Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2009, 2(2), 176-188

УДК 517.55+519.1

Интегральные представления в линейно выпуклых полиэдрах и некоторые комбинаторные тождества

Вячеслав П.Кривоколеско*
Сибирский государственный технологический университет,
Мира 82, Красноярск, 660049,
Россия

Получена 18.02.2009, окончательный вариант 11.04.2009, принята к печати 30.04.2009

Интегральное представление для функций, голоморфных в линейно выпуклых полиэдрах, детализируется для n-круговых полиэдров.

Как следствие, получены некоторые комбинаторные тождества относительно метрических параметров этих полиэдров.

Ключевые слова: интегральное представление, вычеты, комбинаторные тождества.

Введение

Известны многочисленные приложения теории аналитических функций в перечислительной комбинаторике при вычислении и оценке комбинаторных сумм различного типа. Эти приложения основаны на классическом методе производящих функций и идее интегрального представления сумм [1, 2, 3] либо на идее алгебраической геометрии [7].

В статье [5] было получено новое интегральное представление для функций, голоморфных в линейно выпуклых полиэдрах. В настоящей статье иллюстрируется возможность получения некоторых комбинаторных тождеств на основе указанного интегрального представления.

Одним из таких тождеств является следующее:

$$1+\frac{(p+q+1)!}{p!q!}\sum_{m=0}^{q}\frac{(-1)^m}{p+m+1}\binom{q}{m}((1-\beta)^{p+m+1}-\alpha^{p+m+1})\equiv$$

$$\equiv(1-\alpha)^{q+1}\sum_{m=0}^{p}\binom{q+m}{m}\alpha^m+(1-\beta)^{p+1}\sum_{m=0}^{q}\binom{p+m}{m}\beta^m, \tag{1}$$

где $0<\alpha<1$, $0<\beta<1$. Здесь параметры α и β определяются по полиэдру

$$G=\{(z_1,z_2):|z_1|>1,\ |z_2|>1,\ \frac{|z_1|-1}{a}+\frac{|z_2|-1}{b}<1\}\subset\mathbb{C}^2, \tag{2}$$

формулами

$$\alpha=\frac{b}{ab+b+a},\ \ \beta=\frac{a}{ab+b+a}.$$

*e-mail: antonk@ktk.ru

1. Геометрия линейно выпуклых полиэдров

Для формулировки интегрального представления из [5] приведем некоторые определения.

Область $G \subset \mathbb{C}^n$ называется *линейно выпуклой* [1, §8], если для каждой точки z_0 её границы ∂G существует комплексно $(n-1)$-мерная аналитическая плоскость, проходящая через z_0 и не пересекающая G.

Для точек пространства $\mathbb{C}^n$ обозначим $|z| = (|z_1|, \ldots, |z_n|)$, и пусть $\pi : z \to |z|$ проекция $\mathbb{C}^n$ на диаграмму Рейнхарта.

В [4] (предложение 4.3) дано описание проекции комплексной гиперплоскости $a_1z_1 + \ldots + a_nz_n + c = 0$ в $\mathbb{C}^n$ на диаграмму Рейнхарта при $n \geqslant 2$. Например, проекция комплексной прямой $a_1z_1 + a_2z_2 + c = 0$ в $\mathbb{C}^2$ на диаграмму Рейнхарта задается системой неравенств

$$\begin{cases} -|a_1||z_1| - |a_2||z_2| + |c| \leqslant 0, \\ -|a_1||z_1| + |a_2||z_2| - |c| \leqslant 0, \\ |a_1||z_1| - |a_2||z_2| - |c| \leqslant 0. \end{cases} \tag{3}$$

На рис. 1 эта проекция изображается заштрихованной полосой. В точках соприкосновения полосы с координатными осями угол падения равен углу отражения. При равенстве нулю одного из коэффициентов a_1 или a_2 аналитической прямой $a_1z_1 + a_2z_2 + c = 0$ "касательная полоса" вырождается в вертикальный или горизонтальный луч.

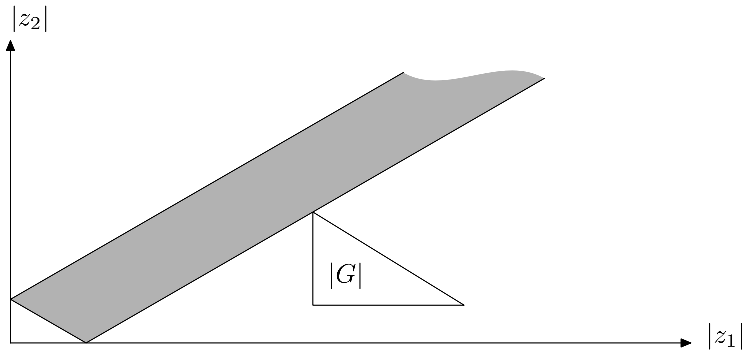

Рис. 1. Проекция комплексной прямой

Отсюда следует, что двоякокруговая область G в (2) является линейно выпуклой, так как для каждой граничной точки $|\zeta| \in \partial|G|$ изображения $|G|$ на диаграмме Рейнхарта существует касательная полоса, проходящая через эту точку и не содержащая точек области $|G|$.

Пусть в пространстве $\mathbb{C}^n$ задан линейно выпуклый полиэдр, т.е. ограниченная линейно выпуклая область

$$G = \{\, z : g^l(z, \overline{z}) < 0, \quad l = 1, \ldots, N\},$$

где функции $g^l(z, \overline{z})$ дважды непрерывно дифференцируемы в окрестности замыкания этой области. Граница ∂G области G состоит из граней

$$S^l = \{\, z \in \overline{G} : g^l(z, \overline{z}) = 0\}, \quad l = 1, \ldots, N.$$

Будем говорить, что G имеет *кусочно-регулярную границу*, если на всяком непустом ребре

$$S^{j_1\cdots j_k} = S^{j_1} \cap \ldots \cap S^{j_k} = \{\,\zeta \in \partial G : g^{j_1}(\zeta,\overline{\zeta}) = 0, \ldots, g^{j_k}(\zeta,\overline{\zeta}) = 0\}$$

выполняется неравенство $\overline{\partial} g^{j_1} \wedge \ldots \wedge \overline{\partial} g^{j_k} \neq 0$ или, что то же,

$$\operatorname{rank}\begin{pmatrix} \frac{\partial g^{j_1}}{\partial \overline{\zeta}_1} & \cdots & \frac{\partial g^{j_1}}{\partial \overline{\zeta}_n} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ \frac{\partial g^{j_k}}{\partial \overline{\zeta}_1} & \cdots & \frac{\partial g^{j_k}}{\partial \overline{\zeta}_n} \end{pmatrix} = k.$$

Ориентация граней $S^1, \ldots, S^N$ индуцирована ориентацией границы ∂G, и $\partial G = \bigcup\limits_{i=1}^{N} S^i$. В свою очередь, ориентация каждой грани S^i, $i = 1, \ldots, N$ индуцирует ориентацию $(2n-2)$-мерного ребра S^{ij}, $\partial S^i = \bigcup\limits_{j} S^{ij}$, и с учетом ориентации мы имеем $S^{ij} = -S^{ji}$. Индуктивным образом определяется ориентация ребра $S^{j_1\cdots j_k}$, которая фактически задается порядком следования граней $S^{j_1}, \ldots, S^{j_k}$.

2. Формулировка интегрального представления

Для мультииндекса $J = (j_1, \ldots, j_k)$ определим следующее отношение двух дифференциальных форм:

$$\omega_J := \frac{d\overline{\zeta} \wedge d\zeta}{\overline{\partial} g^{j_1} \wedge \ldots \wedge \overline{\partial} g^{j_k}},$$

сужение которого на ребро $S^J = S^{j_1} \cap \ldots \cap S^{j_k}$ представляет собой корректно определенную форму со свойством

$$\overline{\partial} g^{j_1} \wedge \ldots \wedge \overline{\partial} g^{j_k} \wedge \omega_J = d\overline{\zeta} \wedge d\zeta.$$

Обозначим

$$g^l_m = \frac{\partial g^l}{\partial \zeta_m},\; g^l_{\overline{m}} = \frac{\partial g^l}{\partial \overline{\zeta}_m},\quad g^l_{s\overline{m}} = \frac{\partial^2 g^l}{\partial \zeta_s \partial \overline{\zeta}_m}, \tag{4}$$

$$\langle \nabla g^l, \zeta - z\rangle = \sum_{m=1}^{n} g^l_m(\zeta_m - z_m), \quad c_{sm} = \sum_{t=1}^{k} \lambda_t \frac{g^t_{s\overline{m}}}{\langle \nabla g^t, \zeta - z\rangle}. \tag{5}$$

В точках ребра S^J, где

$$\Delta^{p_1\cdots p_k}_{j_1\cdots j_k} := \begin{vmatrix} g^{j_1}_{\overline{p}_1} & \cdots & g^{j_1}_{\overline{p}_k} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ g^{j_k}_{\overline{p}_1} & \cdots & g^{j_k}_{\overline{p}_k} \end{vmatrix} \neq 0, \tag{6}$$

форма ω_J определяется формулой

$$\omega_J = \frac{(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \cdot (-1)^{p_1+\ldots+p_k} d\overline{\zeta}[p_1, \ldots, p_k] \wedge d\zeta}{\Delta^{p_1\cdots p_k}_{j_1\cdots j_k}}, \tag{7}$$

где $d\overline{\zeta}[p_1, \ldots, p_k]$ — внешнее произведение дифференциалов $d\overline{\zeta}_1, \ldots, d\overline{\zeta}_n$, среди которых отсутствуют $d\overline{\zeta}_{p_1}, \ldots, d\overline{\zeta}_{p_k}$; $d\zeta = d\zeta_1 \wedge \ldots \wedge d\zeta_n$.

В статье [5] введено понятие смешанного левиана, являющегося обобщением понятия определителя Леви. Для семейства функций $g^1(z,\overline{z}), \ldots, g^k(z,\overline{z})$ при $1 \leqslant k \leqslant n$ смешанный левиан $L_I(g^1,\dots,g^k) = L_{i_1\dots i_k}(g^1,\dots,g^k)$ порядка $I=(i_1,\dots,i_k)$, где $0 \leqslant i_t \leqslant n, t=1,\dots,k$ и $i_1+\dots+i_k = n-k$ в обозначениях (4) и (5) находится по формуле (8):

$$R(g^1,\dots,g^k) = \sum_{|I|=n-k} \frac{\lambda_1^{i_1}\dots\lambda_k^{i_k}}{\langle \nabla g^1, \zeta - z\rangle^{i_1}\dots\langle \nabla g^k, \zeta - z\rangle^{i_k}} L_{i_1\dots i_k}(g^1,\dots,g^k), \tag{8}$$

где

$$R(g^1,\dots,g^k) = -\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & g^1_{\overline{1}} & \dots & g^1_{\overline{n}} \\ \dots & \ddots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & g^k_{\overline{1}} & \dots & g^k_{\overline{n}} \\ g^1_1 & \dots & g^k_1 & c_{11} & \dots & c_{1n} \\ \dots & \ddots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ g^1_n & \dots & g^k_n & c_{n1} & \dots & c_{nn} \end{vmatrix}. \tag{9}$$

При $k=1$ смешанный левиан есть определитель Леви функции $g(z,\overline{z})$, равный

$$L(g) = -\begin{vmatrix} 0 & g_{\overline{1}} & \dots & g_{\overline{n}} \\ g_1 & g_{1\overline{1}} & \dots & g_{1\overline{n}} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ g_n & g_{n\overline{1}} & \dots & g_{n\overline{n}} \end{vmatrix},$$

а при $k=n$ смешанный левиан

$$L_{0\dots0}(g^1,\dots,g^n) = (-1)^{n-1} \begin{vmatrix} g^1_{\overline{1}} & \dots & g^1_{\overline{n}} \\ \dots & \ddots & \dots \\ g^n_{\overline{1}} & \dots & g^n_{\overline{n}} \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} g^1_1 & \dots & g^1_n \\ \dots & \ddots & \dots \\ g^n_1 & \dots & g^n_n \end{vmatrix}. \tag{10}$$

Смешанные левианы при $k=n-1$ имеют вид

$$L_{(0,\dots,0,1_t,0,\dots,0)}(g^1,\dots,g^{n-1}) = -\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & g^1_{\overline{1}} & \dots & g^1_{\overline{n}} \\ \dots & \ddots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & g^{n-1}_{\overline{1}} & \dots & g^{n-1}_{\overline{n}} \\ g^1_1 & \dots & g^{n-1}_1 & g^t_{1\overline{1}} & \dots & g^t_{1\overline{n}} \\ \dots & \ddots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ g^1_n & \dots & g^{n-1}_n & g^t_{n\overline{1}} & \dots & g^t_{n\overline{n}} \end{vmatrix}.$$

Теорема 1 ([5]). *Пусть $G = \{z : g^l(z,\overline{z}) < 0, \quad l=1,\dots,N\}$ — ограниченная кусочно-регулярная линейно выпуклая область в $\mathbb{C}^n$. Тогда всякая функция $f(z)$, голоморфная в области G и непрерывная на $\overline{G}$, представима в G-виде*

$$f(z) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{\sharp J=k}{}' \sum_{|I|=n-k} \frac{I!}{(2\pi i)^n} \int_{S^J} \frac{f(\zeta) L_I(g^{j_1},\dots,g^{j_k})}{\prod_{t=1}^{k} \langle \nabla g^{j_t}, \zeta - z\rangle^{i_t+1}} \cdot \omega_J, \tag{11}$$

где $\sum_{\sharp J=k}{}'$ означает суммирование по упорядоченным мультииндексам J длины $k : 1 \leqslant j_1 < \dots < j_k \leqslant N$; $\sum_{|I|=n-k}$ – суммирование по мультииндексам $I=(i_1,\dots,i_k)$ со свойством $|I| := i_1+\dots+i_k = n-k; L_I$ — смешанный левиан порядка I и введено обозначение $I! = i_1!\cdot\ldots\cdot i_k!$.

3. Детализация интегрального представления для n-круговых полиэдров

В случае n-круговых полиэдров функции g^l зависят только от модулей $|z_j|$, т. е. такие полиэдры имеют вид

$$G = \{\, z : g^l(|z|) < 0, \quad l = 1, \dots, N\}.$$

В этом случае в (11) интегрирование по ребрам S^J можно свести к повторному интегрированию по $|S^J|$-проекциям ребер S^J на диаграмму Рейнхарта и интегрированию по

$$\{|\xi| = 1\} := \{|\xi_1| = 1, \dots, |\xi_n| = 1\}.$$

Множители в знаменателях в (11) имеют вид

$$\langle \nabla g^l, \zeta - z\rangle = \sum_{m=1}^{n} g^l_m(\zeta_m - z_m) = \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial g^l}{\partial \zeta_m}(\zeta_m - z_m) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n} \frac{\partial g^l}{\partial |\zeta_m|} \cdot \frac{\overline{\zeta}_m}{2|\zeta_m|}(\zeta_m - z_m) = \frac{1}{2}\sum_{m=1}^{n} \frac{\partial g^l}{\partial |\zeta_m|} \cdot (|\zeta_m| - \xi_m z_m), \tag{12}$$

где

$$\xi_m := \frac{\overline{\zeta}_m}{|\zeta_m|},\ m = 1, \dots, n. \tag{13}$$

Поскольку для функции $g^l(|\zeta|)$

$$g^l_m = \frac{\partial g^l}{\partial \zeta_m} = \frac{\xi_m}{2} \cdot \frac{\partial g^l}{\partial |\zeta_m|}; \quad g^l_{\overline{m}} = \frac{\partial g^l}{\partial \overline{\zeta}_m} = \frac{1}{2\xi_m} \cdot \frac{\partial g^l}{\partial |\zeta_m|}, \tag{14}$$

$$g^l_{s\overline{m}} = \frac{\partial^2 g^l}{\partial \zeta_s \partial \overline{\zeta}_m} = \frac{\xi_s}{4\xi_m} \cdot \frac{\partial^2 g^l}{\partial |\zeta_s| \partial |\zeta_m|},\ s \neq m, \tag{15}$$

$$g^l_{s\overline{s}} = \frac{\partial^2 g^l}{\partial \zeta_s \partial \overline{\zeta}_s} = \frac{1}{4} \cdot \frac{\partial^2 g^l}{\partial |\zeta_s| \partial |\zeta_s|} + \frac{1}{4|\zeta_s|} \cdot \frac{\partial g^l}{\partial |\zeta_s|}, \tag{16}$$

то введем следующие обозначения:

$$g^l_{|m|} = \frac{\partial g^l}{\partial |\zeta_m|}, \quad g^l_{|s||m|} = \frac{\partial^2 g^l}{\partial |\zeta_s| \partial |\zeta_m|}, \quad \langle \nabla g^l_{|\zeta|}, |\zeta| - \xi z\rangle = \sum_{m=1}^{n} g^l_{|m|}(|\zeta_m| - \xi_m z_m), \tag{17}$$

$$\tilde{c}_{sm} = \sum_{t=1}^{k} \frac{\lambda_t}{\langle g^t, \rangle} g^t_{|s||m|},\ s \neq m; \quad \tilde{c}_{ss} = \sum_{t=1}^{k} \frac{\lambda_t}{\langle g^t, \rangle}\left(g^t_{|s||s|} + \frac{g^t_{|s|}}{|\zeta_s|}\right), \tag{18}$$

$$\tilde{R}^{j_1 \dots j_k} = -\begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & g^{j_1}_{|1|} & \dots & g^{j_1}_{|n|} \\ \dots & \ddots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ 0 & \dots & 0 & g^{j_k}_{|1|} & \dots & g^{j_k}_{|n|} \\ g^{j_1}_{|1|} & \dots & g^{j_k}_{|1|} & \tilde{c}_{11} & \dots & \tilde{c}_{1n} \\ \dots & \ddots & \dots & \dots & \ddots & \dots \\ g^{j_1}_{|n|} & \dots & g^{j_k}_{|n|} & \tilde{c}_{n1} & \dots & \tilde{c}_{nn} \end{vmatrix}, \tag{19}$$

$$\tilde{\Delta}^{p_1\ldots p_k}_{j_1\ldots j_k} = \begin{vmatrix} g^{j_1}_{|p_1|} & \ldots & g^{j_1}_{|p_k|} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ g^{j_k}_{|p_1|} & \ldots & g^{j_k}_{|p_k|} \end{vmatrix}. \tag{20}$$

Пусть

$$\tilde{\omega}_J = \frac{(-1)^n(-1)^{\frac{k(k+1)}{2}} \cdot (-1)^{p_1+\ldots+p_k} d|\zeta|[p_1,\ldots,p_k]}{\tilde{\Delta}^{p_1\ldots p_k}_{j_1\ldots j_k}} \tag{21}$$

есть дифференциальная форма, где по условию $\tilde{\Delta}^{p_1\ldots p_k}_{j_1\ldots j_k} \neq 0$ и $d|\zeta|[p_1,\ldots,p_k]$ — внешнее произведение дифференциалов $d|\zeta_1|,\ldots,d|\zeta_n|$, среди которых отсутствуют $d|\zeta_{p_1}|,\ldots,d|\zeta_{p_k}|$.

При $1 \leqslant k \leqslant n$ смешанный левиан $\tilde{L}_I(g^{j_1},\ldots,g^{j_k})$ находится из равенства

$$\tilde{R}^{j_1\ldots j_k} = \sum_{|I|=n-k} \frac{\lambda_1^{i_1}\ldots\lambda_k^{i_k}}{\langle g^{j_1}_{|\zeta|}, |\zeta|-\xi z\rangle^{i_1}\ldots\langle g^{j_k}_{|\zeta|}, |\zeta|-\xi z\rangle^{i_k}} \cdot \tilde{L}_I(g^{j_1},\ldots,g^{j_k}). \tag{22}$$

При $k=1$ левиан равен

$$\tilde{L}(g(|\zeta|)) = -\begin{vmatrix} 0 & g_{|1|} & g_{|2|} & \cdots & g_{|n|} \\ g_{|1|} & g_{|1||1|} + \frac{1}{|\zeta_1|}g_{|1|} & g_{|1||2|} & \cdots & g_{|1||n|} \\ g_{|2|} & g_{|2||1|} & g_{|2||2|} + \frac{1}{|\zeta_2|}g_{|2|} & \cdots & g_{|2||n|} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ g_{|n|} & g_{|n||1|} & g_{|n||2|} & \cdots & g_{|n||n|} + \frac{1}{|\zeta_n|}g_{|n|} \end{vmatrix}, \tag{23}$$

а при $k=n$ смешанный левиан

$$\tilde{L}_{(0,\ldots,0)}(g^{j_1},\ldots,g^{j_n}) = (-1)^{n+1}(\tilde{\Delta}^{1\ldots n}_{j_1\ldots j_n})^2 = (-1)^{n+1}\begin{vmatrix} g^{j_1}_{|1|} & \cdots & g^{j_1}_{|n|} \\ \ldots & \ddots & \ldots \\ g^{j_n}_{|1|} & \cdots & g^{j_n}_{|n|} \end{vmatrix}^2. \tag{24}$$

Для $k=n-1$ смешанные левианы:

$$\tilde{L}_{(0,\ldots,0,1_t,0,\ldots,0)}(g^{j_1},\ldots,g^{j_{n-1}}) =$$

$$= -\begin{vmatrix} 0 & \ldots & 0 & g^{j_1}_{|1|} & g^{j_1}_{|2|} & \cdots & g^{j_1}_{|n|} \\ \ldots & \ldots & \ddots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ 0 & \ldots & 0 & g^{j_{n-1}}_{|1|} & g^{j_{n-1}}_{|2|} & \cdots & g^{j_{n-1}}_{|n|} \\ g^{j_1}_{|1|} & \ldots & g^{j_{n-1}}_{|1|} & g^{j_t}_{|1||1|} + \frac{1}{|\zeta_1|}g^{j_t}_{|1|} & g^{j_t}_{|\zeta_1||\zeta_2|} & \cdots & g^{j_t}_{|1||n|} \\ g^{j_1}_{|2|} & \ldots & g^{j_{n-1}}_{|2|} & g^{j_t}_{|2||1|} & g^{j_t}_{|2||2|} + \frac{1}{|\zeta_2|}g^{j_t}_{|2|} & \cdots & g^{j_t}_{|2||n|} \\ \ldots & \ddots & \ldots & \ldots & \ldots & \ddots & \ldots \\ g^{j_1}_{|n|} & \ldots & g^{j_{n-1}}_{|n|} & g^{j_t}_{|n||1|} & g^{j_t}_{|n||2|} & \cdots & g^{j_t}_{|n||n|} + \frac{1}{|\zeta_n|}g^{j_t}_{|n|} \end{vmatrix}.$$

Формулы (17)–(22) позволяют сформулировать следующее следствие из теоремы в [5].

Следствие 1. *Пусть* $G = \{z : g^l(|z|) < 0, \quad l = 1,\ldots,N\}$ *— ограниченная кусочно-регулярная линейно выпуклая область в* $\mathbb{C}^n$. *Тогда всякая функция* $f(z)$, *голоморфная в области* G *и непрерывная на* $\overline{G}$, *представима в* G*-виде*

$$f(z)=\sum_{k=1}^{n}\sum_{\sharp J=k}{}'\sum_{|I|=n-k}\frac{(-1)^{k-1}I!}{(2\pi i)^n}\times$$

$$\times\int\limits_{|S^J|}|\zeta_1|\cdot\ldots\cdot|\zeta_n|\tilde{L}_I(g^{j_1},\ldots,g^{j_k})\tilde{\omega}_J\int\limits_{|\xi|=1}\frac{f(\frac{|\zeta_1|}{\xi_1},\ldots,\frac{|\zeta_n|}{\xi_n})}{\prod\limits_{t=1}^{k}\langle\nabla g^{j_t}_{|\zeta|},|\zeta|-\xi z\rangle^{i_t+1}}\cdot\frac{d\xi_1}{\xi_1}\wedge\ldots\wedge\frac{d\xi_n}{\xi_n}.$$

Здесь $\sum\limits_{\sharp J=k}{}'$ *означает суммирование по упорядоченным мультииндексам* J *длины* $k:1\leqslant j_1<\ldots<j_k\leqslant N$; $\sum\limits_{|I|=n-k}$ *— суммирование по мультииндексам* $I=(i_1,\ldots,i_k)$ *со свойством* $|I|:=i_1+\ldots+i_k=n-k$; $\tilde{L}_I$ *— смешанный левиан порядка* I *и введено обозначение* $I!=i_1!\cdot\ldots\cdot i_k!$.

Если для краткости обозначить через

$$\nu^{j_1\cdots j_k}=\frac{I!}{(2\pi i)^n}\int\limits_{|S^J|}|\zeta_1|\cdot\ldots\cdot|\zeta_n|\tilde{L}_I(g^{j_1},\ldots,g^{j_k})\tilde{\omega}_J\int\limits_{|\xi|=1}\frac{f(\frac{|\zeta_1|}{\xi_1},\ldots,\frac{|\zeta_n|}{\xi_n})}{\prod\limits_{t=1}^{k}\langle\nabla g^{j_t}_{|\zeta|},|\zeta|-\xi z\rangle^{i_t+1}}\cdot\frac{d\xi}{\xi},\tag{25}$$

где $\frac{d\xi}{\xi}=\frac{d\xi_1}{\xi_1}\wedge\ldots\wedge\frac{d\xi_n}{\xi_n}$, то следствие запишется в виде простой формулы

$$f(z)=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sum_{\sharp J=k}{}'\sum_{|I|=n-k}\nu^{j_1\cdots j_k}.\tag{26}$$

4. Вспомогательные леммы

Лемма 1. *Если комплексная гиперплоскость* $1-\alpha_1\xi_1-\ldots-\alpha_n\xi_n=0$ *не пересекает* $U(\rho,0)$, *то при* $(s_1,\ldots,s_n)\in\mathbb{Z}^n_+$

$$\frac{1}{(2\pi i)^n}\int\limits_{|\xi_1|=\rho_1}\cdots\int\limits_{|\xi_n|=\rho_n}\frac{d\xi_1\wedge\ldots\wedge d\xi_n}{\xi_1^{s_1+1}\ldots\xi_n^{s_n+1}(1-\alpha_1\xi_1-\ldots-\alpha_n\xi_n)^{k+1}}=$$

$$=\frac{(s_1+\ldots+s_n+k)!}{s_1!\ldots s_n!k!}\alpha_1^{s_1}\ldots\alpha_n^{s_n}.$$

Доказательство получается прямым вычислением интеграла (вычета) через производные функции $(1-\alpha_1\xi_1-\ldots-\alpha_n\xi_n)^{-(k+1)}$. □

Лемма 2. *Если* $|w_0|<\rho$, *а* $|w_1|>\rho$, *то при* $s\geqslant 0$, $k>0$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|w|=\rho}\frac{dw}{w^{s+1}(w-w_0)(w-w_1)^k}=-\sum_{m=1}^{k}\binom{s+m-1}{s}\frac{1}{(w_0-w_1)^{k+1-m}w_1^{s+m}}.$$

Доказательство. Так как

$$\frac{1}{(w-w_0)(w-w_1)^k}=-\sum_{m=1}^{k}\frac{1}{(w_0-w_1)^{k+1-m}(w-w_1)^m}+\frac{1}{(w_0-w_1)^k(w-w_0)},$$

то вычислением интегралов (вычетов) получаем доказательство леммы 2. □

5. Иллюстративный пример

Рассмотрим в $\mathbb{C}^2$ ограниченную область

$$G = \{z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : g^1(|z|) = -|z_1| + a < 0, g^2(|z|) = -|z_2| + b < 0,$$
$$g^3(|z|) = |z_1|^2 + |z_2|^2 - r^2 < 0,\ r > a, r > b\}. \tag{27}$$

Область является двоякокруговой, и $|G|$ — проекция G на диаграмму Рейнхарта есть область, ограниченная прямыми $|z_1| = a,\ |z_2| = b$ и окружностью с центром в начале координат радиуса r (рис. 2).

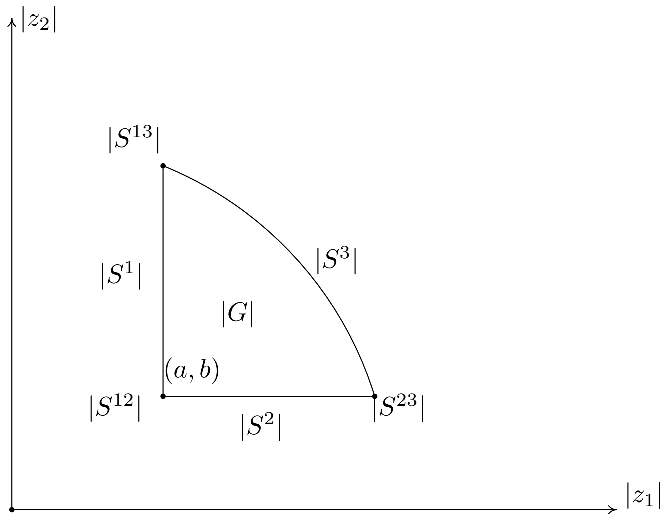

Рис. 2. Диаграмма Рейнхарта

Так как для каждой точки $|\zeta| = (|\zeta_1|, |\zeta_2|) \in \partial|G|$ на диаграмме Рейнхарта существует касательная полоса, проходящая через эту точку и не пересекающая $|G|$, то область G является линейно выпуклой.

Эта область имеет кусочно-регулярную границу, поскольку для каждой $4-k$-мерной грани $S^{j_1,\dots,j_k}$ векторы $\left(\dfrac{\partial g^{j_1}}{\partial\bar\zeta_1}, \dfrac{\partial g^{j_1}}{\partial\bar\zeta_2}\right)$, $\left(\dfrac{\partial g^{j_k}}{\partial\bar\zeta_1}, \dfrac{\partial g^{j_k}}{\partial\bar\zeta_2}\right)$, $1 \leqslant k \leqslant 2$, линейно независимы для всех наборов $j_1, \dots, j_k$.

Теперь, следуя единой схеме, найдем при $1 \leqslant k \leqslant 2$ слагаемые $\nu^{j_1\cdots j_k}$-интегралы по граням $S^{j_1,\dots,j_k}$.

а) Пусть грань $S^1 = \{\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) : g^1(|\zeta|) = -|\zeta_1| + a = 0\}$. При $p_1 = 1$ из (20) следует, что

$$\tilde\Delta_1^{p_1} = \tilde\Delta_1^1 = g^1_{|1|} = \frac{\partial g^1}{\partial|\zeta_1|} = -1 \neq 0,$$

и согласно (21) форма

$$\tilde\omega_1 = \frac{(-1)^2(-1)^{\frac{1(1+1)}{2}} \cdot (-1)^{p_1} d|\zeta|[p_1]}{\tilde\Delta_1^{p_1}} = -d|\zeta|[1] = -d|\zeta_2|$$

корректно определена. Из (23) для $g^1(|\zeta|)$ левиан

$$\tilde{L}(g^1(|\zeta|)) = -\begin{vmatrix} 0 & g^1_{|1|} & g^1_{|2|} \\ g^1_{|1|} & g^1_{|1||1|} + \frac{g^1_{|1|}}{|\zeta_1|} & g^1_{|1||2|} \\ g^1_{|2|} & g^1_{|2||1|} & g^1_{|2||2|} + \frac{g^1_{|2|}}{|\zeta_2|} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & -\frac{1}{|\zeta_1|} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда из (25) следует, что $\nu^1 = 0$.

b) Пусть грань $S^2 = \{\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) : g^2(|\zeta|) = -|\zeta_2| + b = 0\}$. Проводя аналогичные рассуждения, из (25) получим, что $\nu^2 = 0$.

c) Пусть грань $S^3 = \{\zeta = (\zeta_1, \zeta_2) : g^3(|\zeta|) = |\zeta_1|^2 + |\zeta_2|^2 - r^2 = 0;\ r > |\zeta_1| \geqslant a > 0,\ \sqrt{r^2 - a^2} \geqslant |\zeta_2| \geqslant b > 0\}$. При $p_1 = 1$ согласно (20)

$$\tilde{\Delta}_3^{p_1} = \tilde{\Delta}_3^1 = g^3_{|1|} = 2|\zeta_1| \neq 0,$$

и в соответствии с (21) форма

$$\tilde{\omega}_3 = \frac{(-1)\cdot(-1)^{p_1} d|\zeta|[p_1]}{\tilde{\Delta}_3^{p_1}} = \frac{d|\zeta|[1]}{\tilde{\Delta}_3^1} = \frac{d|\zeta_2|}{2|\zeta_1|}$$

корректно определена ($|\zeta_1| \geqslant a > 0$). Из (23) для функции $g^3(|\zeta|)$ левиан

$$\tilde{L}(g^3(|\zeta|)) = -\begin{vmatrix} 0 & g^3_{|1|} & g^3_{|2|} \\ g^3_{|1|} & g^3_{|1||1|} + \frac{g^3_{|1|}}{|\zeta_1|} & g^1_{|1||2|} \\ g^3_{|2|} & g^3_{|2||1|} & g^1_{|2||2|} + \frac{g^3_{|2|}}{|\zeta_2|} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 2|\zeta_1| & 2|\zeta_2| \\ 2|\zeta_1| & 4 & 0 \\ 2|\zeta_2| & 0 & 4 \end{vmatrix} = 16r^2,$$

и из (17) для $g^3(|\zeta|)$

$$\langle \nabla g^3_{|\zeta|}, |\zeta| - \xi z\rangle = \sum_{m=1}^{2} g^3_{|m|}(|\zeta_m| - z_m\xi_m) = 2|\zeta_1|(|\zeta_1| - z_1\xi_1) + 2|\zeta_2|(|\zeta_2| - z_2\xi_2) =$$

$$= 2(r^2 - |\zeta_1|z_1\xi_1 - |\zeta_2|z_2\xi_2).$$

Теперь из (25) следует, что

$$\nu^3 = \frac{(2-1)!}{(2\pi i)^2} \int\limits_{|S^3|} \frac{|\zeta_1||\zeta_2|16r^2 d|\zeta_2|}{2|\zeta_1|} \int\limits_{|\xi_1|=1} \int\limits_{|\xi_2|=1} \frac{f(\frac{|\zeta_1|}{\xi_1}, \frac{|\zeta_2|}{\xi_2})}{(2(r^2 - |\zeta_1|z_1\xi_1 - |\zeta_2|z_2\xi_2))^{1+1}} \cdot \frac{d\xi_1}{\xi_1} \wedge \frac{d\xi_2}{\xi_2} =$$

$$= \frac{2r^2}{(2\pi i)^2} \int\limits_{|S^3|} |\zeta_2| d|\zeta_2| \int\limits_{|\xi_1|=1} \int\limits_{|\xi_2|=1} \frac{f(\frac{|\zeta_1|}{\xi_1}, \frac{|\zeta_2|}{\xi_2})}{(r^2 - |\zeta_1|z_1\xi_1 - |\zeta_2|z_2\xi_2)^2} \cdot \frac{d\xi_1}{\xi_1} \wedge \frac{d\xi_2}{\xi_2},$$

причем обход грани $|S^3|$ на диаграмме Рейнхарта будет происходить против часовой стрелки, когда $|\zeta_2|$ будет меняться от b до $\sqrt{r^2 - a^2}$.

В частности, для функции $f(z) = z_1^{s_1} z_2^{s_2}$, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$

$$\nu^3 = \frac{2r^2}{(2\pi i)^2} \int\limits_{|S^3|} |\zeta_1^{s_1}||\zeta_2|^{s_2+1} d|\zeta_2| \int\limits_{|\xi_1|=1} \int\limits_{|\xi_2|=1} \frac{d\xi_1 \wedge d\xi_2}{\xi_1^{s_1+1}\xi_2^{s_2+1}(r^2 - |\zeta_1|z_1\xi_1 - |\zeta_2|z_2\xi_2)^2} =$$

$$= \frac{2}{r^2(2\pi i)^2} \int\limits_{|S^3|} |\zeta_1^{s_1}||\zeta_2|^{s_2+1} d|\zeta_2| \int\limits_{|\xi_1|=1} \int\limits_{|\xi_2|=1} \frac{d\xi_1 \wedge d\xi_2}{\xi_1^{s_1+1}\xi_2^{s_2+1}(1-\frac{|\zeta_1|z_1}{r^2}\xi_1 - \frac{|\zeta_2|z_2}{r^2}\xi_2)^2}. \qquad (28)$$

Так как при $(z_1, z_2) \in G$ комплексная гиперплоскость $1 - \frac{|\zeta_1|z_1}{r^2}\xi_1 - \frac{|\zeta_2|z_2}{r^2}\xi_2 = 0$ не пересекает $U(1,0)$, то по лемме 1

$$\nu^3 = \frac{(s_1+s_2+1)! z_1^{s_1} z_2^{s_2}}{s_1! s_2!} \cdot \frac{2}{(r^2)^{s_1+s_2+1}} \int\limits_{|S^3|} |\zeta_1^{2s_1}||\zeta_2|^{2s_2+1} d|\zeta_2| =$$

$$= \frac{(s_1+s_2+1)! z_1^{s_1} z_2^{s_2}}{s_1! s_2!} \cdot \frac{2}{(r^2)^{s_1+s_2+1}} \int\limits_{b}^{\sqrt{r^2-a^2}} (r^2 - y^2)^{s_1} y^{2s_2+1} dy. \qquad (29)$$

Вычисляя (29), мы можем записать конечный ответ либо в форме

$$\nu^3 = \frac{(s_1+s_2+1)! z_1^{s_1} z_2^{s_2}}{s_1! s_2!} \sum_{m=0}^{s_1} \frac{(-1)^m}{s_2+m+1} \binom{s_1}{m} \left(\left(1 - \frac{a^2}{r^2}\right)^{s_2+m+1} - \left(\frac{b^2}{r^2}\right)^{s_2+m+1} \right), \qquad (30)$$

либо в форме

$$\nu^3 = \frac{(s_1+s_2+1)! z_1^{s_1} z_2^{s_2}}{s_1! s_2!} \sum_{m=0}^{s_2} \frac{(-1)^m}{s_1+m+1} \binom{s_2}{m} \left(\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right)^{s_1+m+1} - \left(\frac{a^2}{r^2}\right)^{s_1+m+1} \right). \qquad (31)$$

d) Пусть грань $S^{13} = \{(\zeta_1, \zeta_2) : |\zeta_1| = a,\, |\zeta_2| = \sqrt{r^2 - a^2}\}$. Из (20) следует, что

$$\tilde{\Delta}_{13}^{12} = \begin{vmatrix} g^1_{|1|} & g^1_{|2|} \\ g^3_{|1|} & g^3_{|2|} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2|\zeta_1| & 2|\zeta_2| \end{vmatrix} = -2|\zeta_2| \neq 0,$$

и согласно (21) форма

$$\tilde{\omega}_{13} = \frac{(-1)\cdot(-1)^{1+2} d|\zeta|[1,2]}{\tilde{\Delta}_{13}^{12}} = -\frac{1}{2|\zeta_2|} = -\frac{1}{2|\zeta_2|}$$

корректно определена ($|\zeta_2| \geqslant b > 0$). Из (24) смешанный левиан

$$\tilde{L}_{(0,0)}(g^1(|\zeta|), g^3(|\zeta|)) = (-1)^{2+1} (\tilde{\Delta}_{13}^{12})^2 = -4|\zeta_2|^2,$$

и из (17)

$$\langle \nabla g^1_{|\zeta|}, |\zeta| - \xi z \rangle = \sum_{m=1}^{2} g^1_{|m|}(|\zeta_m| - z_m \xi_m) = -1(|\zeta_1| - z_1\xi_1),$$

$$\langle \nabla g^3_{|\zeta|}, |\zeta| - \xi z \rangle = 2(r^2 - |\zeta_1| z_1 \xi_1 - |\zeta_2| z_2 \xi_2).$$

При обходе границы $|G|$ на диаграмме Рейнхарта против часовой стрелки, двигаясь по грани S^3, мы переходим на грань S^1, что необходимо учесть при нахождении слагаемого ν^{13} (отметим, что $\tilde{\Delta}_{13}^{12} = -2|\zeta_2| < 0$). Теперь из (25) следует, что

$$\nu^{13} = (-1) \cdot \frac{0!0!}{(2\pi i)^2} \cdot \frac{|\zeta_1||\zeta_2|(-4)|\zeta_2|^2}{-2|\zeta_2|} \times$$

$$\times \int\limits_{|\xi_1|=1} \int\limits_{|\xi_2|=1} \frac{f(\frac{|\zeta_1|}{\xi_1}, \frac{|\zeta_2|}{\xi_2})}{-1(|\zeta_1| - z_1\xi_1) 2(r^2 - |\zeta_1|z_1\xi_1 - |\zeta_2|z_2\xi_2)} \cdot \frac{d\xi_1}{\xi_1} \wedge \frac{d\xi_2}{\xi_2} =$$

$$= \frac{|\zeta_2|^2}{(2\pi i)^2 r^2} \int\limits_{|\xi_1|=1} \int\limits_{|\xi_2|=1} \frac{f(\frac{|\zeta_1|}{\xi_1}, \frac{|\zeta_2|}{\xi_2})}{(1 - \frac{z_1}{|\zeta_1|}\xi_1)(1 - \frac{|\zeta_1| z_1}{r^2}\xi_1 - \frac{|\zeta_2| z_2}{r^2}\xi_2)} \cdot \frac{d\xi_1}{\xi_1} \wedge \frac{d\xi_2}{\xi_2}.$$

Для функции $f(z) = z_1^{s_1} z_2^{s_2}$, $s_1, s_2 \in \mathbb{Z}_+$ получим, что

$$\nu^{13} = \frac{|\zeta_1|^{s_1} |\zeta_2|^{s_2+2}}{r^2 (2\pi i)^2} \int\limits_{|\xi_1|=1} \int\limits_{|\xi_2|=1} \frac{d\xi_1 \wedge d\xi_2}{\xi_1^{s_1+1} \xi_2^{s_2+1} (1 - \frac{z_1}{|\zeta_1|}\xi_1)(1 - \frac{|\zeta_1| z_1}{r^2}\xi_1 - \frac{|\zeta_2| z_2}{r^2}\xi_2)}. \tag{32}$$

Применяя к (32) леммы 1 и 2, мы можем записать ν^{13} либо в виде

$$\nu^{13} = -z_1^{s_1} z_2^{s_2} \left(1 - (1 - \frac{a^2}{r^2})^{s_2+1} \sum_{m=0}^{s_1} C_{s_2+m}^m \frac{(a^2)^m}{(r^2)^m} \right), \tag{33}$$

либо в виде

$$\nu^{13} = -z_1^{s_1} z_2^{s_2} (\frac{a^2}{r^2})^{s_1+1} \sum_{m=0}^{s_2} C_{s_1+m}^m (1 - \frac{a^2}{r^2})^m. \tag{34}$$

e) Пусть $S^{23} = \{(\zeta_1, \zeta_2) : |\zeta_2| = b, \ |\zeta_1| = \sqrt{r^2 - b^2}\}$.

Проводя аналогичные рассуждения, получим, что для голоморфного монома $z_1^{s_1} z_2^{s_2}$ выражение для ν^{23} можно записать либо в форме

$$\nu^{23} = -z_1^{s_1} z_2^{s_2} (\frac{b^2}{r^2})^{s_2+1} \sum_{m=0}^{s_1} C_{s_2+m}^m (1 - \frac{b^2}{r^2})^m, \tag{35}$$

либо в форме

$$\nu^{23} = -z_1^{s_1} z_2^{s_2} (1 - (1 - \frac{b^2}{r^2})^{s_1+1} \sum_{m=0}^{s_2} C_{s_1+m}^m (\frac{b^2}{r^2})^m). \tag{36}$$

f) Пусть $S^{12} = \{(\zeta_1, \zeta_2) : g^1(|\zeta|) = -|\zeta_1| + a = 0, \, g^2(|\zeta|) = -|\zeta_2| + b = 0\}$. Аналогично рассуждая, получим, что $\nu^{12} = 0$ для голоморфного монома $z_1^{s_1} z_2^{s_2}$.

Суммируя сказанное, мы видим, что слагаемые (25) интегрального представления (26) по границе области (27) для голоморфного монома $z_1^{s_1} z_2^{s_2}$ согласно (26) удовлетворяют соотношению

$$z_1^{s_1} z_2^{s_2} = (-1)^{1-1}(\nu^3) + (-1)^{2-1}(\nu^{13} + \nu^{23}) = \nu^3 - (\nu^{13} + \nu^{23}), \tag{37}$$

так как $\nu^1 = \nu^2 = \nu^{12} = 0$.

6. Комбинаторные тождества

Применяя различные формы записи для $\nu^3, \nu^{13}, \nu^{23}$, мы можем получить восемь соотношений, часть из которых будет совпадать с точностью до переобозначений (s_1 меняем на s_2, а s_2 на s_1). Для упрощения записи теоремы обозначим $\alpha = \dfrac{a^2}{r^2}$, $\beta = \dfrac{b^2}{r^2}$ и получим следующее утверждение:

Теорема 2. *При $0 < \alpha < 1, \ 0 < \beta < 1$ справедливы следующие тождества:*

$$\frac{(s_1 + s_2 + 1)!}{s_1! s_2!} \sum_{m=0}^{s_1} \frac{(-1)^m}{s_2 + m + 1} \binom{s_1}{m} \left((1 - \alpha)^{s_2+m+1} - \beta^{s_2+m+1} \right) \equiv$$

$$\equiv (1-\alpha)^{s_2+1}\sum_{m=0}^{s_1}\binom{s_2+m}{m}\alpha^m - \beta^{s_2+1}\sum_{m=0}^{s_1}\binom{s_2+m}{m}(1-\beta)^m, \tag{38}$$

$$1+\frac{(s_1+s_2+1)!}{s_1!s_2!}\sum_{m=0}^{s_1}\frac{(-1)^m}{s_2+m+1}\binom{s_1}{m}\left((1-\alpha)^{s_2+m+1}-\beta^{s_2+m+1}\right)\equiv$$

$$\equiv (1-\alpha)^{s_2+1}\sum_{m=0}^{s_1}\binom{s_2+m}{m}\alpha^m + (1-\beta)^{s_1+1}\sum_{m=0}^{s_2}\binom{s_1+m}{m}\beta^m, \tag{39}$$

$$1\equiv\frac{(s_1+s_2+1)!}{s_1!s_2!}\sum_{m=0}^{s_1}\frac{(-1)^m}{s_2+m+1}\binom{s_1}{m}\left((1-\alpha)^{s_2+m+1}-\beta^{s_2+m+1}\right)+$$

$$+\alpha^{s_1+1}\sum_{m=0}^{s_2}\binom{s_1+m}{m}(1-\alpha)^m + \beta^{s_2+1}\sum_{m=0}^{s_1}\binom{s_2+m}{m}(1-\beta)^m. \tag{40}$$

Посмотрим на тождества, приведенные в теореме, с другой стороны, а именно как на полиномиальные тождества. Перенеся в (38) все члены, зависящие от α и β, в левую и правую части, получим

$$(1-\alpha)^{s_2+1}\sum_{m=0}^{s_1}\left(\frac{(s_1+s_2+1)!}{s_1!s_2!}\cdot\frac{(-1)^m}{s_2+m+1}\binom{s_1}{m}(1-\alpha)^m-\binom{s_2+m}{m}\alpha^m\right)\equiv$$

$$\equiv\beta^{s_2+1}\sum_{m=0}^{s_1}\left(\frac{(s_1+s_2+1)!}{s_1!s_2!}\cdot\frac{(-1)^m}{s_2+m+1}\binom{s_1}{m}\beta^m-\binom{s_2+m}{m}(1-\beta)^m\right),$$

которое справедливо для любых $s_1\geqslant 0$, что возможно только при условии

$$\sum_{m=0}^{s_1}\left(\frac{(s_1+s_2+1)!}{s_1!s_2!}\cdot\frac{(-1)^m}{s_2+m+1}\binom{s_1}{m}(1-\alpha)^m-\binom{s_2+m}{m}\alpha^m\right)\equiv$$

$$\equiv\sum_{m=0}^{s_1}\left(\frac{(s_1+s_2+1)!}{s_1!s_2!}\cdot\frac{(-1)^m}{s_2+m+1}\binom{s_1}{m}\beta^m-\binom{s_2+m}{m}(1-\beta)^m\right)\equiv 0,$$

так как величины α и β независимы. После преобразований получим

Следствие 2. *При $m=0,\dots s_1$ справедливы следующие соотношения:*

$$\binom{s_2+m}{s_2}=(-1)^m\frac{(s_1+s_2+1)!}{s_1!s_2!}\sum_{k=m}^{s_1}\frac{(-1)^k}{s_2+k+1}\binom{s_1}{k}\binom{k}{m}, \tag{41}$$

При $m=0$ получается формула №45, приведенная в [6] на стр. 611.

Автор благодарен Н.А. Бушуевой, Г.П. Егорычеву, О.В. Знаменской, Е.К. Лейнартасу, В.А. Степаненко, А.К. Циху за внимание к работе и сделанные замечания.

Работа выполнена в рамках гранта Президента России поддержки ведущих научных школ НШ-2427.2008.1 и гранта СФУ, а также гранта Рособразования "Развитие научного потенциала высшей школы" р 2.1.1/4620.

Список литературы

[1] Л.А.Айзенберг, А.П.Южаков, Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе, Новосибирск, Наука, 1979.

[2] Г.П.Егорычев, Интегральное представление и вычисление комбинаторных сумм, Новосибирск, Наука, 1977.

[3] G.P.Egorychev, Method of coefficients: an algebraic characterization and recept applications, Labours Waterloo Workshop on Computer Algebra, Waterloo, 5-7 May, 2008, Springer Verlag, 2009, 33.

[4] M.Forsberg, M.Passare, A.Tsikh, Laurent Determinants and Arrangements of Hyperplane Amoebas, *Advances in Mathematics*, **151**(2000), 45-70.

[5] В.П.Кривоколеско, А.К.Цих, Интегральные представления в линейно выпуклых полиэдрах, *Сиб. мат. журн.*, **46**(2005), №3, 579-593.

[6] А.П.Прудников, Ю.А.Брычков, О.И.Маричев, Интегралы и ряды, М., Наука, 1981.

[7] Р.Стенли, Перечислительная комбинаторика, М., Мир, 1990.

[8] А.К.Цих, Многомерные вычеты и их применения, Новосибирск, Наука, 1988.

Integral Representations for Linearly Convex Polyhedra and Some Combinatorial Identities

Vyacheslav P.Krivokolesko

An integral representation for functions that are holomorphic in a linearly convex polyhedr was considered in detail in the case of an n-circular polyhedr. We obtain some combinatorial identities involving metric parameters of this polyhedron.

Keywords: integral representation, residues, combinatorial identities.