УДК 517.994

О неравенстве типа Фридрихса для составных областей

Виктор К.Андреев*
Институт вычислительного моделирования СО РАН,
Академгородок 50/44, Красноярск, 660036,
Россия

Получена 18.02.2009, окончательный вариант 20.03.2009, принята к печати 10.04.2009

Доказаны интегральные неравенства типа Фридрихса для составных областей при наличии плоской и цилиндрической симметрий. Найдены оптимальные постоянные, входящие в правые части неравенств. Эти постоянные зависят от физических и геометрических параметров областей. Рассмотрены некоторые обобщения полученных неравенств на другие формы областей.

Ключевые слова: априорная оценка, неравенство Фридрихса, вариационная задача.

Введение

Во многих задачах математической физики (см., например, [1]–[5] и др.) хорошо известна роль неравенства

$$\int\limits_{\Omega} u^2(y)\,dy \leqslant \frac{1}{\lambda_1}\int\limits_{\Omega} |\nabla u(y)|^2\,dy, \tag{1}$$

справедливого для любой ограниченной области $\Omega \subset R^n$ и любой функции $u(y) \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega)$. В (1) число λ_1 — наименьшее положительное собственное значение спектральной задачи

$$-\Delta w = \lambda w, \quad y \in \Omega, \quad w\big|_{\Gamma} = 0, \tag{2}$$

где Γ — граница Ω.

Для симметричных областей задача (2) решается методом разделения переменных, и λ_1 легко находится [6, 7]. В общем же случае нетрудно получить оценку [1, с. 22]

$$\lambda_1 \geqslant \frac{1}{d^2}\,, \tag{3}$$

где d — ширина n-мерной полосы, в которую можно заключить область Ω. Тем самым условие ограниченности Ω в неравенстве (1) является существенным.

Неравенство (1) часто называют неравенством Фридрихса [2, с. 56], или неравенством Пуанкаре–Фридрихса [3, с. 62], а иногда неравенством Стеклова [4, с. 150], так что в заглавие статьи можно было бы вынести все эти знаменитые фамилии. Мы будем придерживаться терминологии книги [2].

В одномерном случае $\Omega = (a, b) \subset R^1$ (считаем $a < b$), $u(a) = u(b) = 0$ имеем $\lambda_1 = \pi^2/(b-a)^2$, значит

$$\int\limits_a^b u^2(y)\,dy \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2}\int\limits_a^b u'^2(y)\,dy. \tag{4}$$

*e-mail: andr@icm.krasn.ru

Подчеркнём, что в правой части (1) нельзя заменить λ_1^{-1} меньшим числом. Это следует из того, что λ_1^{-1} находится из решения вариационной задачи

$$\lambda_1^{-1} = \sup_{w \in \overset{\circ}{W}{}_2^1} \frac{\int\limits_\Omega w^2(y)\,dy}{\int\limits_\Omega |\nabla w(y)|^2\,dy}. \tag{5}$$

Задачей Эйлера для λ_1^{-1} и является в точности спектральная задача (2). В теоретических же работах часто вместо λ_1^{-1} пишут просто: найдётся такая постоянная $c > 0$, что

$$\int\limits_\Omega u^2(y)\,dy \leqslant c \int\limits_\Omega |\nabla u(y)|^2\,dy.$$

Например, в одномерном случае можно показать [5, с. 583], что

$$\int\limits_a^b u^2(y)\,dy \leqslant \frac{(b-a)^2}{8} \int\limits_a^b u'^2(y)\,dy. \tag{6}$$

Здесь $c = (b-a)^2/8 > (b-a)^2/\pi^2 = \lambda_1^{-1}$. Если только лишь $u(b) = 0$ или $u(a) = 0$, то имеем оценку

$$\int\limits_a^b u^2(y)\,dy \leqslant \frac{(b-a)^2}{2} \int\limits_a^b u'^2(y)\,dy \tag{7}$$

с ещё большей постоянной в правой части. Априорные оценки (6), (7) получаются с помощью формулы Ньютона–Лейбница, неравенства Коши–Буняковского и не требуют решения уравнений Эйлера. Заметим, что не во всех случаях можно найти точные решения уравнений Эйлера.

В данной статье неравенства вида (4) — одномерный случай — будут обобщены для областей вида $\Omega = (a_1, b_1) \cup (b_1, b_2)$, причём на общей границе интервалов (в точке b_1) функции $u_1(y)$, $y \in (a_1, b_1)$, $u_2(y)$, $y \in (b_1, b_2)$ удовлетворяют дополнительным условиям. В физических задачах $y = b_1$ представляет собой поверхность раздела: между двумя разными вязкими жидкостями, движущимися только в направлении оси x, между двумя теплопроводными массивами [8, 9]. Конечно, здесь в качестве основных будут фигурировать подпространства из $W_2^1(a_1, b_1) \times W_2^1(b_1, b_2)$ в случае плоской симметрии и $W_2^1(r; a_1, b_1) \times W_2^1(r; b_1, b_2)$ в случае цилиндрической симметрии.

1. Случай плоской симметрии

При рассмотрении однонаправленного движения в плоских слоях $-l_1 < y < 0$, $0 < y < l_2$ с общей границей раздела $y = 0$ и твёрдыми стенками $y = -l_1$, $y = l_2$ возникает следующая начально-краевая задача [10]:

$$u_{1t} = \nu_1 u_{1yy}, \quad -l_1 < y < 0; \tag{8}$$

$$u_{2t} = \nu_2 u_{2yy}, \quad 0 < y < l_2; \tag{9}$$

$$u_1(y, 0) = u_{10}(y), \quad u_2(y, 0) = u_{20}(y); \tag{10}$$

$$u_1(0,t) = u_2(0,t), \quad \mu_1 u_{1y}(0,t) = \mu_2 u_{2y}(0,t); \tag{11}$$

$$u_2(-l_1,t) = u_2(l_2,t) = 0, \tag{12}$$

причём выполнены условия согласования

$$u_{10}(0) = u_{20}(0), \quad \mu_1 u_{10y}(0) = \mu_2 u_{20y}(0), \quad u_{10}(-l_1) = u_{20}(l_2) = 0. \tag{13}$$

В (8), (9), (11) постоянные ν_j, $j = 1,2$, суть кинематические вязкости, $\mu_j = \rho_j \nu_j$ — динамические вязкости, а ρ_j — постоянные плотности жидкостей. Функции $u_j(y,t)$ — искомые скорости в направлении оси OX.

Кинетическая энергия системы (8)–(13)

$$E(t) = \frac{1}{2}\,\rho_1 \int\limits_{-l_1}^{0} u_1^2(y,t)\,dy + \frac{1}{2}\,\rho_2 \int\limits_{0}^{l_2} u_2^2(y,t)\,dy \tag{14}$$

удовлетворяет равенству [10]

$$\frac{dE}{dt} + \mu_1 \int\limits_{-l_1}^{0} u_{1y}^2(y,t)\,dy + \mu_2 \int\limits_{0}^{l_2} u_{2y}^2(y,t)\,dy = 0. \tag{15}$$

Если сумма двух интегральных слагаемых больше или равна $\delta E(t)$ ($\delta = \text{const} > 0$), то из (15) получим неравенство $dE/dt + \delta E \leqslant 0$. Значит,

$$E(t) \leqslant E(0)e^{-\delta t}, \tag{16}$$

где $E(0)$ даётся выражением (14) с заменой $u_j(y,t)$ на $u_{j0}(y)$ из (10). Поэтому желательно, чтобы в априорной оценке (16) было как можно большее δ. Это, в свою очередь, приводит к установлению неравенства (здесь время выступает как параметр и не указывается в функциях u_j)

$$\int\limits_{-l_1}^{0} u_1^2(y)\,dy + \int\limits_{0}^{l_2} u_2^2(y)\,dy \leqslant M\Bigg(\mu_1 \int\limits_{-l_1}^{0} u_{1y}^2(y)\,dy + \mu_2 \int\limits_{0}^{l_2} u_{2y}^2(y)\,dy\Bigg) \tag{17}$$

и определению минимальной положительной постоянной M_0 среди всех $M > 0$. Конечно, в (17) $u_j(y)$ удовлетворяют условиям (11), (12).

Лемма 1. *Имеет место неравенство* (17) *с постоянной* M_0, *не зависящей от* $u_j(y)$ *и являющейся решением вариационной задачи*

$$M_0 = \sup_{w_1,w_2 \in V} \left[\frac{\int\limits_{-l_1}^{0} w_1^2(y)\,dy + \int\limits_{0}^{l_2} w_2^2(y)\,dy}{\mu_1 \int\limits_{-l_1}^{0} w_{1y}^2(y)\,dy + \mu_2 \int\limits_{0}^{l_2} w_{2y}^2(y)\,dy}\right]. \tag{18}$$

Множество V *— подпространство* $W_2^1(-l_1,0) \times W_2^1(0,l_2)$, *и для* $w_j(y)$ *выполнены граничные условия* (11), (12).

Доказательство. Рассмотрим функционал

$$F(w_1,w_2)=\sup_{w_1,w_2\in V}\left[\frac{\int\limits_{-l_1}^{0} w_1^2(y)\,dy+\int\limits_{0}^{l_2} w_2^2(y)\,dy}{\mu_1\int\limits_{-l_1}^{0} w_{1y}^2(y)\,dy+\mu_2\int\limits_{0}^{l_2} w_{2y}^2(y)\,dy}\right], \tag{19}$$

где w_1, $w_2\in V$. Очевидно, что функция $f(\tau)=F(w_1+\tau h_1,w_2+\tau h_2)$ имеет производную при $\tau=0$ для всех h_1, $h_2\in V$, а F дифференцируем по Фреше. Тогда [11, с. 161] существует первая вариация по Лагранжу функционала F в точке (w_1,w_2) и

$$\delta F(w_1,w_2)(h_1,h_2)=f'(0).$$

Простые вычисления показывают, что

$$\delta F(w_1,w_2)(h_1,h_2)=\frac{2}{Z}\left[\int\limits_{-l_1}^{0} w_1h_1\,dy+\int\limits_{0}^{l_2} w_2h_2\,dy-\right.$$

$$\left.-F(w_1,w_2)\left(\mu_1\int\limits_{-l_1}^{0} w_{1y}h_{1y}\,dy+\mu_2\int\limits_{0}^{l_2} w_{2y}h_{2y}\,dy\right)\right],$$

где Z — знаменатель в формуле (19).

Пусть теперь w_1, w_2 таковы, что на них достигается равенство (18). Имеем $F(w_1,w_2)=M_0$ и $\delta F(w_1,w_2)(h_1,h_2)=0$ [11, с. 240]. Поэтому

$$\int\limits_{-l_1}^{0}(w_1h_1-\mu_1M_0w_{1y}h_{1y})\,dy+\int\limits_{0}^{l_2}(w_2h_2-\mu_2M_0w_{2y}h_{2y})\,dy=0.$$

Далее воспользуемся произволом функций h_1, $h_2\in W_2^1(-l_1,0)\times W_2^1(0,l_2)$. Положим сначала $h_2=0$, $h_1(-l_1)=0$, $h_1(0)=0$, а затем $h_1=0$, $h_2(l_2)=0$, $h_2(0)=0$. Для таких h_1, h_2 получим

$$\int\limits_{-l_1}^{0}(w_1h_1-\mu_1M_0w_{1y}h_{1y})\,dy=0,\quad \int\limits_{0}^{l_2}(w_2h_2-\mu_2M_0w_{2y}h_{2y})\,dy=0.$$

По лемме Дюбуа–Реймона [11, с. 62] получим отсюда уравнения Эйлера вариационной задачи (18) (по этой лемме вторые производные w_{jyy} существуют):

$$\begin{aligned} &w_{1yy}+\frac{1}{\mu_1M_0}\,w_1=0,\quad -l_1<y<0,\\ &w_{2yy}+\frac{1}{\mu_2M_0}\,w_2=0,\quad 0<y<l_2.\end{aligned} \tag{20}$$

Функции $w_1(y)$, $w_2(y)$ удовлетворяют граничным условиям (11), (12): $w_1(-l_1)=0$, $w_2(l_2)=0$, $w_1(0)=w_2(0)$, $\mu_1w_{1y}(0)=\mu_2w_{2y}(0)$.

Общие решения уравнений (20) находятся без труда ($j=1,2$):

$$w_j(y)=C_1^j\sin\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_jM_0}}\,y\right)+C_2^j\cos\left(\frac{1}{\sqrt{\mu_jM_0}}\,y\right).$$

С учётом граничных условий получим систему линейных однородных уравнений на постоянные C_1^j, C_2^j:

$$C_2^1 = C_2^2, \quad \sqrt{\mu_1}\, C_1^1 = \sqrt{\mu_2}\, C_1^2,$$

$$-C_1^1 \sin\left(\frac{l_1}{\sqrt{\mu_1 M_0}}\right) + C_2^1 \cos\left(\frac{l_1}{\sqrt{\mu_1 M_0}}\right) = 0,$$

$$C_1^2 \sin\left(\frac{l_2}{\sqrt{\mu_2 M_0}}\right) + C_2^2 \cos\left(\frac{l_2}{\sqrt{\mu_2 M_0}}\right) = 0.$$

Нетривиальное решение последней системы существует тогда и только тогда, когда

$$\sin(a_1 z)\cos(a_2 z) + a_2 \sin(a_2 z)\cos(a_1 z) = 0, \tag{21}$$

где $a_1 = l_1/l_2$, $a_2 = (\mu_1/\mu_2)^{1/2}$, $z = l_2/(\mu_1 M_0)^{1/2}$.

Таким образом, M_0 (точнее, z) является решением уравнения (21), причем нам подходит наименьшее положительное решение этого уравнения для фиксированных $a_1 > 0$, $a_2 > 0$. Легко видеть, что решения этого уравнения всегда вещественные и если z — решение, то $-z$ — тоже решение. Поэтому решение (21) можно искать при $z > 0$. Существование положительного решения уравнения (21) доказывается совсем просто. Действительно, если $g(z)$ — левая часть (21), то $g(0) = 0$, $g'(0) > 0$ и $g(z) > 0$ вблизи точки $z = 0$. Однако $g(z_1) < 0$, где $z_1 = \pi/a_1$ при $a_1 > a_2$ и $g(z_2) < 0$, где $z_2 = \pi/a_2$ при $a_2 > a_1$. Значит, $g(z)$ на интервале $(0, z_1)$, когда $a_1 > a_2$, или на интервале $(0, z_2)$, когда $a_1 < a_2$, имеет, по крайней мере, одно решение. При $a_1 = a_2$ из (21) $\sin(2a_1 z) = 0$, откуда минимальное значение есть $\pi/2a_1$, т. е. в этом случае $M_0 = 4l_1^2/(\mu_1\pi^2)$. □

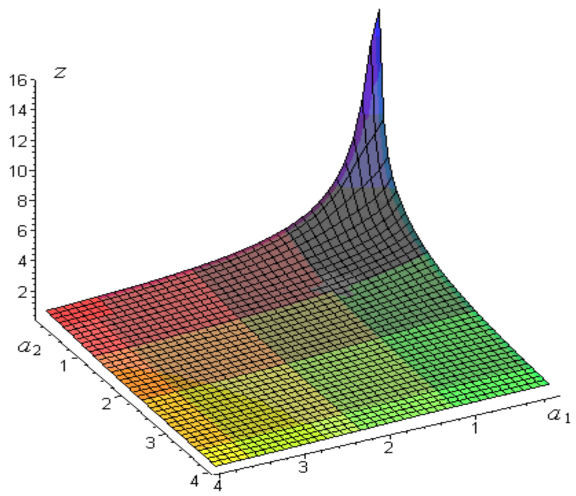

Рис. 1. Поверхность минимальных положительных нулей уравнения (11)

Замечание 1. *Минимальные положительные нули уравнения* (21) *образуют поверхность* $z(a_1, a_2)$, *см. рис. 1 (для наглядности система координат вынесена во вне поверхности нулей). При* $a_1 = a_2 = 0$ z *— любое положительное; если* $a_1 = 0$, $a_2 > 0$, *то* $z = \pi/a_2$; *если* $a_2 = 0$, $a_1 > 0$, *то* $z = \pi/a_1$; *если* $a_2 = 1$, *то* $z = \pi/(1 + a_1)$.

Замечание 2. *Поскольку функции* $u_1(y)$, $u_2(y)$ *удовлетворяют условиям* (12), *то согласно* (7) *неравенство* (17) *будет выполнено с постоянной*

$$M = \frac{1}{2}\max\left(\frac{l_1^2}{\mu_1}, \frac{l_2^2}{\mu_2}\right). \tag{22}$$

Покажем, например, что $M_0 = (l_1 + l_2)^2/(\mu_1\pi^2)$ *(это соответствует решению* $z = \pi/(1 + a_1)$ *при* $a_2 = 1$*) меньше, чем постоянная* M *из* (22)*:* $M_0 < M$*. Действительно, здесь* $\mu_1 = \mu_2$ *и* $(l_1 + l_2)^2/\pi^2 < 2\max(l_1^2, l_2^2)/\pi^2 < \max(l_1^2, l_2^2)/2$.

Замечание 3. *Укажем функции* $w_1(y)$, $w_2(y)$*, на которых достигается равенство* (18) *(с точностью до мультипликативной постоянной)*

$$w_1(y) = \sin\left(\frac{y + l_1}{\sqrt{\mu_1 M_0}}\right)\Big/\cos\left(\frac{l_1}{\sqrt{\mu_1 M_0}}\right),$$

$$w_2(y) = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}}\sin\left(\frac{y}{\sqrt{\mu_2 M_0}}\right) + \operatorname{tg}\left(\frac{l_1}{\sqrt{\mu_1 M_0}}\right)\cos\left(\frac{y}{\sqrt{\mu_2 M_0}}\right).$$

Замечание 4. *Постоянная* δ *в неравенстве* (16) *равна*

$$\delta = \frac{2}{M_0}\min\left(\frac{1}{\rho_1}, \frac{1}{\rho_2}\right).$$

Согласно лемме 1 она является максимальной, зависит от физических свойств жидкостей и толщин слоёв.

2. Цилиндрическая симметрия

Цель этого пункта — доказательство неравенства ($0 < a < b$)

$$\int_0^a r u_1^2\,dr + \int_a^b r u_2^2\,dr \leqslant M\left(\mu_1\int_0^a r u_{1r}^2\,dr + \mu_2\int_a^b r u_{2r}^2\,dr\right) \tag{23}$$

для любых функций $u_1(r) \in W_2^1(r; 0, a)$, $u_2(r) \in W_2^1(r; a, b)$, удовлетворяющих условиям

$$|u_1(0)| < \infty, \quad u_1(a) = u_2(a), \quad \mu_1 u_{1r}(a) = \mu_2 u_{2r}(a), \quad u_2(b) = 0. \tag{24}$$

Необходимость такого неравенства возникает, например, при анализе начально-краевой задачи, описывающей совместное однонаправленное движение двух вязких жидкостей в цилиндрической трубе. Заметим, что для функции $w_2(r)$ имеет место неравенство Фридрихса

$$\int_a^b r u_2^2\,dr \leqslant c\int_a^b r u_{2r}^2\,dr \tag{25}$$

с постоянной

$$c = \frac{a^2}{4}\left(\frac{b^2}{a^2} - 2\ln\frac{b}{a} - 1\right) > 0. \tag{26}$$

Этот результат есть следствие равенства

$$u_2(r) = -\int\limits_r^b u_{2r}\,dr.$$

Действительно,

$$|u_2(r)| \leqslant \int\limits_r^b \frac{1}{\sqrt{r}}\,(\sqrt{r}u_{2r})\,dr \leqslant \left(\ln\frac{b}{r}\right)^{1/2}\left(\int\limits_a^b ru_{2r}^2\,dr\right)^{1/2}.$$

Поэтому

$$\int\limits_a^b ru_2^2(r)\,dr \leqslant \int\limits_a^b r\ln\frac{b}{r}\,dr\int\limits_a^b ru_{2r}^2\,dr,$$

откуда и следует оценка (25) с постоянной (26).

Что касается функции $u_1(r)$, то для неё неравенство вида (25) установить не удаётся без дополнительных предположений, см. ниже лемму 3.

Лемма 2. *Имеет место неравенство* (23) *с постоянной M_0, не зависящей от u_j и являющейся решением вариационной задачи*

$$M_0 = \sup_{w_1,w_2\in V}\left[\frac{\int\limits_0^a rw_1^2\,dr + \int\limits_a^b rw_2^2\,dr}{\mu_1\int\limits_0^a rw_{1r}^2\,dr + \mu_2\int\limits_a^b rw_{2r}^2\,dr}\right]. \tag{27}$$

Множество V является подпространством $W_2^1(r;0,a)\times W_2^1(r;a,b)$, причём выполнены граничные условия (24) *для w_1, w_2.*

Доказательство. Уравнениями Эйлера для задачи (27) будут

$$\begin{aligned} &w_1'' + \frac{1}{r}\,w_1' + \frac{1}{\mu_1 M_0}\,w_1 = 0, \quad 0<r<a,\\ &w_2'' + \frac{1}{r}\,w_2' + \frac{1}{\mu_2 M_0}\,w_2 = 0, \quad a<r<b \end{aligned} \tag{28}$$

с граничными условиями (24). Действительно, пусть $w_1(x)$, $w_2(x)\in V$ — функции, на которых достигается решение вариационной задачи (27). Введём функционал

$$F(w_1,w_2) = \frac{\int\limits_0^a rw_1^2\,dr + \int\limits_a^b rw_2^2\,dr}{\mu_1\int\limits_0^a rw_{1r}^2\,dr + \mu_2\int\limits_a^b rw_{2r}^2\,dr} \tag{29}$$

и вычислим его первую вариацию. Рассмотрим функцию $\theta(\tau) = F(w_1+\tau h_1, w_2+\tau h_2)$, где $h_1(x)$, $h_2(x)\in V$. При $\tau=0$ она имеет максимум, значит $\theta'(0)=0$, но
$\theta'(0) = \delta F(w_1,w_2)(h_1,h_2)$ есть первая вариация. Заменяя в (29) w_1 на $w_1+\tau h_1$, w_2 на $w_2+\tau h_2$ и вычисляя производную, находим

$$\delta F(w_1,w_2)(h_1,h_2) = \frac{2}{Z}\left[\int\limits_0^a rw_1h_1\,dr + \int\limits_a^b rw_2h_2\,dr - M_0\left(\int\limits_0^a rw_{1r}h_{1r}\,dr + \int\limits_a^b rw_{2r}h_{2r}\,dr\right)\right] = 0,$$

где Z — знаменатель в равенстве (29). Следовательно,

$$\int_0^a r(w_1h_1 - M_0w_{1r}h_{1r})\,dr + \int_a^b r(w_2h_2 - M_0w_{2r}h_{2r})\,dr = 0, \quad h_1,\, h_2 \in V.$$

Выбирая, в силу произвольности h_1, h_2, $h_2 \equiv 0$, тогда $h_1(a) = 0$, или $h_1 \equiv 0$, тогда $h_2(0) = h_2(b) = 0$, получим

$$\int_0^a r(w_1h_1 - M_0w_{1r}h_{1r})\,dr = 0, \quad \int_a^b r(w_2h_2 - M_0w_{2r}h_{2r})\,dr = 0.$$

Интегрируя по частям, выводим

$$\int_0^a [M_0(rw_{1r})_r + rw_1]h_1\,dr = 0, \quad \int_a^b [M_0(rw_{2r})_r + rw_2]h_2\,dr = 0,$$

откуда, используя основную лемму вариационного исчисления [11, с. 62] — лемму Дюбуа–Реймона, приходим к задаче (28).

Решение задачи (28) таково:

$$w_1 = C_1J_0\left(\frac{1}{\sqrt{M_0\mu_1}}\,r\right), \quad w_2 = C_2J_0\left(\frac{1}{\sqrt{M_0\mu_2}}\,r\right) + C_3Y_0\left(\frac{1}{\sqrt{M_0\mu_2}}\,r\right). \tag{30}$$

Теперь из граничных условий $w_1(a) = w_2(a)$, $w_2(b) = 0$, $\mu_1w_{1r}(a) - \mu_2w_{2r}(a) = 0$ получим уравнение для нахождения M_0. Если обозначить $a_1 = b/a$, $a_2 = (\mu_1/\mu_2)^{1/2}$, $x = a/\sqrt{\mu_1M_0}$, то M_0 (точнее x) есть корень трансцендентного уравнения

$$\begin{gathered} J_0(x)[J_1(a_2x)Y_0(a_1a_2x) - J_0(a_1a_2x)Y_1(a_2x)]+ \\ +a_2J_1(x)[J_0(a_1a_2x)Y_0(a_2x) - J_0(a_2x)Y_0(a_1a_2x)] = 0, \end{gathered} \tag{31}$$

где J_k, Y_k $(k = 0, 1)$ — функции Бесселя первого и второго рода.

Покажем, что уравнение (31) имеет положительные решения при $a_1 > 1$, $0 < a_2 < 1$. Обозначим левую часть (31) через $f(x, a_1, a_2)$. Из свойств бесселевых функций [6] следует, что $\lim\limits_{x\to+0} f(x, a_1, a_2) = +\infty$. Далее, если $x_0 \approx 2.40482$ — первый положительный нуль функции $J_0(x)$, то

$$f(x_0, a_1, a_2) = a_2J_1(x_0)[J_0(a_1z)Y_0(z) - J_0(z)Y_0(a_1z)],$$

где $z = a_2x_0 \leqslant x_0$. Поскольку нули функций $J_0(x)$ и $J_1(x_0)$ перемежаются [6], то $J_1(x_0) > 0$. С другой стороны, $f(x_0, 1, a_2) = 0$, а производная по a_1 при $a_1 = 1$ (z считается фиксированным числом)

$$f_{a_1}(x_0, 1, a_2) = -a_2zJ_1(x_0)[J_1(z)Y_0(z) - J_0(z)Y_1(z)] = -2a_2J_1(x_0)/\pi < 0.$$

Значит, $f(x_0, a_1, a_2) < 0$ в окрестности $1 < a_1 < 1 + \varepsilon$, и функция $f(x, a_1, a_2)$ меняет знак при $x \in [0, x_0]$, т. е. существует точка $x_* \in [0, x_0]$ такая, что $f(x_*, a_1, a_2) = 0$.

Пусть $x_0 = x_0(a_1, a_2)$ — наименьший положительный корень уравнения (31). Тогда

$$M_0 = \frac{a^2}{\mu_1x_0^2} \tag{32}$$

есть точное значение постоянной в неравенстве (23). □

Замечание 5. *Предположим, что второй слой является тонким, т. е.* $(b-a)/b = \varepsilon \ll 1$. *При этом из* (31) *можно получить приближённое равенство*

$$J_0(x) + \varepsilon a_2^2 x J_0'(x) \approx 0 \tag{33}$$

и в (32) *можно считать с точностью до* ε, $x_0 \approx 2.40482$ — *первый положительный нуль функции* $J_0(x)$. *Для установления этого факта заметим, что* $a_1 = b/a \approx 1+\varepsilon$. *Учитывая, что с точностью до* ε

$$J_0(a_1 a_2 x) \approx J_0(a_2 x) + J_0'(a_2 x)\varepsilon a_2 x, \quad Y_0(a_1 a_2 x) \approx Y_0(a_2 x) + Y_0'(a_2 x)\varepsilon a_2 x,$$

а $J_0' = -J_1$, $Y_0' = -Y_1$, *получим* (33).

На рис. 2 изображена поверхность минимальных положительных нулей уравнения (31). Заметим, что при $a_2 = 0$ минимальный корень этого уравнения совпадает с первым положительным нулём функции $J_0(x)$. При $a_2 = 1$ такие нули лежат на гиперболе $x = 2.40482/a_1$.

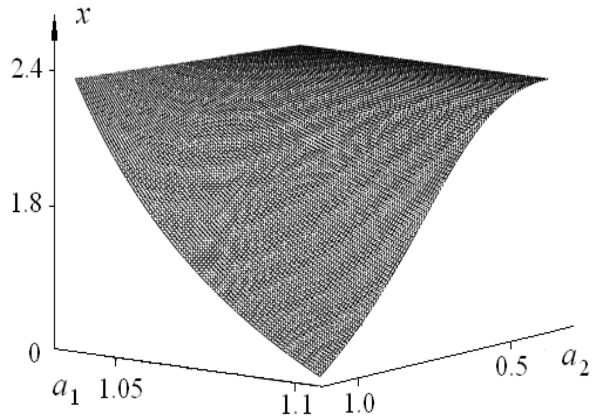

Рис. 2. Поверхность минимальных положительных нулей уравнения (31)

Если функция меняет знак на интервале $(0, a)$, то для неё справедливо неравенство вида (25). Именно, имеет место

Лемма 3. *Предположим, что функция* $g(r)$ *непрерывна на отрезке* $[0, a]$, $a > 0$, $g_r \in L_2(r; 0, a)$ *и*

$$\int_0^a r g(r)\, dr = 0.$$

Тогда для $g(r)$ *справедливо неравенство Фридрихса*

$$\int_0^a r g^2(r)\, dr \leqslant \frac{a^2}{4} \int_0^a r g_r^2(r)\, dr.$$

Доказательство. Ясно, что на интервале $(0, a)$ функция $g(r)$ меняет знак. Пусть $g(\xi) = 0$, $\xi \in (0, a)$. Имеем

$$g(r) = -\int\limits_r^\xi g_r(r)\,dr.$$

Откуда, используя неравенство Коши–Буняковского (считаем $r \in (0, \xi)$), получим

$$|g(r)| \leqslant \int\limits_r^\xi \frac{1}{\sqrt{r}}\sqrt{r}\,|g_r(r)|\,dr \leqslant \left(\int\limits_r^\xi \frac{1}{r}\,dr\right)^{1/2}\left(\int\limits_r^\xi r g_r^2(r)\,dr\right)^{1/2} \leqslant \left(\ln\frac{a}{r}\right)^{1/2}\left(\int\limits_0^a r g_r^2(r)\,dr\right)^{1/2}.$$

Умножая это неравенство на $\sqrt{r}$, возводя в квадрат и интегрируя от 0 до a, находим

$$\int\limits_0^a r g^2(r)\,dr \leqslant \left(\int\limits_0^a r\ln\frac{a}{r}\,dr\right)\int\limits_0^a r g_r^2(r)\,dr = \frac{a^2}{4}\int\limits_0^a r g_r^2(r)\,dr.$$

□

Замечание 6. *На самом деле 1/4 в неравенстве леммы 2 можно заменить на* $1/x_0^2$*, где* $x_0 \approx 3.8317$ *— первый положительный нуль функции Бесселя* $J_1(x)$*. Для этого достаточно решить вариационную задачу*

$$M_0 = \sup_{w\neq 0}\frac{\int\limits_0^a r w^2\,dr}{\int\limits_0^a r w_r^2\,dr},$$

причём $|w(0)| < \infty$ *и*

$$\int\limits_0^a r w(r)\,dr = 0.$$

Супремум достигается на функции $w(r) = J_0(r/\sqrt{M_0})$.

3. Некоторые обобщения

Предположим, что ограниченная область $\Omega \subset R^n$ $(n = 2, 3)$ есть объединение двух областей так, что $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$, $\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = S \neq \varnothing$. Пусть граница Ω есть объединение Γ_1 и Γ_2 (см. рис. 3).

Если S — гладкая поверхность, то справедливо неравенство

$$\int\limits_{\Omega_1} u_1^2(y)\,dy + \int\limits_{\Omega_2} u_2^2(y)\,dy \le M_0\left(\mu_1\int\limits_{\Omega_1}|\nabla u_1(y)|^2\,dy + \mu_2\int\limits_{\Omega_2}|\nabla u_2(y)|^2\,dy\right), \tag{34}$$

где $u_j(y) \in W_2^1(\Omega_j)$, $j = 1, 2$, причём выполнены граничные условия

$$u_1(y) = 0, \quad y \in \Gamma_1; \quad u_2(y) = 0, \quad y \in \Gamma_2; \tag{35}$$

$$u_1(y) = u_2(y), \quad \mu_1\frac{\partial u_1(y)}{\partial n} = \mu_2\frac{\partial u_2(y)}{\partial n}, \quad y \in S. \tag{36}$$

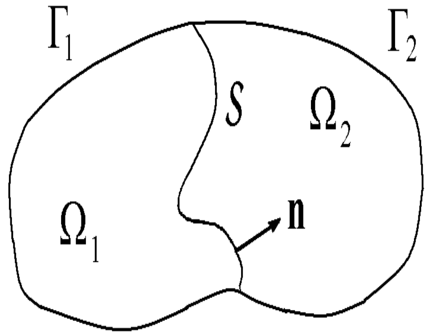

Рис. 3. Схема области $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$

Здесь $\mathbf{n}$ — нормаль к S, направленная из Ω_1 в Ω_2; постоянная M_0 не зависит от функций $u_j(y)$.

Для доказательства неравенства (34) достаточно решить задачу: $F(w_1, w_2) \to \sup$; $w_j(y) \in W_2^1(\Omega_j)$, и для них выполнены условия (35), (36). Функционал F есть

$$F(w_1, w_2) = \frac{\int\limits_{\Omega_1} w_1^2(y)\,dy + \int\limits_{\Omega_2} w_2^2(y)\,dy}{\mu_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla w_1(y)|^2\,dy + \mu_2 \int\limits_{\Omega_2} |\nabla w_2(y)|^2\,dy}\,. \tag{37}$$

Уравнения Эйлера поставленной задачи таковы:

$$-\mu_j \Delta w_j = \frac{1}{M_0}\, w_j, \quad y \in \Omega_j, \tag{38}$$

причём w_j удовлетворяет граничным условиям (35), (36). Можно показать, что спектральная задача относительно $\lambda = 1/M_0$ имеет счётное число собственных значений $\lambda_k > 0$ (для нас годится λ_1).

Положительность λ следует из равенства

$$\lambda\left(\int\limits_{\Omega_1} |w_1|^2\,dy + \int\limits_{\Omega_2} |w_2|^2\,dy\right) = \mu_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla w_1|^2\,dy + \mu_2 \int\limits_{\Omega_2} |\nabla w_2|^2\,dy.$$

Здесь $|w_j|^2 = w_j \overline{w}_j$, а черта означает комплексно-сопряжённую величину. Счётность λ_k и другие свойства этой спектральной задачи могут быть установлены как и в [4] для несоставных областей.

Заметим, что для симметричных составных областей типа прямоугольников, колец на плоскости, сферических слоёв, прямоугольных параллелепипедов, цилиндров в пространстве спектральные задачи (38) имеют явные решения, которые здесь не приводятся.

Отметим также, что в последнее время начали рассматривать совместные движения трёх жидкостей, например вода–нефть–газ. Поэтому необходимо обобщение неравенств типа (17), (34) на такие области.

Замечание 7. *Рассмотрим функцию*

$$u(x) = \begin{cases} u_1(x), & x \in \Omega_1 \cup S; \\ u_2(x), & x \in \Omega_2 \cup S. \end{cases}$$

Тогда $u(x)$ *определена во всей области* Ω *и* $u(x) = 0$ *при* $x \in \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ *в силу условий* (35). *Попытка вывести неравенство вида* (34) *из неравенства Фридрихса* (1) *не проходит по следующим соображениям: из существования у функции* $u(x)$ *обобщённых первых производных в каждой из* Ω_j $(j = 1, 2)$ *не следует существование у* $u(x)$ *такой же производной во всей области* Ω *[3, с. 47]. Другими словами, если* $u_j \in W_2^1(\Omega_j)$, *то* $u(x) \notin \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$, *и для неё неравенство просто не имеет места.*

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 08-01-00762 и междисциплинарного интеграционного проекта СО РАН № 65.

Список литературы

[1] О.А.Ладыженская, Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости, М., Наука, 1970.

[2] С.Г.Михлин, Линейные уравнения в частных производных, М., Высшая школа, 1977.

[3] О.А.Ладыженская, Краевые задачи математической физики, М., Наука, 1973.

[4] В.П.Михайлов, Дифференциальные уравнения в частных производных, М., Наука, 1976.

[5] Д.Джозеф, Устойчивость движений жидкости, М., Мир, 1981.

[6] В.С.Владимиров, Уравнения математической физики, М., Наука, 1976.

[7] У.Миллер, Симметрия и разделение переменных, М., Мир, 1981.

[8] В.К.Андреев, Об одной сопряжённой начально-краевой задаче, *Дифференциальные уравнения*, **44**(2008), № 5, 1-7.

[9] В.К.Андреев, Эволюция совместного движения двух вязких теплопроводных жидкостей в плоском слое под действием нестационарного перепада давления, *ПМТФ*, **49**(2008), № 4, 94-107.

[10] В.К.Андреев, Нестационарное движение плоских слоёв вязких жидкостей с общей границей раздела, *Вычислительные технологии*, **12**(2007), № 5, 23-30.

[11] В.М.Алексеев, В.М.Тихомиров, С.В.Фомин, Оптимальное управление, М., Наука, 1979.

On Inequalities of the Friedrichs type for Combined Domains

Viktor K. Andreev

Integral inequalities of the Friedrichs type for combined domains with plane and cylindrical symmetries are proved. The optimal constants in the right-hand sides of the inequalities are found. These constants depend on physical and geometrical parameters of the domains. Some generalizations of these inequalities to domains of a different shape are considered.

Keywords: a priori estimate, Friedrichs inequality, variational problem.