл Ясинский для обобщения формулы критической силы Эйлера, которую тот выводил для стержня с шарнирно-опертыми концами. Соответственно коэффициент μ равен при шарнирных концах (основной случай) одному, при одном шарнирном, другом закреплённом $\mu = 0,7$, при обоих закреплённых концах $\mu = 0,5$.

Схемы деформирования и коэффициенты μ при различных условиях закрепления и способе приложения нагрузки, изображены на рисунке. Также,

стоит отметить, что формула Эйлера верна только для элементов большой гибкости, например для стали, она применима при гибкостях порядка $\lambda = 100$ и выше.

При расчетах элементов железобетонных конструкций к гибкости предъявляются требования по её ограничению. Также, в зависимости от гибкости назначается величина армирования.

В расчётах стальных конструкций гибкость имеет наибольшее значение ввиду большой прочности стали с вытекающей из этого формой элементов (длинные, небольшой площади) из-за чего исчерпание несущей способности по устойчивости наступает до исчерпания запаса прочности по материалу.

Отсюда ввод дополнительных терминов:

1. Условная гибкость
2. Приведённая гибкость
3. Предельная гибкость

- *Что такое пластина?*

Пластина – тело, ограниченное двумя параллельными плоскостями, расстояние между которыми, называемое толщиной пластины $h = const$, мало по сравнению с его другими размерами. Имеется также следующее уточненное определение пластины: пластина – тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя перпендикулярными к ней плоскостями, расстояние между которыми мало по сравнению с его другими размерами. В том же значении, что и термин «пластина» также используется термин «пластинка».

Пластина может быть самостоятельной конструкцией или входить в состав пластинчатой системы. Отдельные пластинки применяют в строительстве в виде стеновых панелей, балок-стенок, плит и панелей перекрытий и покрытий, фундаментных плит и т.д.

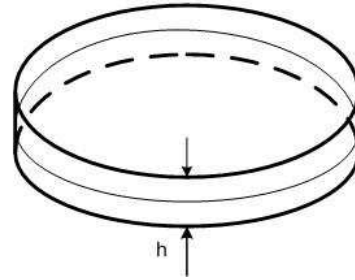
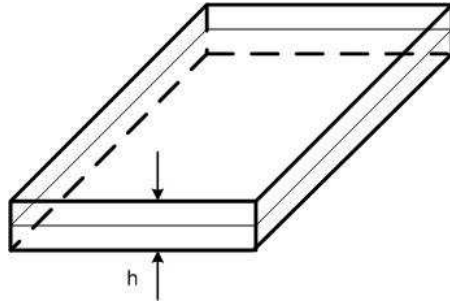


Рисунок 1.1 - Прямоугольная и круглая пластина

- *Что такое двутавр?*

Двутавр – стандартный профиль конструктивных элементов из черного проката или дерева, имеющий сечение, близкое по форме к букве «Н». Балка двутаврового профиля в тридцать раз жестче и в семь раз прочнее балки квадратного профиля аналогичной площади сечения, что превосходит прочность швеллера. Однако устойчивость двутавра к скручиванию очень мала (как и у других открытых сечений – швеллера, уголка) – примерно в 400 раз меньше, чем у круглой трубы такого же сечения.

1.2 Устойчивость стержней

В конструкциях и сооружениях большое применение находят детали, являющиеся относительно длинными и тонкими стержнями, у которых один или два размера поперечного сечения малы по сравнению с длиной стержня. Поведение таких стержней под действием осевой сжимающей нагрузки оказывается принципиально иным, чем при сжатии коротких стержней: при достижении сжимающей силой F некоторой критической величины, равной $F_{кр}$, прямолинейная форма равновесия длинного стержня оказывается неустойчивой, и при превышении $F_{кр}$ стержень начинает интенсивно искривляется (выпучивается).

При этом новым (моментным) равновесным состоянием упругого длинного становится некоторая новая уже криволинейная форма. Это явление носит название потери устойчивости.

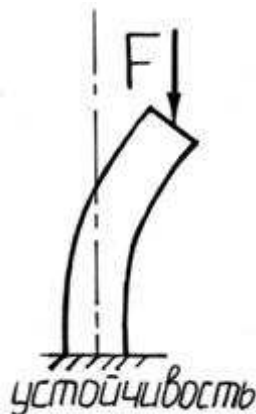


Рисунок 1.2 - Сжатый стержень

Критическая сила ($F_{кр}$) – нагрузка, превышение которой вызывает потерю устойчивости первоначальной формы (положения) тела. Условие устойчивости:

$$F_{max} \leq F_{кр}, \quad (1.1)$$

1.2.1 Устойчивость сжатого стержня. Задача Эйлера.

При определении критической силы, вызывающей потерю устойчивости сжатого стержня, предполагается, что стержень идеально прямой и сила F приложена строго центрально. Задачу о критической нагрузке сжатого стержня с учетом возможности существования двух форм равновесия при одном и том же значении силы решил Л.Эйлер в 1744 году.

Име. № подл.	Подпись и дата				Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата	Лист
	Взам. име. №									
БР – 15.03.03 ПЗ										
10										

полуволна синусоиды) и $J=J_{min}$ (стержень искривляется относительно оси с наименьшим моментом инерции)

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{min}}{n^2}, \quad (1.3)$$

это выражение – формула Эйлера.

1.2.1 Зависимость критической силы от условий закрепления стержня

Формула Эйлера была получена для, так называемого, основного случая – в предположении шарнирного опирания стержня по концам. На практике встречаются и другие случаи закрепления стержня. При этом можно получить формулу для определения критической силы для каждого из этих случаев, решая, как в предыдущем параграфе, дифференциальное уравнение изогнутой оси балки с соответствующими граничными условиями. При потере устойчивости на длине стержня должна укладываться одна полуволна синусоиды.

Рассмотрим некоторые характерные случаи закрепления стержня по концам и получим общую формулу для различных видов закрепления.

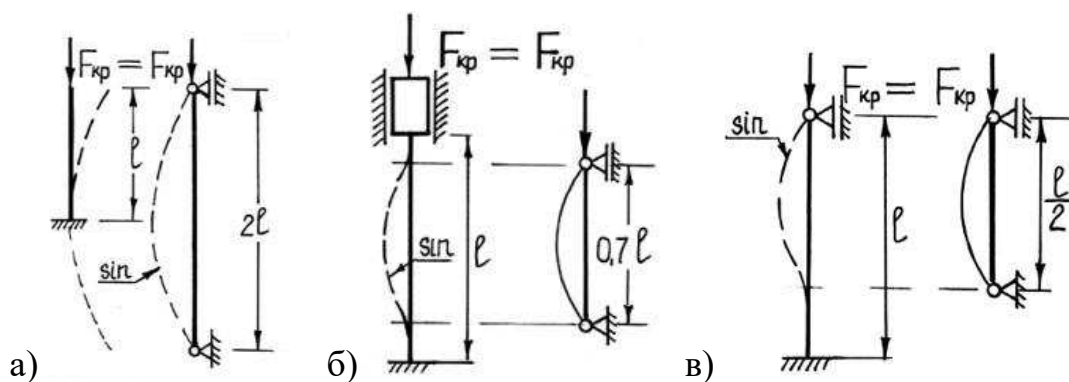


Рисунок 1.4 а, б, в - Различные случаи закрепления стержня

Име. № подл.	Подпись и дата	Взам. инв. №	Име. № дубл.	Подпись и дата	Справ. №	Перв. примен.				
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата	БР – 15.03.03 ПЗ		Лист			
							12			

Общая формула Эйлера:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot J_{\min}}{(\mu \cdot l)^2}, \quad (1.4)$$

где $\mu \cdot l = l_{пр}$ – приведенная длина стержня;

l – фактическая длина стержня;

μ – коэффициент приведенной длины, показывающий во сколько раз необходимо изменить длину стержня, чтобы критическая сила для этого стержня стала равна критической силе для шарнирно опертой балки. (Другая интерпретация коэффициента приведенной длины: μ показывает, на какой части длины стержня для данного вида закрепления укладывается одна полуволна синусоиды при потере устойчивости.)

Таким образом, окончательно условие устойчивости примет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{F}{A} \leq \varphi \cdot [\sigma_-] \quad (1.5)$$

Существует два вида расчета на устойчивость сжатых стержней – проверочный и проектировочный.

Разрушение стержня может произойти не только потому, что будет нарушена прочность, но и оттого, что стержень не сохранит той формы, которая ему придана конструктором; при этом изменится и характер напряженного состояния в стержне.

Наиболее типичным примером является работа стержня, сжатого силами P . До сих пор для проверки прочности мы имели условие

$$\sigma = \frac{P}{F} \leq [\sigma],$$

Перв. примен.

Справ. №

Подпись и дата

Инв. № дубл.

Взам. инв. №

Подпись и дата

Инв. № подл.

это условие предполагает, что стержень все время, вплоть до разрушения работает на осевое сжатие. Уже простейший опыт показывает, что далеко не всегда возможно разрушить стержень путем доведения напряжений сжатия до предела текучести или до предела прочности материала.

Если мы подвергнем продольному сжатию тонкую деревянную линейку, то она может сломаться, изогнувшись; перед изломом сжимающие силы, при которых произойдет разрушение линейки, будут значительно меньше тех, которые вызвали бы при простом сжатии напряжение, равное пределу прочности материала. Разрушение линейки произойдет потому, что она не сможет сохранить приданную ей форму прямолинейного, сжатого стержня, а искривится, что вызовет появление изгибающих моментов от сжимающих сил P и, стало быть, добавочные напряжения от изгиба; линейка потеряет устойчивость.

Поэтому для надежной работы конструкции мало, чтобы она была прочна; надо, чтобы все ее элементы были устойчивы: они должны при действии нагрузок деформироваться в таких пределах, чтобы характер их работы оставался неизменным. Поэтому в целом ряде случаев, в частности, для сжатых стержней, помимо проверки на прочность, необходима и проверка на устойчивость. Для осуществления этой проверки надо ближе ознакомиться с условиями, при которых устойчивость прямолинейной формы сжатого стержня нарушается.

Под устойчивостью понимают способность систем сохранять их состояние равновесия или движения во времени под действием малых возмущений. Под неустойчивостью понимают способность систем при действии весьма малых возмущений получать большие перемещения.

Наглядной иллюстрацией устойчивого состояния равновесия служит поведение тяжёлого шарика на гладкой поверхности (рисунок 1.5).

Лист

БР – 15.03.03 ПЗ

14

Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата
------	------	----------	---------	------

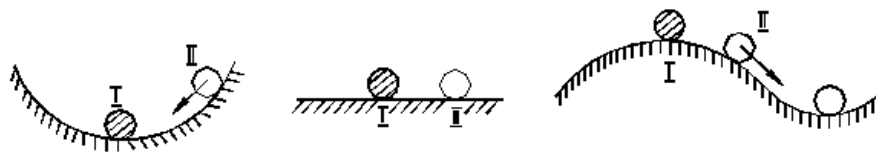


Рисунок 1.5

Если слегка отклонить шарик от состояния равновесия I , как показано пунктиром, и предоставить его самому себе, то в случае а) шарик начнёт колебаться около нижнего положения I и вернётся к нему; в б) он остаётся безразличным, а в случае в) он начнёт сразу же удаляться от положения I .

Приведённый пример отождествляет понятие устойчивого состояния шарика со свойством возмущённого (отклонённого) состояния II возвращаться к исходному I .

История науки знает различные определения понятия устойчивости. Одним из первых было определение, данное Л. Эйлером в 1749г. в связи с практически важным вопросом того времени – вопросом устойчивости кораблей Российского флота: «тела равновесное положение будет устойчиво, ежели оное тело, будучи несколько наклонено, опять справится» (рисунок 1.5).

Термин устойчивость был введён в науку впервые Л.Эйлером. Применительно к упругим системам определение Эйлера можно сформулировать следующим образом: *равновесие упругой системы при заданных внешних силах считается устойчивым в смысле Эйлера, если после статического приложения и последующего снятия малой возмущающей силы система возвращается к своему исходному состоянию* (рисунок 1.6а). В противном случае исходное состояние равновесия системы считается неустойчивым.

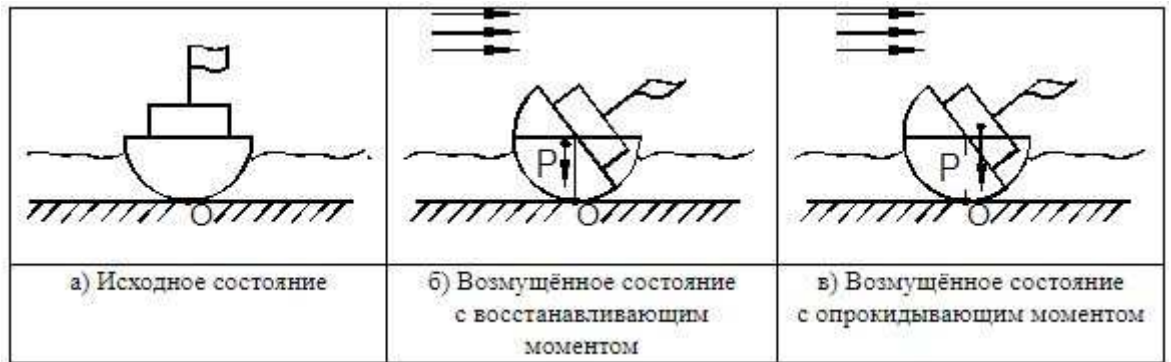


Рисунок 1.6 а, б, в - Возмущенные состояния

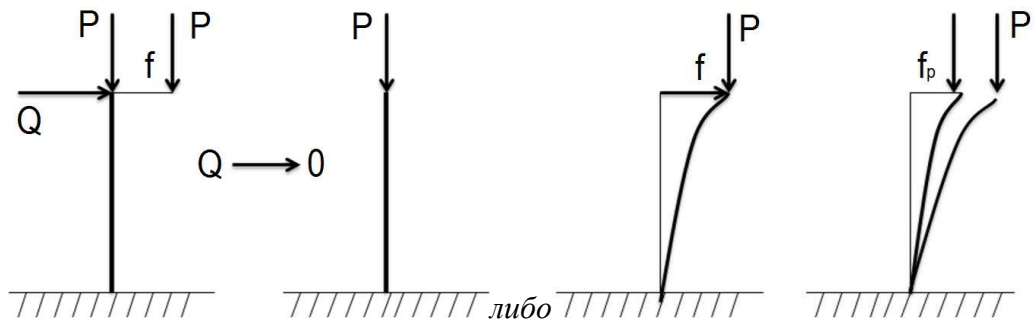


Рисунок 1.7

Минимальное значение силы P , при котором система впервые не возвращается к исходному состоянию, называется **бифуркационным**. При этом значении нагрузки происходит нарушение единственности решения задачи, т.к. наряду с исходной прямолинейной формой равновесия стержня существует отклонённая форма.

Другим, более общим, определением устойчивости состояния равновесия является определение Лагранжа: *исходное состояние равновесия упругой системы устойчиво, если после отклонения её от этого состояния она, предоставленная самой себе, стремится вернуться к нему, совершая малые колебания, затухающие со временем при наличии сил внешнего и внутреннего сопротивления* (рисунок 1.6б).

С увеличением сжимающей силы частота ω собственных колебаний системы стремится к нулю, а затем движение становится аperiodически неустойчивым (рисунок 1.6в).

Для консервативных внешних сил критическая нагрузка находится из условия равенства нулю частоты собственных колебаний и совпадает с Эйлеровой нагрузкой.

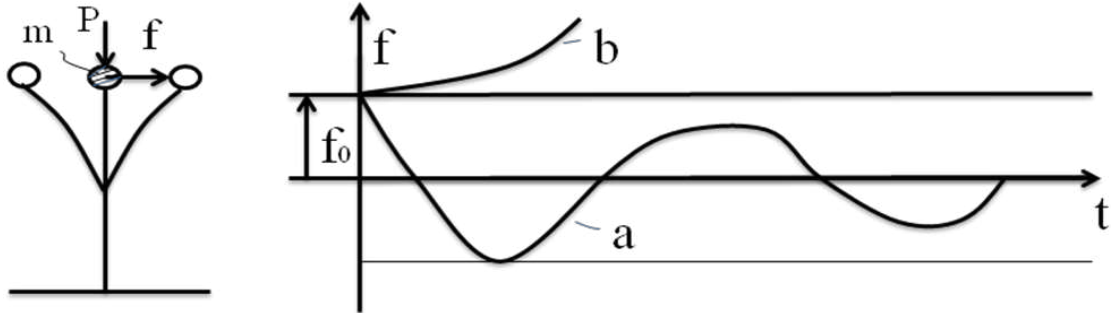


Рисунок 1.8

Если система (сжатый стержень) испытывает пластические деформации, то при любом малом возмущении он изгибается и затем при снятии возмущения не возвращается в своё исходное состояние. Получается, что по Эйлеру всякое равновесное состояние сжатой системы за пределом упругости – неустойчивое.

Такое допущение с практической точки зрения является абсурдным. В.Г.Зубчаниновым предложено частное определение устойчивости сжатой системы за пределом упругости: *состояние равновесия упругопластической системы является устойчивым, если она после статического приложения и последующего снятия малой возмущающей силы стремится вернуться в своё исходное состояние, пребывая в его малой окрестности.*

Из приведённых выше трёх определений по существу вытекает одинаковый метод исследования элементов конструкций на устойчивость – **метод проб на устойчивость** путём возмущения исходного состояния равновесия при достигнутом уровне нагружения. Этот метод обладает тем недостатком, что не рассматривает процесс нагружения, с помощью которого был достигнут данный уровень внешних сил, а также тем, что

ограничивает область анализа устойчивости лишь малой окрестностью точки бифуркации.

Что произойдёт за точкой бифуркации при дальнейшем нагружении системы? На этот вопрос метод проб ответа не даёт. Судить об устойчивости или неустойчивости конструкции без исследования после бифуркационного поведения невозможно.

Так, для стержней после бифуркации перемещения растут настолько быстро, что предельное значение нагрузки P_m практически не отличается от бифуркационного.

1.3 Модельные задачи и методы исследования устойчивости упругих систем.

1.3.1 Метод Эйлера

Рассмотрим простую модельную задачу, которая поможет выяснить все особенности потери устойчивости. Пусть абсолютно жёсткий стержень (стойка) шарнирно опёрт на нижнем конце и закреплён с помощью упругой горизонтальной пружины на верхнем. Эта пружина отражает упругие свойства системы при поперечном отклонении. Реакцию пружины R представим соотношением:

$$R = k_1 f_0 + k_2 f^2 + k_3 f^3 + \dots$$

где f - горизонтальное перемещение верхнего конца стойки.

Если перемещение f мало, то нелинейными членами можно пренебречь и принять $R = k_1 f$. В противном случае задача принимает *геометрически нелинейный* характер.

Нагрузим стойку вертикальной силой P . Если подействовать на жёсткий стержень поперечной малой возмущающей силой q , то он отклонится на

некоторый малый угол φ . Теперь снимем эту силу статически. Если стойка вернётся при заданном значении силы P в исходное состояние, то она устойчива в смысле Эйлера, если не вернётся, то неустойчива. Пусть имеет место второй случай. Составим уравнение равновесия стойки:

$$\sum m_0 m_0 = Pf - Rl = 0,$$

где $f = \varphi l, Rk_1 l$ - реакция упругой пружины.

Из верхнего уравнения следует:

$$(P - k_1 l)f = 0,$$

откуда либо $f = 0$ (устойчивость), либо $f \neq 0$ (неустойчивость). Пусть $f \neq 0$. Тогда в нуль обратится круглая скобка, что позволяет найти критическую силу

$$P_* = P_3 = k_1 l,$$

Полученное значение силы P_* , при котором система впервые не возвратилась к исходному состоянию, называется **бифуркационной нагрузкой Эйлера**.

При этом значении силы P происходит нарушение единственности решения задачи ($f = 0$), т.е. **бифуркация или ветвление решения**. Вопрос о том, как будет вести себя стойка при $P > P_* = P_3$ остаётся открытым.

1.3.2 Метод Лагранжа

В основу этого метода положено динамическое определение устойчивости состояния равновесия Лагранжа. Для отклонённого состояния стойки, пользуясь принципом Даламбера, имеем:

$$\sum m_0 m_0 = (R + J)lP f = 0,0$$

где $R = kf$ - упругая реактивная сила;

$J = mf'$ - сила инерции;

$f = l\varphi$ - прогиб;

$f = \frac{d^2 f}{dt^2}$ - ускорение;

m – масса груза на конце стойки.

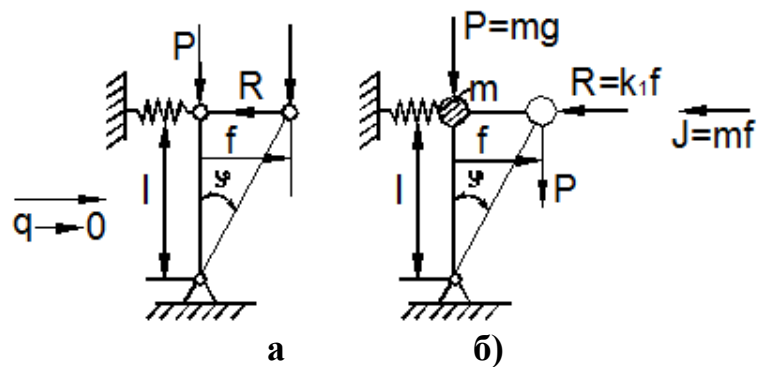


Рисунок 1.9

Находим уравнение колебаний системы с сосредоточенной массой m :

$$mlf = (k_1 l - P)f = 0.$$

Полагая, $f = ce^{-k\tau}$, получим характеристическое уравнение:

$$k^2 + \omega^2 = 0$$

где $\omega = \sqrt{\frac{k_1 l - P}{ml}}$.

Если $P < k_1 l$, то $\omega > 0$, $k = \pm i\omega$, ($i = \sqrt{-1}$),

$$f = C_1 \sin \omega t + C_2 \cos \omega t = A \sin(\omega t + \varphi)$$

где ω - круговая частота колебаний;

φ - начальная фаза;

A – амплитуда колебаний.

Движение носит периодический характер и потому устойчиво. Если учесть внешнее и внутреннее сопротивление системы, то решение будет иметь вид:

$$f = Ae^{-\lambda t} \sin(\omega t + \varphi),$$

где λ - параметр, определяющий сопротивление движений.

Колебания с ростом времени t затухнут, и система вернется в своё исходное состояние. Следовательно, исходное состояние равновесия устойчиво.

Если $P < k_1 l$, то k – действительное число. Решение принимает вид:

$$f = C_1 l^{kt} + C_2 l^{-kt}$$

и носит аperiodический, т.е. неустойчивый характер. При $t \rightarrow \infty$ имеем $t \rightarrow \infty$. При $\omega = 0$ происходит переход от устойчивого периодического движения стойки к неустойчивому аperiodическому. Это происходит при критической силе $P_* = k_1 l$.

Таким образом, динамический метод Лагранжа приводит к тому же результату, что и метод Эйлера.

1.3.3 Метод Кармана (начальных несовершенств).

Т. Карман первым рассмотрел процесс продольного изгиба стойки с начальными несовершенствами как задачу устойчивости и трактовал предельную нагрузку не как исчерпания несущей способности системы, а как предел устойчивости. Однако такая точка зрения долгое время (вплоть до

наших дней) не находила поддержки. Применим метод Кармана к стойке на рисунке 1.10,а.

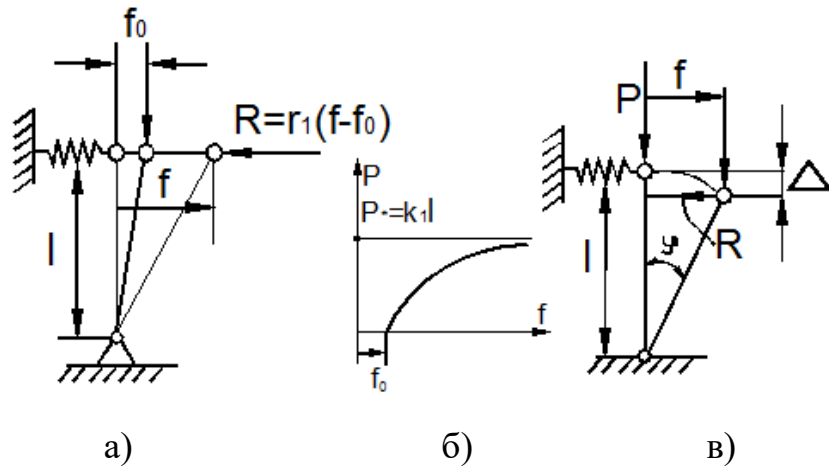


Рисунок 1.10 а, б, в

Стойка имеет отклонение от вертикали на некоторый угол φ_0 и сжимается силой P . При $P > 0$ стойка отклонится от вертикали на угол $\varphi > \varphi_0$.

Уравнение равновесия в некоторый момент процесса продольного нагружения стойки имеет вид:

$$Rf - Pl = 0,$$

где $R = k_1(f - f_0)$.

Дальше следует:

$$P = P_* \left(1 - \frac{f_0}{f} \right), \quad f = \frac{f_0 P_*}{P_* - P},$$

Дифференцируя по f или по P соответственно, находим:

$$\frac{df}{dP} = \frac{d}{dP} \left(\frac{f_0 P_*}{P_* - P} \right) = \frac{f_0 P_*}{(P_* - P)^2}$$

откуда при $P \rightarrow P_* = k_1 l$ следует $\frac{df}{dP} \rightarrow \infty$.

Согласно изложенной концепции значение силы $P_* = k_1 l$ является пределом устойчивости и совпадает с эйлеровой силой.

1.3.4 Энергетический метод С.П. Тимошенко

При отклонении системы на угол φ от положения равновесия, верхний конец стержня опускается на величину ∇ . Сила P совершает работу $A = P\nabla$

Перемещение

$$\nabla = l - l \cos \varphi \approx \frac{1}{2} l \varphi^2 = \frac{1}{2} l f^2,$$

где прогиб $f = l\varphi$, $\cos \varphi = 1 - \frac{\varphi^2}{2} + \dots$

Работа силы P на перемещение ∇ принимает вид $A = P f^2 \cdot 2l$

Упругая внутренняя реактивная сила $R = kf$ совершает работу, называемую потенциальной энергией деформации:

$$U = \frac{1}{2} R f = \frac{1}{2} k f^2,$$

Величина

$$\Pi = U - A = \frac{1}{2l} f^2 (kl - P)$$

носит название **полной потенциальной энергии** системы, связанной с потерей устойчивости. Если $\Pi > 0$ ($P < kl$), то энергии Π достаточно для возвращения стержня в исходное состояние, т.е. его состояние равновесия устойчиво. Если $\Pi < 0$ ($P > kl$), то энергии деформации недостаточно для возвращения стержня в исходное состояние равновесия, т.е. он находится в неустойчивом состоянии

равновесия. Граничное значение энергии $\Pi=0$ является критерием для определения критической силы $P=kl$. Таким образом, энергетический метод приводит к критической нагрузке, равной нагрузке Эйлера для данной модели.

1.4 Задача Эйлера об устойчивости сжатого стержня

Познакомившись с концепцией устойчивости и модельными задачами, мы можем теперь перейти к рассмотрению задач устойчивости упруго сжатого стержня (рисунок 1.11).

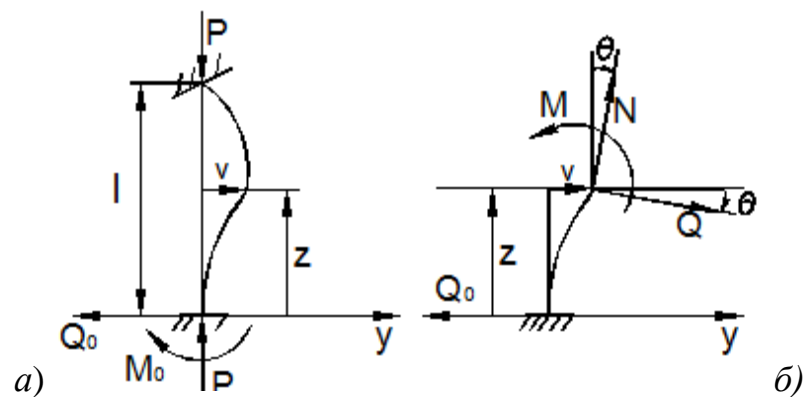


Рисунок 1.11 а, б

Считаем стержень идеально прямым и сжатым центрально приложенными силами P (рисунок 1.11а). Следуя методу Эйлера, будем считать исходное состояние равновесия упругого стержня устойчивым, если после статического приложения и снятия возмущающей силы при постоянных внешних сжимающих силах P стержень возвращается к своей исходной прямолинейной форме равновесия. В противном случае состояние равновесия считаем неустойчивым.

Допустим, что стержень остался в изогнутом состоянии (рисунок 1.11б). Отсечём часть стержня на расстоянии z от начала координат, считая угол поворота сечения $dV \approx \frac{dV}{dz}$ малой величиной, и составим уравнения равновесия:

$$N = -P, Q = Q_0, M = M_0 + Q_0 z + PV.$$

Изгибающий момент в поперечном сечении равен:

$$M = -EJ \frac{d^2 V}{dz^2}.$$

Приравнявая выражения моментов, находим:

$$EJ \frac{d^2 V}{dz^2} + PV = -M_0 - Q_0 z$$

Дифференцируя по z , получим:

$$EJ \frac{d^2 V}{dz^2} + P \frac{dV}{dz} = -Q_0 = -Q;$$

Дифференцируем по z , приходим к уравнению изогнутой оси потерявшего устойчивость стержня четвёртого порядка:

$$EJ \frac{d^2 V}{dz^2} + P \frac{d^2 V}{dz^2} = 0$$

Введём обозначение:

$$k^2 = \frac{P}{EJ}$$

Тогда уравнения можно записать в виде

$$\frac{d^2 V}{dz^2} + k^2 V = -\frac{1}{EJ} (M_0 + Q_0 z), \quad \frac{d^4 V}{dz^4} + k^2 \frac{d^2 V}{dz^2} = 0.$$

Общее решение уравнения имеет вид:

$$V = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz - \frac{1}{P}(M_0 + Q_0 z).$$

В него входят четыре произвольные постоянные C_1, C_2, M_0, Q_0 .

Общее решение уравнения:

$$v = C_1 \sin kz + C_2 \cos kz + C_3 z + C_4$$

В него входят четыре произвольные постоянные

$$C_i (i = 1, 2, 3, 4),$$

Производные:

$$\begin{cases} V' = k(C_1 \cos kz - C_2 \sin kz) + C_3, \\ V'' = -k^2(C_1 \sin kz + C_2 \cos kz), \\ V''' = -k^3(C_1 \cos kz - C_2 \sin kz). \end{cases}$$

Используя некоторые выражения, находим:

$$\begin{cases} M = -EJV'' = P(C_1 \sin kz + C_2 \cos kz), \\ Q = -[EJV''' + PV'] = -PC_3. \end{cases}$$

Постоянные C_i находятся из граничных условий. Для шарнирно закреплённого по концам стержня при $z=0$ и $z=l$ имеем условия:

$$V = 0, M = 0, (V' = 0).$$

Для стержня, закреплённого при $z=0$ и свободного от закрепления при $z=l$, должны выполняться условия:

$$V = 0, V' = 0 \text{ при } z=0,$$

$$M = 0, (V'' = 0), Q = 0, (C_2 = 0) \text{ при } z=l.$$

Если на незакреплённом конце при $z=l$ действуют внешний момент m и поперечная сила R , то:

$$M=m, Q=R.$$

При любом закреплении концов стержня мы имеем четыре граничных условия (по два на каждом краю), которые при подстановке в них выражений приводят к системе четырёх однородных алгебраических уравнений вида:

$$\sum_{j=1}^4 C_j a_{ij}(kl) = 0, (i = 1, 2, 3, 4)$$

ИЛИ

$$\begin{cases} C_1 a_{11} + C_2 a_{12} + C_3 a_{13} + C_4 a_{14} = 0, \\ C_1 a_{21} + C_2 a_{22} + C_3 a_{23} + C_4 a_{24} = 0, \\ C_1 a_{31} + C_2 a_{32} + C_3 a_{33} + C_4 a_{34} = 0, \\ C_1 a_{41} + C_2 a_{42} + C_3 a_{43} + C_4 a_{44} = 0. \end{cases}$$

Система уравнений имеет отличные от нуля решения ($C_i \neq 0$) только при условии, что её определитель:

$$|a_{ij}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = 0,$$

откуда, после его раскрытия, находим некоторое числовое значение kl :

$$kl = \frac{\pi}{\mu},$$

где μ - некоторое число.

Возводя обе части полученного равенства в квадрат и используя обозначение, получаем **формулу для критического значения силы (нагрузки бифуркации) Эйлера**:

$$P_{\text{Э}} = \frac{\pi^2 EJx}{(\mu l)^2},$$

где μl - приведённая длина стержня;

μ - коэффициент приведения длины стержня, к длине шарнирно опертого по концам стержня.

Можно сказать, что μ – число, показывающее, во сколько следует увеличить длину шарнирно-опертого стержня, чтобы критическая сила для него равнялась критической силе стержня длиной l в рассматриваемых условиях закрепления.

Понятие о приведенной длине было впервые введено профессором Петербургского института инженеров путей сообщения Ф. Ясинским.

Соответствующее **критическое напряжение Эйлера**:

Перв. примен.

$$\sigma_{\text{Э}} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2},$$

где - $\lambda = \frac{\mu l}{i}$ - *гибкость стержня*;

$i = \sqrt{\frac{J_{\min}}{F}}$ - радиус инерции площади поперечного сечения.

Справ. №

Формула для критической силы сжатой колонны ($\mu = 2$) была получена Эйлером в 1744г. а для сжатого шарнирно опертого стержня ($\mu = 1$) - в 1757г. Во времена Эйлера (1707 – 1783) главными конструкционными материалами были камень и древесина. Их слабое сопротивление нагрузкам заставляло инженеров создавать массивные конструкции и сооружения, для которых вопросы устойчивости не имели первостепенного значения.

Поэтому теория устойчивости Эйлера долгое время не находила практического применения. Только с введением стали в проектирование инженерных конструкций с гибкими элементами, вопросы устойчивости получили большое практическое значение.

Рассмотрим Эйлерову форму потери устойчивости стержней. Критические нагрузки для стержней, так же как и для пластин, могут быть определены как из решения дифференциального уравнения задачи, так и энергетическим методом. Дифференциальное уравнение равновесия изогнутого стержня, как известно, имеет вид:

$$EJy'' = M$$

Подпись и дата

Инв. № дубл.

Взам. инв. №

Подпись и дата

Инв. № подл.

Лист

БР – 15.03.03 ПЗ

29

Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата

откуда Эйлера бифуркационная нагрузка:

$$P_{\text{Э}} = \frac{n^2 \pi^2 EJ}{l^2},$$

Минимальная бифуркационная сила имеет место при $n=1$, т.е. при изгибе стержня по одной полуволне:

$$P_{\text{Э}} = \frac{\pi^2 EJ}{l^2},$$

При $n > 1$ выпучивание возможно, если в точках смены знаков кривизны и прогибов установить дополнительные опоры. В этом случае $\mu = 1/n$.

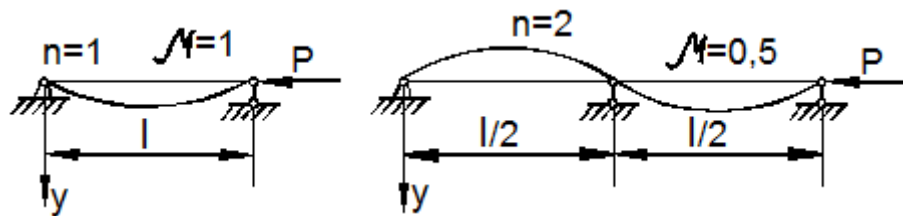


Рисунок 1.13

1.7 Устойчивость пластин при локальных нагрузках

Задачи устойчивости тонких упругих пластин, нагруженных в своей плоскости локальными внешними усилиями, имеют большое практическое значение, а решение таких задач представляет несомненный методический интерес.

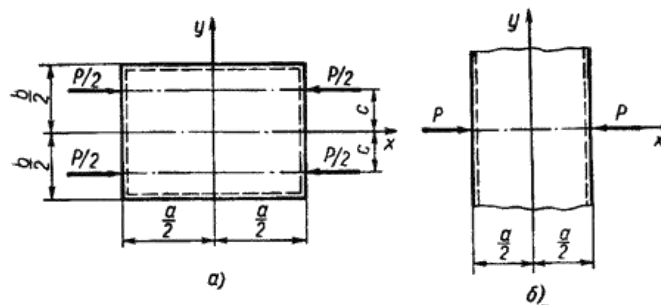


Рисунок 1.14 а, б

Перв. примен.	<p>Результаты исследования устойчивости пластин при локальных нагрузках позволяют наиболее наглядно выявить некоторые общие особенности задач устойчивости пластин. Например, задача устойчивости прямоугольной пластины нагруженной сосредоточенными силами, использована для доказательства того, что в критерии устойчивости в форме Брайана нельзя заменять действительные начальные усилия произвольной системой статически возможных начальных усилий (рисунок 1.14).</p>					
	Справ. №	<p>Прежде чем перейти к конкретным задачам, отметим, что при нагружении пластин сосредоточенными силами не очевидно существование конечных значений критических нагрузок. Действительно в окрестностях точек приложения сосредоточенных сил возникают неограниченно большие напряжения, поэтому бессмысленно говорить о критических напряжениях в срединной плоскости пластины.</p>				
Подпись и дата		<p>Строго говоря, необходимо доказать, что несмотря на это потеря устойчивости пластины может произойти только при превышении внешней нагрузкой некоторого конечного критического значения. Таким доказательством является возможность записи энергетического критерия устойчивости в форме С. П. Тимошенко. При использовании энергетического критерия в такой форме задача устойчивости пластин, нагруженных сосредоточенными силами, не требует предварительного определения действительных начальных усилий. В этом случае бесконечно большие напряжения в решении не фигурируют.</p>				
	Инв. № дубл.	Взам. инв. №	<p>В качестве примера рассмотрим решение задачи устойчивости шарнирно-опертой прямоугольной пластины, сжатой сосредоточенными силами (рисунок 1.14а). Приближенное решение задачи получим с помощью энергетического критерия устойчивости, выраженного через статически возможные начальные усилия. Изменение полной потенциальной энергии пластины равно</p>			
Инв. № подл.	Подпись и дата					
Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата	<i>БР – 15.03.03 ПЗ</i>	Лист
						32

$$\nabla \mathcal{E} = V + \iint \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right)^2 T_x^c + \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \frac{\partial \omega_1}{\partial y} S^c + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right)^2 T_y^c \right] dx dy -$$

$$- \frac{1}{Eh} \iint (T_x'' + T_y'') (T_x^c + T_y^c) dx dy.$$

Систему статически возможных начальных усилий выберем следующим образом:

$$T_x^0 = -\frac{P}{2} \frac{1}{2\delta} \text{ при } (c - \delta) \leq |y| \leq (c + \delta);$$

$$T_x^0 = 0 \text{ при } (c - \delta) > |y| \text{ и } (c + \delta) < |y|;$$

$$\left. \begin{array}{l} T_y^c = 0 \\ S^c \end{array} \right\} \text{ по всей пластине.}$$

При такой системе статически возможных начальных усилий из выражения следует, что

$$\nabla \mathcal{E} = V + 2 \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{c-\delta}^{c+\delta} \left(-\frac{P}{2} \frac{1}{2\delta} \right) dx dy - \frac{2}{Eh} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \int_{c-\delta}^{c+\delta} (T_x'' + T_y'') \left(-\frac{P}{2} \frac{1}{2\delta} \right) dx dy =$$

$$= V - \frac{P}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right)^2_{y=c} dx + \frac{P}{Eh} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (T_x'' + T_y'')_{y=c} dx.$$

Для дальнейшего решения возьмем функции нормального прогиба и усилий в таком же виде, как в примере, рассмотренном в предыдущем параграфе:

$$\left. \begin{aligned} \omega_1(x, y) &= c_1 \cos \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{b}; \\ \varphi_2(x, y) &= f \left(1 + \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \left(1 + \cos \frac{2\pi y}{b} \right), \end{aligned} \right\}$$

Тогда:

$$(T_x'' + T_y'') = \left(\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2} \right) = \frac{c_1^2 E h \pi^2}{16 a^2} \left(\cos \frac{2\pi x}{a} + 2 \cos \frac{2\pi x}{a} \cos \frac{2\pi y}{b} + \cos \frac{2\pi y}{b} \right).$$

Как и в предыдущем параграфе, при

$$V = \frac{c_1^2}{2} \frac{ab}{4} D \left[\left(\frac{\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{m}{b} \right)^2 \right]^2 = \frac{c_1^2}{2} b^2 D \left(\frac{\pi}{b} \right)^4$$

После элементарных преобразований условие приводит к выражению для критической силы

$$P_{кр} = \frac{4D \left(\frac{\pi}{b} \right)^2 b}{1 + \frac{1}{2} \cos \frac{2\pi c}{b}}$$

Для пластины с конечными размерами эту задачу решал С. П. Тимошенко с помощью энергетического метода. Срединную плоскость пластины при потере устойчивости он считал нерастяжимой и для подсчета изменения полной потенциальной энергии пластины использовал выражение:

$$\nabla \mathcal{E} = V - P \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right)^2 dx.$$

Задав функцию поперечного прогиба в виде тригонометрического ряда, для шарнирно-опертой пластины С. П. Тимошенко получил формулу:

$$P_{кр} = \frac{4\pi^2 D}{b^2} \frac{\frac{b}{\pi}}{\operatorname{th} \frac{\pi a}{2b} - \frac{\pi a}{2b} \frac{1}{\operatorname{ch}^2\left(\frac{\pi a}{2b}\right)}}.$$

Для квадратной пластины из формулы следует, что:

$$P_{кр} = \frac{4\pi^2 D}{b^2} \frac{b}{\pi} \frac{1}{0,667}.$$

Откуда для безразмерной критической силы получим значение:

$$\overline{P}_{кр} = 0,478$$

Как отмечал С. П. Тимошенко, используемый им прием приближенного решения этой задачи можно трактовать, как замену действительного начального напряженного состояния пластины статически возможным начальным напряженным состоянием. Действительно, выражение получается из энергетического критерия, записанного в форме Брайана, если начальные усилия заменить статически возможными усилиями типа.

Вслед за С. П. Тимошенко многие авторы решали аналогичные задачи устойчивости пластин, нагруженных сосредоточенными силами, не определяя действительного начального напряженного состояния, а фактически заменяя его статически возможным начальным напряженным состоянием.

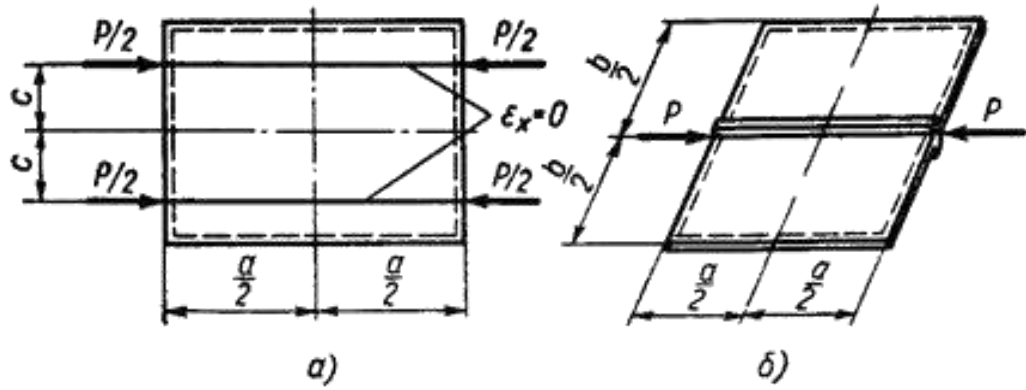


Рисунок 1.15 а, б

В отмечалось, что ошибка, к которой приводит такая замена действительных начальных усилий статически возможными, может быть сколь угодно большой, причем знак этой ошибки может быть любым. Например, используя такой подход для рассмотренной выше задачи (рисунок 1.15а) и ограничиваясь для одночленной аппроксимацией, вместо формулы получаем:

$$\overline{P}_{кр} = \frac{1}{1 + \cos \frac{2\pi c}{b}}$$

По этой формуле имеем, что заниженное значение критической нагрузки. Формула приводит к бесконечно завышенному значению. Уточняя решение посредством выбора функции в виде ряда, получим формулу, дающую более низкое значение.

Выясним физический смысл выражения. Представим, что вдоль линии действия сосредоточенной силы пластина армирована нерастяжимой и несжимаемой нитью (рисунок 1.15а). В этом случае по выражению действительно получим значение изменения полной потенциальной энергии при отклонениях пластины от начального плоского состояния равновесия. Причем, как это следует из приведенных выше значений, критическая нагрузка

пластины, армированной нерастяжимыми нитями, оказывается меньше, чем неармированной.

В реальных конструкциях тонкие пластины обычно подкрепляют ребрами жесткости (рисунок 1.15б). В этом случае часть сжимающей нагрузки воспринимает пластина, а часть – ребро жесткости. Рассмотрим два предельных случая: 1) вся сжимающая нагрузка передается через ребро жесткости; 2) вся нагрузка воспринимается пластиной. В первом случае критическая сила определяется по формуле:

$$P_{кр} = \frac{V + \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} EJ \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} \right)_{y=0}^2 dx}{\frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right)_{y=0}^2 dx},$$

во втором – по формуле

$$P_{кр} = \frac{V + \frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} EJ \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x^2} \right)_{y=0}^2 dx}{\frac{1}{2} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right)_{y=0}^2 dx - \frac{1}{Eh} \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} (T_x'' + T_y'')_{y=0} dx},$$

где V – изгибная жесткость подкрепляющего ребра в плоскости, перпендикулярной срединной плоскости пластины.

Если ограничиться одночленным приближением, то для шарнирно-опертой пластины получим, что во втором случае критическая сила в 1,5 раза больше, чем в первом. При уточнении решения несколько изменяется

Име. № подл.	Подпись и дата				Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата	Лист
	Взам. име. №									
<p style="text-align: center;"><i>БР – 15.03.03 ПЗ</i></p>										
37										

количественная оценка, но качественная сохраняется: при прочих равных условиях ребро, обладающее меньшей жесткостью на сжатие, будет эффективнее, чем ребро, имеющее большую жесткость на продольное сжатие.

1.8 Явление потери устойчивости пластин

Явление потери устойчивости связано с возможностью появления отличных от исходной форм равновесия упругих систем. Если, например, пластину нагрузить сжимающими усилиями, действующими в её срединной плоскости, то при некотором значении этих усилий исходная прямолинейная поверхность пластины может перестать быть единственно возможной. Наряду с этой формой могут существовать и другие формы равновесия, связанные с искривлением поверхности пластины. Та нагрузка, при которой происходит это явление, называется критической.

В дальнейшем будут рассмотрены только такие случаи, когда нагрузка не изменяет своего направления после потери устойчивости пластины. Такие нагрузки называются консервативными.

Ниже рассмотрены только два метода решения задачи устойчивости, которые широко применяются в расчетной практике: метод статический и метод энергический. Первый метод основан на использовании уравнения, второй – выражения полной энергии.

Если рассматривать статический метод исследования устойчивости прямоугольных пластин, то в этом случае дифференциальное уравнение равновесия имеет вид:

$$D \left(\frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \right) = q,$$

Под поперечной нагрузкой q здесь следует понимать ту фиктивную распределенную нагрузку, которую дают распределенные усилия в срединной поверхности при проектировании их на недеформированную плоскость пластины. Таким образом, можно получить:

$$q = N_x \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y},$$

Тогда уравнение для исследования устойчивости пластин принимает вид:

$$D = \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \right) = -N_x \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2} - N_y \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y},$$

Здесь знаки у N_x и N_y изменены на обратные – сжатие. Выражения для моментов и перерезывающих сил, а также формулировка граничных условий в данном случае остаются такими же, как и при исследовании прочности пластин.

Усилия N_x , N_y , N_{xy} , связанные с действующими контурными силами, в самом общем случае могут быть величинами, переменными в каждой точке пластины. В этом случае вначале необходимо решить плохую задачу теории упругости о распределении этих усилий по плоскости пластины, а затем уже можно решать задачу устойчивости этой пластины, находящейся под действием заданной системы внешних сил.

Но в наиболее важных случаях и в наиболее часто встречающихся в практике расчетах эти силы можно считать равномерно распределенными по плоскости пластины и совпадающими с распределением их по контуру.

Приведенное уравнение устойчивости точно решить не удастся, и поэтому приходится пользоваться приближенными методами, о которых говорилось выше.

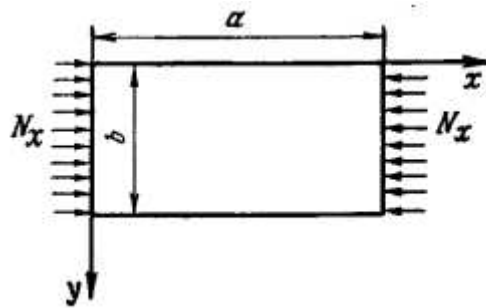


Рисунок 1.16

Покажем, как можно достаточно просто получить решение устойчивости, пользуясь методом конечных разностей, для пластины, шарнирно опертой с трех сторон и четвертой стороной свободной при равномерном сжатии.

Уравнение устойчивости в конечных разностях в данном случае принимает вид:

$$\frac{D}{b^4} \left[20W_k - 8(W_l + W_i + W_m + W_n) + 2(W_p + W_q + W_r + W_0) + \right. \\ \left. + W_l + W_s + W_a + W_v \right] = \\ = -\frac{N_x}{h^2} (W_l + W_i + 2W_k),$$

Граничными условиями мы удовлетворим, если положим

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \right) = 0 \text{ при } y=0 \text{ и } y=c,$$

$$V_y = -D \left[\frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 \omega}{\partial x^2 \partial y} \right] = 0 \text{ при } y=c$$

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = 0 \text{ при } x = \pm \frac{a}{2}$$

И на контуре прогиб всюду равен нулю, кроме стороны $y=c$.

В конечных разностях эти граничные условия имеют вид:

$$M_y = -D \left(\frac{W_n + W_n - 2W_k}{b^2} + \mu \frac{W_t + W_l - 2W_k}{h^2} \right) = 0,$$

$$V_y = -D \left[\frac{W_v + W_u - 2W_m - 2W_n}{2b^3} + (2 - \mu) \frac{2W_n - 2W_n + W_q - W_0 + W_r - W_p}{2bh^2} \right] = 0,$$

$$M_x = -D \left(\frac{W_t + W_i - 2W_k}{h^2} + \mu \frac{W_m + W_n - 2W_k}{b^2} \right) = 0,$$

Из этих уравнений для принятой нумерации узлов сетки получаем:

$$\left. \begin{matrix} W_k = 0 \\ W_t = -W_t \end{matrix} \right\} \text{длинные стороны} \quad \left. \begin{matrix} W_k = 0 \\ W_n = -W_m \end{matrix} \right\} \text{короткая сторона слева}$$

Для короткой стороны справа при $u=0,3$ получаем следующие два уравнения, связывающие законтурные точки 1 и 2 с внутриконтурными точками 3,4,5:

$$\left. \begin{matrix} V_y = -D \left(\frac{W_1 - W_5 - 2W_4 - 2W_2}{2b^3} + 1,7 \frac{2W_1 + 2W_2 + 0 - 0 + 0 - 1}{2bh^2} \right) = 0, \\ M_y = -D \left(\frac{W_2 + W_4 - 2W_3}{b^2} + 0,3 \frac{0 + 0 - 2W_3}{h^2} \right) = 0 \end{matrix} \right\}$$

Из приведенных уравнений получаем связь законтурных точек с внутриконтурными. Для внутриконтурных точек получим следующие четыре уравнения равновесия.

Точка 3:

$$\frac{D}{b^4} [20W_3 - 8(0 + 0 + W_4 + W_2) + 2(0 + 0 + 0 + 0) - W_3 - W_3 + W_1 + W_5] =$$

$$= -\frac{N_x}{h^2} (0 + 0 - 2W_3).$$

Точка 4:

$$\frac{D}{b^4} [20W_4 - 8(0 + 0 + W_3 + W_5) + 2(0 + 0 + 0 + 0) - W_4 - W_4 + W_2 + W_6] =$$

$$= -\frac{N_x}{h^2} (0 + 0 - 2W_4).$$

Точка 5:

$$\frac{D}{b^4} [20W_5 - 8(0 + 0 + W_4 + W_6) + 2(0 + 0 + 0 + 0) - W_5 - W_5 + W_3 + 0] =$$

$$= -\frac{N_x}{h^2} (0 + 0 - 2W_5).$$

Точка 6:

$$\frac{D}{b^4} [20W_6 - 8(0 + 0 + W_5 + 0) + 2(0 + 0 + 0 + 0) - W_6 - W_6 + W_4 - W_6] =$$

$$= -\frac{N_x}{h^2} (0 + 0 - 2W_6).$$

Исключая из данных уравнений W_1 и W_2 с помощью уравнений получим следующую однородную систему четырех уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -8W_5 + (17 - 2k)W_6 &= 0, \\ W_3 - 8W_4 + (18 - 2k)W_5 - 8W_6 &= 0 \\ -5,4W_3 + (17 - 2k)W_4 - 8W_5 + W_6 &= 0, \\ (11,24 - k)W_3 - 10,8W_4 + 2W_5 &= 0, \end{aligned} \right\}$$

$$\text{где } k = \frac{N_x}{D} \left(\frac{b}{4} \right)^2.$$

В этой системе уравнений всего пять неизвестных величин: в точках 3, 4, 5 и 6 прогибы W_3, W_4, W_5, W_6 и параметр нагрузки k .

Из этих неизвестных нас интересует только параметр k . Для его определения можно из второго уравнения определить, например, W_3 и подставить его значение в остальные три. Затем из одного из этих уравнений определить W_4 и подставить его значение в оставшиеся два, в которых уже будут содержаться W_5 и W_6 . Исключая из этих уравнений, например, W_5 , получим одно уравнение:

$$W_6(8k^4 - 297,3k^3 + 3641k^2 - 1662k + 23320) = 0.$$

Так как $W_6 \neq 0$, то должно быть

$$8k^4 - 297,9k^3 + 3641k^2 - 1662k + 23320 = 0.$$

К точно такому же результату мы придем, если приравняем нулю определитель уравнений.

Поскольку нас интересует наименьшее значение нагрузки N_x , нам необходимо определить наименьший корень уравнения. Путем подбора можно убедиться, что $k_{min} = 2,55$.

Тогда:

$$\frac{N_x}{D} \left(\frac{b}{4} \right)^2 = 2,55$$

ИЛИ

$$N_{кр} = 40,8 \frac{D}{b^2}.$$

Точное решение задачи приводит к этой формуле к коэффициенту = 43,4. Из приведенных примеров задач по устойчивости прямоугольных пластин видно, что формулу для критической нагрузки можно всегда представить в виде:

или при $\mu = 0,3$

$$N_{кр} = k \frac{\pi^2 D}{b^2} \quad \sigma_{кр} = k \frac{0,8E}{\left(\frac{b}{\delta}\right)^2}.$$

Числовое значение коэффициента k в этой формуле будет зависеть как от характера действующей на пластину нагрузки, так и от граничных условий задачи. В справочниках по строительной механике имеется достаточное количество этих коэффициентов для различных случаев нагружения и заделки контура пластин.

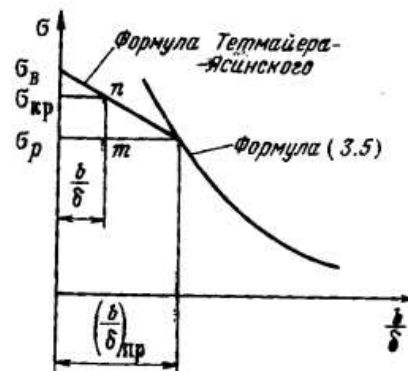


Рисунок 1.17

Как видно из самой структуры формулы, она справедлива только в пределах упругости $\sigma_{кр} \leq \sigma_p$. Если только $\sigma_{кр} > \sigma_p$ (а практически $\sigma_{кр} > \sigma_e$), то в приведенной формулой пользоваться нельзя. В этих случаях пользуются формулой Тетмайера – Ясинского, которая хорошо зарекомендовала себя на практике. Эта формула иллюстрируется на рисунке 1.17., откуда:

$$\sigma_{кр} = \sigma_p + mn \approx \sigma_s + mn$$

ИЛИ

$$\frac{\sigma_{\epsilon} - \sigma_s}{mn} = \frac{\left(\frac{b}{\delta}\right)_{np}}{\left(\frac{b}{\delta}\right)_{np} - \left(\frac{b}{\delta}\right)}$$

Отсюда получаем формулу Тетмайера – Ясинского

$$\sigma_{кр} = \sigma_{\epsilon} - (\sigma_{\epsilon} - \sigma_s) \frac{\left(\frac{b}{\delta}\right)}{\left(\frac{b}{\delta}\right)_{np}},$$

где $\left(\frac{b}{\delta}\right)_{np} = \sqrt{k \frac{0,9E}{\sigma_s}}$.

Если $\left(\frac{b}{\delta}\right) > \left(\frac{b}{\delta}\right)_{np}$, то следует пользоваться формулой, которая

представлена выше, если же $\left(\frac{b}{\delta}\right) < \left(\frac{b}{\delta}\right)_{np}$, то следует пользоваться формулой

Тетмайера – Ясинского.

В более сложных случаях нагружения пластин для решения вопросов устойчивости с успехом может использоваться энергетический метод, основанный на начале возможных перемещений.

1.9 Закритическое поведение пластин

С помощью линеаризованных уравнений и энергетического критерия исследуют устойчивость плоского напряженного состояния тонких упругих пластин. Но ни линеаризованные уравнения, ни энергетический критерий устойчивости (в какой бы форме он не был записан) не дают непосредственной

информации о том, как будет деформироваться пластина после потери устойчивости. Для описания закритического деформирования необходимо решить задачу изгиба пластины в нелинейной постановке.

Как и для сжатого стержня, для пластины возможны два основных качественно различных случая закритического поведения. Если закрепления контура пластины не препятствуют ее чисто изгибной деформации, т. е. деформации без удлинений и сдвигов срединной плоскости (рисунок 1.18а), то после потери устойчивости поведение пластины будет таким же, как и поведение стержня с незакрепленными относительно продольных смещений торцами.

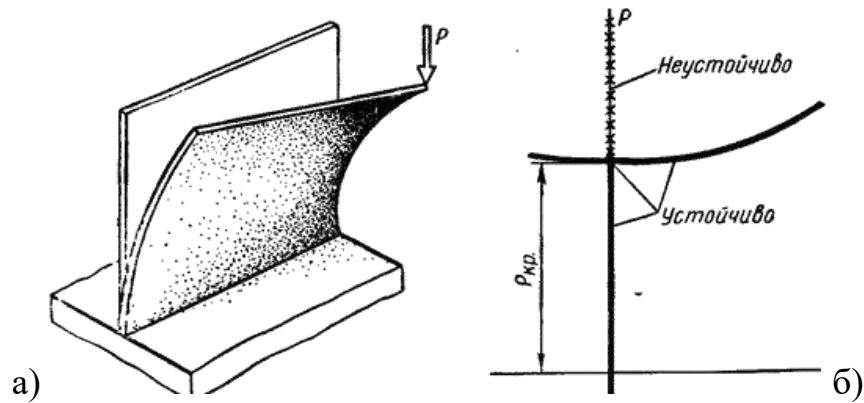


Рисунок 1.18 а,б

Критическая точка бифуркации будет точкой бифуркации первого типа (рисунок 1.18б). После потери устойчивости происходит такой быстрый рост поперечных прогибов и изгибных напряжений, что потерю устойчивости пластины практически можно считать потерей ее несущей способности. Количественные оценки прогибов и напряжений при закритическом деформировании пластины можно получить таким же путем, каким это сделано для стержня. Но если для стержней этот случай закритического поведения основной, то для тонкой пластины, являющейся элементом силовой конструкции, этот случай – исключительный.

Как неоднократно отмечалось, пластина с закрепленным относительно поперечных перемещений контуром не может изгибаться без удлинений и сдвигов срединной плоскости. В этом случае закритическое поведение пластины будет качественно отличным от рассмотренного. Как и в случае стержня с закрепленными относительно продольных перемещений торцами, после потери устойчивости такая пластина может продолжать воспринимать возрастающую внешнюю нагрузку.

На рисунке 1.16 изображена тонкая пластина, скрепленная по контуру с жесткой шарнирной рамкой. До потери устойчивости такая пластина будет находиться в состоянии чистого сдвига. После потери устойчивости на ее поверхности образуются наклонные волны. При этом пластина не теряет несущей способности и продолжает воспринимать возрастающую внешнюю нагрузку. Аналогично ведет себя закрепленная по контуру прямоугольная пластина при сжатии (рисунок 1.17): после потери устойчивости она продолжает воспринимать возрастающую внешнюю нагрузку.

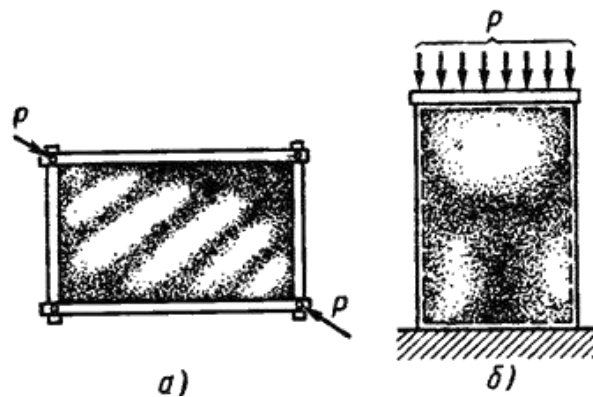


Рисунок 1.19 а, б

Исследуем подробнее этот основной для тонких пластин случай закритического деформирования, когда изгиб пластины сопровождается дополнительными удлинениями и сдвигами срединной плоскости.

Характер критической точки бифуркации и закритическое поведение пластины при конечных, но малых отклонениях от начального плоского состояния равновесия можно установить с помощью приема, применявшегося при изучении закритических деформаций стержней.

Будем считать, что задача устойчивости пластины решена энергетическим методом с использованием энергетического критерия в форме С. П. Тимошенко, и найдены соответствующие критической точке бифуркации функции удовлетворяющие граничным условиям задачи. Приближенно примем, что при малых, но конечных отклонениях пластины ее напряженно-деформированное состояние описывается функциями:

$$\omega(x, y) = c_1 \omega_1(x, y);$$

$$\varphi(x, y) = c_1^2 \varphi_1(x, y);$$

$$u(x, y) = c_1^2 u_2(x, y);$$

$$v(x, y) = c_1^2 v_2(x, y);$$

где μ – параметр, зависящий от уровня нагружения пластины.

Тогда изменение полной потенциальной энергии пластины при отклонениях от начального плоского состояния равновесия будет определяться выражением:

$$\begin{aligned} \nabla \mathcal{E} = \mathcal{E} - \mathcal{E}_0 = c_1^2 \frac{1}{2} \iint D \left\{ \left(\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2} \right)^2 + \right. \\ \left. + 2(1 - \mu) \left[\left(\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy - \\ - c_1^2 \left[\iint (p_x u_2 + p_y v_2) dx dy + \oint (q_x u_2 + q_y v_2) ds + c_1^4 W_4 \right] \end{aligned}$$

где W_4 – полная потенциальная энергия пластины, не зависящая от параметра.

Значение можно подсчитать с помощью либо этого выражения:

$$W_4 = \frac{1}{2} \iint \frac{Eh}{1-\mu^2} \left(\varepsilon_x''^2 + 2\mu \varepsilon_x'' \varepsilon_y'' + \varepsilon_y''^2 + \frac{1-\mu}{2} \gamma_{xy}''^2 \right) dx dy,$$

либо выражения:

$$W_4 = \frac{1}{2} \iint \frac{1}{Eh} \left(T_x''^2 + 2\mu T_x'' T_y'' + T_y''^2 + 2(1+\mu) S''^2 \right) dx dy,$$

В этих выражениях:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x'' &= \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial x} \right)^2; \\ \varepsilon_y'' &= \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} \right)^2; \\ \gamma'' &= \frac{\partial v_2}{\partial x} + \frac{\partial u_2}{\partial y} + \frac{\partial \omega_1}{\partial x} \frac{\partial \omega_1}{\partial y}; \end{aligned} \right\},$$

$$T_x'' = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial y^2}; T_y'' = \frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x^2}; S'' = -\frac{\partial^2 \varphi_2}{\partial x \partial y}.$$

Начальные усилия в срединной плоскости пластины не входят в слагаемые полной потенциальной энергии, зависящие от параметр: именно от этих условий выше определены функции.

Поскольку в зависимости все функции считаем известными из решения линейной задачи устойчивости пластины, закритическое деформирование пластины в окрестностях критической точки бифуркации определяется только параметром. Таким образом, с помощью приближенного решения задача

исследования закритического поведения пластины сводится к элементарной нелинейной задаче для системы с одной степенью свободы.

Величина является положительно определенной, т. е. в любых способах закрепления и нагружения пластины. Поэтому критическая точка будет точкой бифуркации первого типа (рисунок 1.20а).

Зависимость между параметром и нагрузкой при конечных отклонениях пластины найдем из условия стационарности полной потенциальной энергии. Приравняв нулю производную выражения, то получим уравнение

$$c_1 [P_{кр} - P] + 4c_1^3 W_4 / B = 0,$$

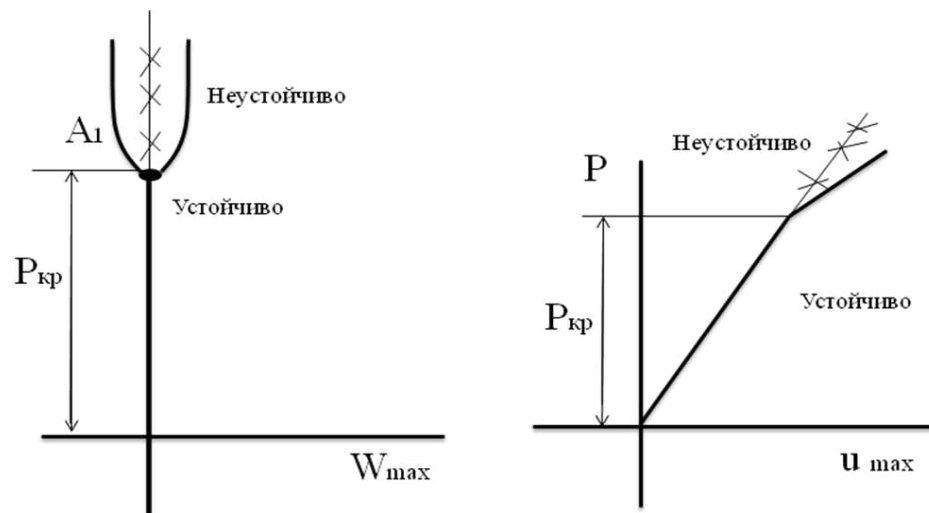


Рисунок 1.20 а, б

$$B = 2 \left[\iint (\bar{p}_x u_2 + \bar{p}_y v_2) dx dy + \oint (\bar{q}_x u_s + \bar{q}_y v_2) ds \right]$$

$$P_{кр} = \frac{\iint D \left\{ \left(\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1 - \mu) \left[\left(\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy}{B}$$

здесь – распределение внешних нагрузок. Из уравнения получим критическое значение параметра нагрузки, поскольку для построения приближенного нелинейного решения использовано решение линейной задачи устойчивости пластины. Из уравнения следует, что:

$$c_1 = \frac{K}{2} \sqrt{\frac{\nabla P}{P_{кр}}},$$

причём

$$V_1 = \iint D \left\{ \left(\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2} \right)^2 + 2(1 - \mu) \left[\left(\frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega_1}{\partial y^2} \right] \right\} dx dy$$

Определив параметр c_1 нетрудно вычислить перемещения и изгибные напряжения в любой точке пластины. Например, в соответствии с зависимостями перемещении пластины линейно изменяется с ростом внешней нагрузки (рисунок 1.20б). Зависимость между амплитудой поперечного прогиба и внешней нагрузкой можно изобразить в виде квадратичной параболы (рисунок 1.20а).

Для уточненного определения напряжений и деформации в срединной плоскости пластины после потери устойчивости необходимо решить систему нелинейных уравнений Кармана:

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \nabla^2 \varphi &= Eh \left[\left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right]; \\ D \nabla^2 \nabla^2 \omega &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - 2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\}$$

Функция усилий связана с усилиями в срединной плоскости пластины соотношениями:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = T_k; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = T_y; \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -S.$$

Систему уравнений Кармана можно получить с помощью приведенных в одной из статей геометрически нелинейных зависимостей, если поперечный прогиб пластины считать малой, но конечной величиной. Для решения системы уравнений должны быть заданы граничные условия относительно поперечного прогиба, усилий и перемещений в срединной плоскости пластины. Систему уравнений Кармана для практически интересных случаев удастся проинтегрировать только приближенным методом.

Тонкие упругие пластины имеют критические точки бифуркации первого типа, и начальные геометрические неправильности влияют на их поведение подобно тому, как это изображено на рисунке 1.20.

Перв. примен.

Справ. №

Подпись и дата

Инв. № дубл.

Взам. инв. №

Подпись и дата

Инв. № подл.

Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата

Перв. примен.

Справ. №

Подпись и дата

Инв. № дубл.

Взам. инв. №

Подпись и дата

Инв. № подл.

2 РАСЧЁТНАЯ ЧАСТЬ

2.1 Описание стержневой системы

Для заданной статически неопределимой стержневой системы необходимо определить оптимальные размеры поперечных сечений балки и стойки. Размеры балки найти из условия прочности, размеры стойки – из условия устойчивости. Расчет на устойчивость произвести на основании практического метода расчета стержней на устойчивость.

2.1.1 Решение задачи стержневой системы

Данная система является один раз статически неопределимой, т.к. на систему наложены четыре связи, одна связь является дополнительной. Разбиваем балочно-стержневую систему на две части (рисунке 2.1). Действие частей друг на друга заменяем неизвестной силой X . Рассмотрим верхнюю балочную часть. Приведенная на рисунке 2.1 система является эквивалентной системой.

Каноническое уравнение метода сил получается из условия, что прогиб балки в точке B равен величине уменьшения длины стойки:

$$\delta_{11}X + \delta_{1F} = \Delta l_c, \quad (2.1)$$

где δ_{11} - прогиб сечения B от действия единичной силы $X = 1$, δ_{1F} - прогиб сечения B от действия внешних нагрузок;

Δl_c - величина сжатия стойки.

Указанные величины определяются с помощью интегралов Мора:

Лист

БР – 15.03.03 ПЗ

53

Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата

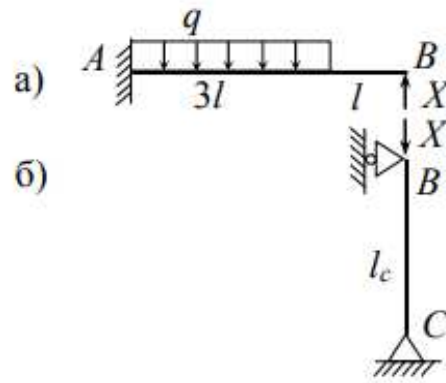


Рисунок 2.1 а, б

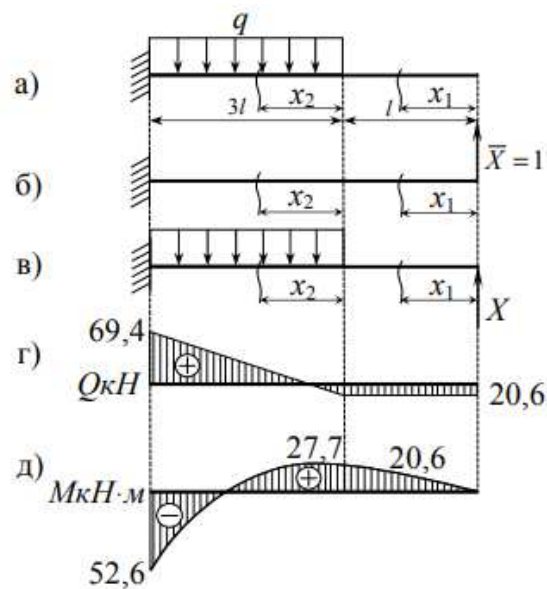


Рисунок 2.2 а, б, в, г, д

$$\delta_{11} = \int_l \frac{\overline{M}_1 \overline{M}_1}{EI} ds, \quad \delta_{1F} = \int_l \frac{M_F \overline{M}_1}{EI} ds. \quad (2.2)$$

здесь M_F - изгибающий момент от действия внешних нагрузок (рисунок 2.1а),

M_I - изгибающий момент от действия единичной силы $X = 1$ (рисунок 2.1б).

Выражения для этих моментов записываются по участкам:

Участок I ($0 \leq x_1 \leq l$): $M_F = 0$, $\overline{M}_1 = \overline{X} x_1 = x_1$.

Участок II ($0 \leq x_2 \leq 3l$): $M_F = -q \frac{x_2^2}{2}$, $\bar{M}_1 = \bar{X}(l + x_2) = l + x_2$.

Подставляя моменты в интегралы (2.1), имеем

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI} \left[\int_0^l x_1^2 dx_1 + \int_0^{3l} (l + x_2) dx_2 \right] = \frac{64l^3}{3EI},$$

$$\delta_{1F} = \frac{1}{EI} \int_0^{3l} \left(-q \frac{x_2^2}{2} \right) (l + x_2) dx_2 = -\frac{117ql^4}{8EI}. \quad (2.3)$$

Величина сжатия стойки определяется из закона Гука при растяжении-сжатии стержня:

$$\nabla l_c = -\frac{Xl_c}{EA_c}, \quad (2.4)$$

где A_c – площадь поперечного сечения стойки.

Подставляя формулы (2.1), (2.4) в (2.5), получаем

$$\left(\frac{64l^3}{3EI} + \frac{l_c}{EA_c} \right) X = \frac{117ql^4}{8EI}. \quad (2.5)$$

В коэффициенты уравнения (2.5) входят неизвестные величины: площадь поперечного сечения стойки A_c и момент инерции поперечного сечения балки I . Причем A_c следует определять из условия устойчивости стойки, момент инерции I – из условия прочности балки.

Для решения задачи используем метод последовательных приближений. Задачи изгиба балки и устойчивости стойки решаются отдельно. Используется следующая схема:

1. Полагается $\frac{l_c}{EA_c} = 0$ (т.е. считается, что стойка абсолютно жесткая:

$\nabla l_c = 0$ и из уравнения (15) находится $X = X_1$.

2. Для полученного значения X из условия прочности балки определяется номер двутавра и соответствующий этому номеру момент инерции I .

3. Из условия устойчивости определяются размеры поперечного сечения стойки и вычисляется площадь A_c .

4. Подставляя найденные значения I и A_c в уравнение (2.5), определяется уточненное значение силы $X = X_1'$.

5. Вычисляется процент расхождения между X_I и X_I' (коэффициент сходимости по X):

$$\eta_X = \frac{|X_1' - X_1|}{X_1} \cdot 100\% .$$

Если коэффициент сходимости больше 1%, то полагается $X = X_1'$ и расчеты повторяются, начиная с пункта 2.

Далее представлены вычисления для рассматриваемого примера по описанной схеме.

1. В первом приближении, полагая $\nabla l_c = 0$, из формулы (2.5) определяем значение силы X :

$$X = X_1 = -\frac{\delta_{1F}}{\delta_{11}} = \frac{351ql}{512} = 20,6кН$$

2. Подбор сечения балки. Для эквивалентной системы (рисунок 2.2в) определяются поперечная сила и изгибающий момент:

Участок I ($0 \leq x_1 \leq l$):

$$Q = -X = -20,6кН,$$

$$M = Xx_1, M(0) = 0, M(l) = 20,6кН \cdot м$$

Участок II ($0 \leq x_2 \leq 3l$):

$$Q = qx_2 - X, Q(0) = -20,6кН, Q(3l) = 69,4кН,$$

$$M = X(l + x_2) - q \frac{x_2^2}{2}, M(0) = 20,6кН \cdot м, M(3l) = -52,6кН \cdot м$$

Определяется координата x_2^* , для которой $M(x_2^*) = M_{max}$.

$$\text{Из условия } Q=qx_2^*-X=0 \text{ находим } x_2^* = \frac{X}{q} = 0,67 м.$$

Подставляя, имеем $M(x_2^*) = 27,7кН$.

Эпюры Q и M представлены на рисунках 2.2г и 2.2д. В опасном сечении (в заделке) $M_{max} = -52,6кН \cdot м$. Из условия прочности на изгиб (2.1) определяем момент сопротивления поперечного сечения балки:

$$W \geq \frac{|M_{max}|}{[\sigma]} = \frac{52,6 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 3,29 \cdot 10^{-4} м^3 = 329 см^3$$

Из таблицы сортамента выбирается двутавр №25, у которого $W = 317 \text{ см}^3, I = 3800 \text{ см}^4$.

Проведем подбор сечения стойки. Стойка ВС (рисунок 2.1) находится в состоянии сжатия и может потерять устойчивость. Для определения ее поперечных размеров проведем расчет на устойчивость методом последовательных приближений.

В первом приближении принимаем $\varphi = \varphi_1 = 0,5$. Из условия устойчивости определяется площадь поперечного сечения стойки:

$$A_c = \frac{X_1}{\varphi_1 [\sigma]} = \frac{20,6 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 2,58 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 2,58 \text{ см}^2.$$

Учитывая, что площадь кольцевого сечения вычисляется по формуле:

$$A_c = \frac{\pi D^2 (1 - c^2)}{4},$$

находим внешний радиус кольца:

$$D = \sqrt{\frac{4A_c}{\pi(1 - c^2)}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 2,58}{3,14(1 - 0,9^2)}} = 4,16 \text{ см}.$$

Гибкость стойки подсчитывается по формуле:

$$\lambda = \frac{\mu l_c}{i_{\min}}, \text{ где } i_{\min} = \sqrt{\frac{I_{\min}}{A_c}}.$$

минимальный момент инерции сечения. Для шарнирно закрепленной стойки $\mu = 1$. Момент инерции кольцевого сечения определяется по формуле

$$I_{\min} = \frac{\pi D^4 (1 - c^4)}{64}.$$

С учетом приведенных формул получаем:

$$i_{\min} = \frac{D\sqrt{1+c^2}}{4} = 1,4 \text{ см},$$

гибкость стойки $\lambda = 86$, гибкости λ стержня, задается в таблицах (таблица 2.1).

Таблица 2.1. Значения гибкости стержня.

λ	Сталь 3	Сталь 5	Чугун	Дерево	λ	Сталь 3	Сталь 5	Чугун	Дерево
0	1,00	1,00	1,00	1,00	110	0,52	0,43	-	0,25
10	0,99	0,98	0,97	0,99	120	0,45	0,37	-	0,22
20	0,96	0,95	0,91	0,97	130	0,40	0,33	-	0,18
30	0,94	0,92	0,81	0,93	140	0,36	0,29	-	0,16
40	0,92	0,89	0,69	0,87	150	0,32	0,26	-	0,14
50	0,89	0,86	0,57	0,80	160	0,29	0,24	-	0,12
60	0,86	0,82	0,44	0,71	170	0,26	0,21	-	0,11
70	0,81	0,76	0,34	0,60	180	0,23	0,19	-	0,10
80	0,75	0,70	0,26	0,48	190	0,21	0,17	-	0,09
90	0,69	0,62	0,20	0,38	200	0,19	0,16	-	0,08
100	0,60	0,51	0,16	0,31					

Из таблицы 2.1 для Ст.3 по найденной величине λ определяем $\varphi_1' = 0,714$.

Коэффициент сходимости:

Перв. примен.

$$\eta_{\varphi} = \frac{|\varphi_1'' - \varphi_1|}{\varphi_1} 100\% = 43\% .$$

Различие между заданным значением и полученным из таблицы больше 5%, что недопустимо.

Проводим расчет во втором приближении. Для коэффициента φ задаем новое значение:

$$\varphi = \varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1'}{2} = 0.607 .$$

Повторяя расчеты, определяем:

$$A_c = 2,12 \text{ см}^2, D = 3,78 \text{ см}, i_{min} = 1,27 \text{ см}, \lambda = 94$$

Из таблицы 2.1 находим $\varphi_2' = 0,654$. Коэффициент сходимости $\eta_{\varphi} = 7,7\% > 5$.

В третьем приближении: $\varphi_3 = 0,631$, $A_c = 2,04 \text{ см}^2$, $D = 3,7 \text{ см}$, $i_{min} = 1,24 \text{ см}$, $\lambda = 97$, $\varphi_3' = 0,627$. Коэффициент сходимости $\eta_{\varphi} = 6,0\% < 5\%$. Следовательно, итерационный процесс по φ можно закончить.

В качестве окончательных значений принимаем $\varphi = \varphi_3' = 0,627$, диаметр стойки $D = 3,7 \text{ см}$. При этом напряжение в стойке $\sigma = \frac{X_1}{A_c} = 101 \text{ МПа}$, допускаемое напряжение на устойчивость $[\sigma]_y = \varphi[\sigma] = 100 \text{ МПа}$.

Коэффициент перенапряженности:

Подпись и дата

Инв. № дубл.

Взам. инв. №

Подпись и дата

Инв. № подл.

Лист

БР – 15.03.03 ПЗ

60

Изм. Лист № докум. Подпись Дата

$$\eta_{\sigma} = \frac{|\sigma - [\sigma_c]_y|}{[\sigma_c]_y} 100\% = 1\% .$$

Подставляя найденные значения l и A_c в уравнение (2.5), определяем уточненное значение силы $X = X_1'$:

$$X_1' = \frac{\nabla l_c - \delta_{1F}}{\delta_{11}} = 20,3 \text{ кН}$$

Сравнивая X_1' с первоначальным значением силы X_1 , получаем

$$\eta_x = \frac{|X_1' - X_1|}{X_1} \cdot 100\% = 1,5\% > 1\%$$

Следовательно, точность вычисления значение силы X недостаточна, необходимо рассмотреть второе приближение.

За начальное значение силы X во втором приближении принимаем $X_2 = X_1' = 20,3 \text{ кН}$ и проводим вычисления, начиная с пункта 2. В результате получаем: максимальный изгибающий момент $M_{\max} = -53,8 \text{ кНм}$, момент сопротивления $W_x \geq 336 \text{ см}^3$. Из таблицы сортамента выбирается двутавр №27, для которого $W_x^T = 371 \text{ см}^3$, $I_x^T = 5010 \text{ см}^4$. После расчёта на устойчивость находим $D = 3,69 \text{ см}$, $\phi = 0,625$.

Из решения статически неопределимой задачи имеем $X_2' = 20,3 \text{ кН}$, т.е. $\eta_x = 0$. Следовательно, второе приближение дает искомое решение задачи. Окончательный ответ: для балки выбирается двутавр №27, диаметр стойки $D = 3,69 \text{ см}$.

2.2 Устойчивость прямоугольной пластины и её расчёт

2.2.2 Устойчивость шарнирно опёртых прямоугольных пластин при равномерном сжатии в одном направлении

Рассмотрим пластину при действии на нее сжимающих усилий, лежащих в срединной плоскости (рисунок 2.3). При некотором значении сжимающих сил N_x плоская форма равновесия становится неустойчивой и пластина начнет выпучиваться.

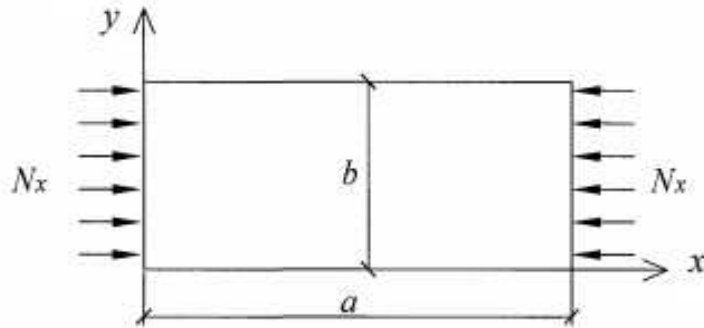


Рисунок 2.3

Примем, что пластина имеет шарнирное опирание по контуру и сжата равномерно распределенными силами N_x , действующими вдоль граней с координатами $x=0$ и $x=a$. В этом случае $N_x = -const$ и $N_y = T_x = q = 0$. Уравнения равновесия выполняются, а уравнение (2.6) принимает вид:

$$D\nabla^4 w + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0. \quad (2.6)$$

Функцию прогибов задаём в виде двойного ряда

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (2.7)$$

Граничные условия на гранях пластины $x = 0$; $x = a$ и $y = 0$; $y = b$ для принятой функции выполняются. Подставляя (2.7) в уравнение (2.6), получим

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left[D\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - N_x \pi^2 \frac{m^2}{a^2} \right] A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0 \quad (2.8)$$

Полученное уравнение (2.8) имеет два решения. Первое решение, когда $A_{mn} = 0$. Тогда прогибы $w = 0$. Однако это решение не удовлетворяет условию задачи, т.к. мы ищем функцию прогибов, отличную от нуля. Второе решение имеет место при $A_{mn} \neq 0$. Тогда в (2.8) выражение в квадратной скобке должно быть равно нулю:

$$D\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - N_x \pi^2 \frac{m^2}{a^2} = 0. \quad (2.9)$$

Из условия (2.9) следует, что

$$N_x \frac{D\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}{\frac{m^2}{a^2}} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{n^2 a}{mb} \right)^2. \quad (2.10)$$

Это решение отвечает выпучиванию пластины. Из выражения (2.10) следует, что значение сил N_x будет наименьшим при $n = 1$. Отсюда следует вывод о том, что при выпучивании пластины может образовываться несколько

полуволн в направлении сжатия, и только одна полуволна – в поперечном направлении oy . Критическая нагрузка $(N_x)_{кр}$, при которой происходит потеря устойчивости пластины, равна:

$$(N_x)_{кр} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2 = K \frac{\pi^2 D}{b^2}, \quad (2.11)$$

где $K = \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right)^2$.

Наименьшее значение $(N_x)_{кр}$ имеет место при условии

$$\frac{d(N_x)_{кр}}{d\left(\frac{mb}{a}\right)} = \frac{2\pi^2 D}{b^2} \left(\frac{mb}{a} + \frac{a}{mb} \right) \left[1 - \frac{1}{\left(\frac{mb}{a}\right)^2} \right] = 0. \quad (2.22)$$

Отсюда следует следующее равенство: $\frac{mb}{a} = 1$

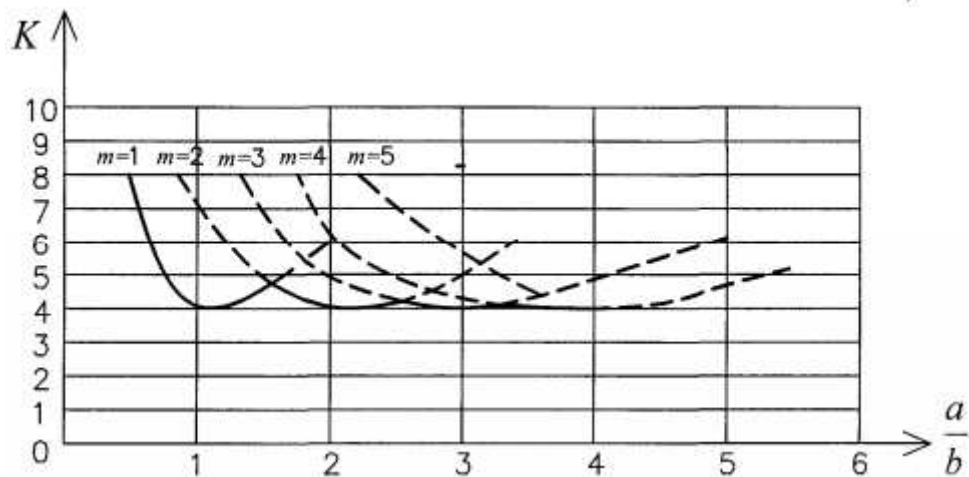


Рисунок 2.4

Минимальное значение критической нагрузки $(N_x)_{кр} = \frac{4\pi^2 D}{b^2}$.

При определенных значениях m величина K зависит от отношения $\frac{a}{b}$. На рисунке 2.4 показаны значения K в зависимости от $\frac{a}{b}$ для $m = 1, 2, 3, 4, 5$.

Используя полученные кривые, можно определять величину критической нагрузки и число полуволн при любом отношении $\frac{a}{b}$. При значении $\frac{a}{b} = 2,5$ находим $K = 4,133$ и $m = 3$. Это показывает, что выпучивание пластины сопровождается образованием трех полуволн в направлении действия нагрузки. Критическая нагрузка при этом равна: $(N_x)_{кр} = 4,133 \frac{\pi^2 D}{b^2}$.

2.2.3 Устойчивость свободно опертой пластины, сжатой в двух направлениях

Рассмотрим прямоугольную пластину, сжатую в двух взаимно перпендикулярных направлениях (рисунок 2.5).

В этом случае $T_{xy} = 0$; $N_x = -\text{const}$; $N_y = -\text{const}$. Полагаем, что края пластины имеют шарнирное опирание. Решение уравнения (2.6) снова будем искать в виде двойного ряда:

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (2.23)$$

Выбранная функция $w(x,y)$ удовлетворяет граничным условиям на гранях пластины при $x=0$; $x=a$; $y=0$; $y=b$.

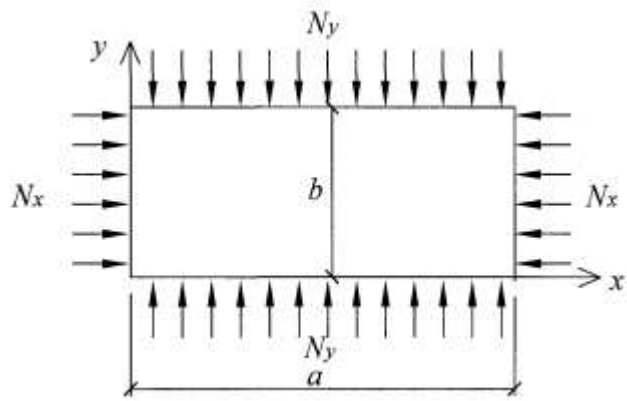


Рисунок 2.5

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left[D\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - N_x \pi^2 \frac{m^2}{a^2} - N_y \pi^2 \frac{n^2}{b^2} \right] \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = 0$$

Условие $A_{mn} \neq 0$ возможно в случае, если

$$D\pi^4 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - N_x \pi^2 \frac{m^2}{a^2} - N_y \pi^2 \frac{n^2}{b^2} = 0. \quad (2.24)$$

Из уравнения (2.9) следуют

$$N_x \pi^2 \frac{m^2}{a^2} + N_y \pi^2 \frac{n^2}{b^2} = D\pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right). \quad (2.25)$$

Рассмотрим частные случаи:

$$а) N_x = N_y = N; (N_x)_{кр} = (N_y)_{кр} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left[\left(\frac{mb}{a} \right)^2 + n^2 \right].$$

Наименьшая критическая сила будет при $m=1; n=1$.

$$N_{кр} = \frac{\pi^2 D}{b^2} \left[\left(\frac{b}{a} \right)^2 + 1 \right].$$

Пластина при этом будет терять устойчивость по форме:

$$w(x, y) = A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Для квадратной пластинки при $a = b$, $N_{кр} = 2 \frac{\pi^2 D}{b^2}$;

б) если сжимающие нагрузки возрастают пропорционально одному параметру α $N_x = N$; $N_y = \alpha \cdot N$, то критическая нагрузка будет равна

$$N_{кр} = \frac{\pi^2 D \left[\left(\frac{mb}{a} \right)^2 + n^2 \right]^2}{b^2 \left(\frac{mb}{a} \right)^2 + \alpha \cdot n^2}. \quad (2.26)$$

При соотношении сторон $a > b$ наименьшее значение критической силы равно:

$$N_{кр} = C \frac{\pi^2 D}{b^2}, \text{ где } C = \frac{\left[\left(\frac{mb}{a} \right)^2 + 1 \right]^2}{\left(\frac{mb}{a} \right)^2 + \alpha}.$$

При разных соотношениях $\frac{a}{b}$ и каждого α число n следует выбирать из условия минимума C , как это делалось для пластины, сжатой в одном направлении;

в) если пластина сжата в одном направлении ox и растянута в другом направлении oy , то $T_{xy} = 0$; $N_x = -\text{const}$; $N_y = \text{const}$. Уравнение (2.6) принимает вид:

$$N_x \pi^2 \frac{m^2}{a^2} - N_y \pi^2 \frac{n^2}{b^2} = D \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2. \quad (2.27)$$

При $N_x = N_y$ получаем критическую нагрузку

$$N_{кр} = \pi^2 D \frac{\left[\left(\frac{m}{a} \right)^2 + \left(\frac{n}{b} \right)^2 \right]^2}{\left(\frac{m}{a} \right)^2 - \left(\frac{n}{b} \right)^2}. \quad (2.28)$$

Для квадратной пластины $a = b$

$$N_{кр} = \frac{\pi^2 D (m^2 + n^2)^2}{b^2 (m^2 - n^2)}. \quad (2.29)$$

Наименьшее значение возможно при $m = 1$, а n необходимо подобрать так, чтобы $N_{кр}$ было наименьшим. Так, при потере устойчивости пластины по форме $w(x, y) = A_{21} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$ критическая сила равна ($m = 2$; $n = 1$)

$$N_{кр} = \frac{25 \pi^2 D}{3 b^2}. \quad (2.30)$$

Во всех случаях для пластин с конечным отношением сторон при растяжении в направлении одной из осей увеличивается критическая сила в направлении другой оси.

Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата
------	------	----------	---------	------

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

- 1 В данной работе дан краткий обзор исследованию устойчивости, определению пластин и стержней, а так же более подробно рассмотрены методы устойчивости.
- 2 Особое внимание представили интерес к сформулированному методу С. П. Тимошенко – энергетический метод решения задач устойчивости упругих систем. Использование данного метода позволяет наиболее широко оценить ресурс конструкций, чем при других методах (метод Эйлера, метод Лагранжа и метод Кармана).
- 3 В следующем разделе выполнено описание и расчеты для стержневой системы, а также расчеты на устойчивость шарнирно опёртых прямоугольных пластин при равномерном сжатии в одном и в двух направлениях.

Перв. примен.

Справ. №

Подпись и дата

Инв. № дубл.

Взам. инв. №

Подпись и дата

Инв. № подл.

Изм.	Лист	№ докум.	Подпись	Дата

БР – 15.03.03 ПЗ

Лист

69

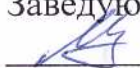
Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ПОЛИТЕХНИЧЕСКИЙ ИНСТИТУТ

институт
ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

кафедра

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой

 А.Е. Митяев

подпись инициалы, фамилия
« 9 » 07 2019 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

15.03.03 Прикладная механика

Исследование устойчивости стержней и пластин

Руководитель



подпись, дата

доцент, к.т.н
должность, ученая степень

А.Е. Митяев

Выпускник



подпись, дата

В.В. Войтюкова

Красноярск 2019