УДК 517.91:534-6

ПРИМЕНЕНИЕ ТЕОРИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА ПРИ ОПИСАНИИ ПРОЦЕССА МЕХАНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Кузьмин Н.С., Власик В.В.
научный руководитель канд. пед. наук Бутакова С.М.
Сибирский федеральный университет

Раздел математики «Математический анализ» в качестве анализа переменных величин с момента своего появления развивался в тесной связи с естествознанием, и в частности с физикой. Потребности развития физических наук, необходимость количественного изучения движения тел и меняющихся процессов привели к возникновению и формированию понятий данного раздела. Понятие дифференциального уравнения – одно из основных. Подход к изучению явлений природы при помощи дифференциальных уравнений впервые был предложен итальянским ученым Г. Галилеем. Позже его применил И. Ньютон.

Чаще всего физические законы описывают некоторые соотношения между величинами, характеризующими изучаемый процесс, и скоростью изменения этих величин. Другими словами, эти законы выражаются равенствами, в которых участвуют неизвестные функции и их производные. Такие равенства называются дифференциальными уравнениями.

Цель нашей работы расширить и систематизировать базовые знания темам «Обыкновенные дифференциальные уравнения», «Комплексные числа и действия над ними», входящим в «Математический анализ» и рассмотреть, применяя изученный математический аппарат, модель процесса механических колебаний.

В рамках темы мы, используя подход к решению линейных однородных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами, будем описывать процесс механических колебаний на примере движения груза, прикрепленного к упругой пружине. Нам в исследованиях наиболее интересен случай комплексных корней.

Первое упоминание о комплексных числах содержится в труде математика XVI века Кардано «Великое искусство, или об алгебраических правилах», который счел их непригодными к употреблению. Через несколько лет другой математик Бомбелли понял, что кубическое уравнение имеет три корня (в решении встречается квадратный корень из отрицательного числа). Право на существование комплексным числам дал Гаусс, который назвал такие числа комплексными и привел их геометрическую интерпретацию, а также доказал, что каждый многочлен с вещественными коэффициентами, принимающий как положительное, так и отрицательное значение, имеет корень. Понятие комплексного числа расширяет поле вещественных (действительных) чисел, в котором многочлен $z^2+1=0$ имеет корень. Такие числа имеют свои формы записи: алгебраическую ($z = x+i\cdot y$); показательную ($z = |z|\cdot e^{i\varphi}$); тригонометрическую ($z = |z|\cdot(cos\varphi+isin\varphi)$). В ходе расчетов здесь наиболее часто используется алгебраическая и тригонометрическая форма записи комплексных чисел.

Как упомянуто ранее, дифференциальные уравнения – уравнения, связывающие независимую переменную, функцию этой переменной и ее производные или дифференциалы различных порядков. Линейное однородное дифференциальное уравнение 2-го порядка с постоянными коэффициентами, которое участвует в описании процесса затухающих колебаний, имеет вид $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$, где a_1, a_2 –

действительные числа. Алгоритм нахождения решения таких уравнений хорошо изложен в курсе высшей математики, поэтому, более подробно, остановимся сначала на физической стороне изучаемого вопроса.

Колебаниями называются движения или процессы, которые повторяются во времени. Простейшим типом колебаний являются гармонические, где колеблющаяся величина изменяется со временем по закону синуса (косинуса). Гармонические колебания описываются уравнением типа $s = A\cos(\omega_0 t+\varphi)$ или $s = A\sin(\omega_0 t+\varphi)$, где A – амплитуда колебания, ω_0 – круговая (циклическая частота $\omega_0 = 2\pi\nu$), $(\omega_0 t+\varphi)$ – фаза колебания, определяющая смещение колеблющейся величины от положения равновесия в данный момент t, φ - начальная фаза, определяющая смещение колеблющейся величины от положения равновесия в начальный момент времени t_0. Определенные состояния системы, совершающей гармонические колебания, повторяются через промежуток времени T, называемый периодом колебания,

Колебания бывают механическими и электромагнитными. К механическим относят звук, вибрацию, колебания математического маятника, пружинного маятника, а к электромагнитным – радиоволны, микроволны, инфракрасное излучение, видимый свет, ультрафиолетовое, рентгеновское и гамма-излучения. Рассмотрим подробнее случай механических затухающих колебаний пружинного маятника. Затухающие колебания – колебания, амплитуды которых из-за потерь энергии реальной колебательной системой с течением времени уменьшаются.

Формулировка задачи. Пусть имеется некоторая система, в которой присутствует упругая пружина с грузом, колебания совершаются под действием сил сопротивления среды (рис. 1). В начальный момент времени, мы сообщили начальную скорость грузу $x' = x_0 = 10$ см/сек. Записать уравнение, описывающее данный процесс и проанализировать его решение в случае комплексных корней.

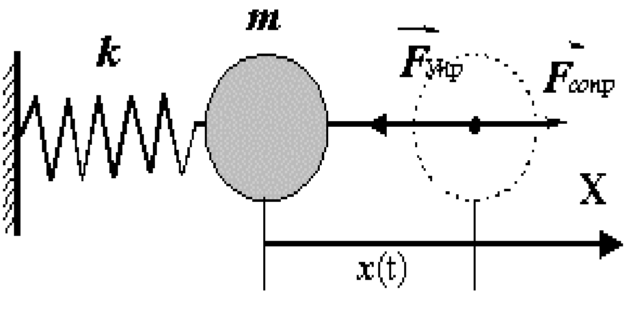

Рис. 1.

Решение. Из курса физики известно, что движение тел под действием внешних сил может быть описано с помощью второго закон Ньютона для данной системы: $m\cdot\bar{a} = \bar{F} = \bar{F}_{сопр} + \bar{F}_{упр}$, где $\bar{F}_{сопр} = -cv$ – сила сопротивления среды, $\bar{F}_{упр} = -kx$ - упругая сила, возникающая из-за того, что груз растягивает пружину, $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, $\zeta = \dfrac{c}{2\sqrt{km}}$. Тогда уравнение затухающих колебаний запишется в следующем виде: $x'' = -2\zeta\omega_0 x' - \omega_0{}^2 x \;\;\Rightarrow\;\; x'' + 2\zeta\omega_0 x' + \omega_0{}^2 x = 0$.

Получили линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Решая его, осуществим замену

$x'' = k^2, \quad x' = k, \quad x = k^0 = 1$ и получим квадратное уравнение вида $k^2 + 2\zeta\omega_0 k + \omega_0{}^2 = 0$. Находя корни квадратного уравнения, имеем:

$$k_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} = \frac{-2\zeta\omega_0 + \sqrt{4\omega_0{}^2\zeta^2 - 4\omega_0{}^2}}{2} = \frac{-2\zeta\omega_0 + 2\omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}}{2} = -\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{\zeta^2 - 1}.$$

В зависимости от вида корней данного уравнения рассмотрим три различных случая записи решения однородного уравнения:

1) если $\zeta > 1$ то существуют два различных действительных корня, тогда
$$y = C_1 e^{k_1 t} + C_2 e^{k_2 t};$$
2) если $\zeta = 1$, то – два действительных равных корня $k_1 = k_2 = k$, тогда
$$y = (C_1 + C_2 x)e^{kt};$$
3) если $\zeta < 1$, то – два комплексных корня $k_{1,2} = -\zeta\omega_0 + \omega_0\sqrt{-1(1-\zeta^2)} = -\zeta\omega_0 + i\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$, тогда $x = e^{-\zeta\omega_0 t}\,(C_1 \cos\omega_d t + C_2 \sin\omega_d t)$, где $\omega_d = \omega_0\sqrt{1-\zeta^2}$ – собственная частота колебаний.

Из физических соображений естественно предположить, что величина $\zeta^2 - 1 < 0$, поэтому более подробно с прикладной точки зрения остановимся на случае комплексных корней и решим задачу Коши о нахождении частного решения рассматриваемого дифференциального уравнения с начальными условиями:

$$\begin{cases} x(0) = 0, \\ x'(0) = 10. \end{cases}$$

Определим значения C_1 и C_2 из заданных начальных условий, вида общего решения $x = e^{-\zeta\omega_0 t}\,(C_1 \cos\omega_d t + C_2 \sin\omega_d t)$ и его производной

$$x' = e^{-\zeta\omega_0 t}\,(-\zeta\omega_0)(C_1 \cos\omega_d t + C_2 \sin\omega_d t) + e^{-\zeta\omega_0 t}\,(-C_1\omega_d \sin\omega_d t + C_2\omega_d \cos\omega_d t):$$

$$\begin{cases} x(0) = e^0(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) = 1(C_1 \cdot 1 + C_2 0) = C_1 = 0, \\ x'(0) = e^0(-\zeta\omega_0)(C_1 \cos 0 + C_2 \sin 0) + e^0\omega_d(-C_1 \sin 0 + C_2 \cos 0) = 10. \end{cases}$$

Решая систему $\begin{cases} C_1 = 0, \\ -\zeta\omega_0 C_1 + \omega_d C_2 = 10 \end{cases}$, имеем: $C_1 = 0$, а $C_2 = \dfrac{10}{\omega_d}$. Подставим найденные значения C_1 и C_2 в общее решение дифференциального уравнения и получим следующий закон движения груза:

$$x(t) = e^{-\zeta\omega_0 t}\,\frac{10}{\omega_d}\sin\omega_d t = \frac{10e^{-\zeta\omega_0 t}\sin\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}\,t}{\omega_0\sqrt{1-\zeta^2}}.$$

Проиллюстрируем геометрически данный физический закон и построим графики функции $x(t)$, используя стандартный графический редактор, придавая величинам основных параметров колебательного процесса значения близкие к низкому, среднему и высокому уровню:

1. если $\omega_0 = 2\pi\nu = 2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}2 = 1{,}256$ и $\zeta = 0{,}2$, то $x = (10\,e^{-0{,}2512t}\sin 1{,}231t)/(1{,}231)$ (рис.2);
2. если $\omega_0 = 2\pi\nu = 2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}5 = 3{,}14$ и $\zeta = 0{,}5$, то $x = (10\,e^{-1{,}57t}\sin 2{,}719t)/(2{,}719)$ (рис.3);
3. если $\omega_0 = 2\pi\nu = 2\cdot 3{,}14\cdot 0{,}8 = 5{,}024$ и $\zeta = 0{,}8$ то $x = (10\,e^{-4{,}0192t}\sin 3{,}014t)/(3{,}014)$(рис.4).

Анализируя представленные графики, можно отметить, что колебания при увеличении силы сопротивления среды и упругой силы будут достаточно быстро затухать.

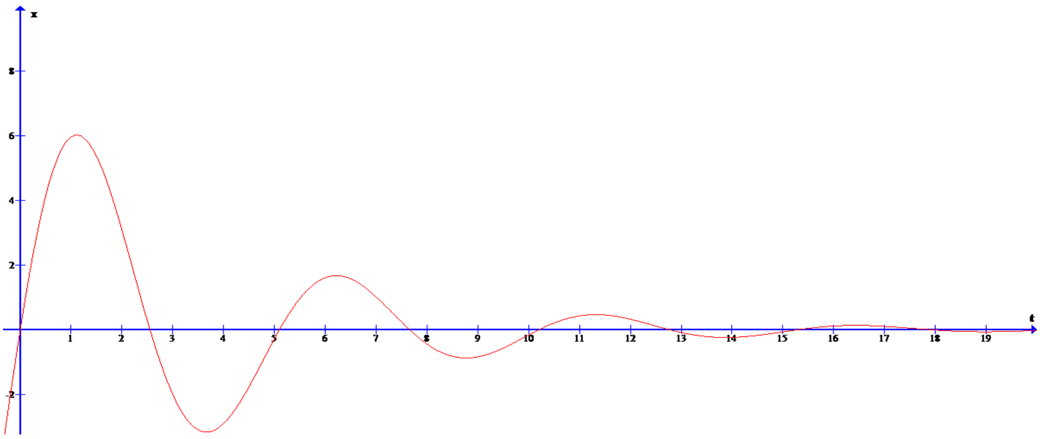

Рис. 2.

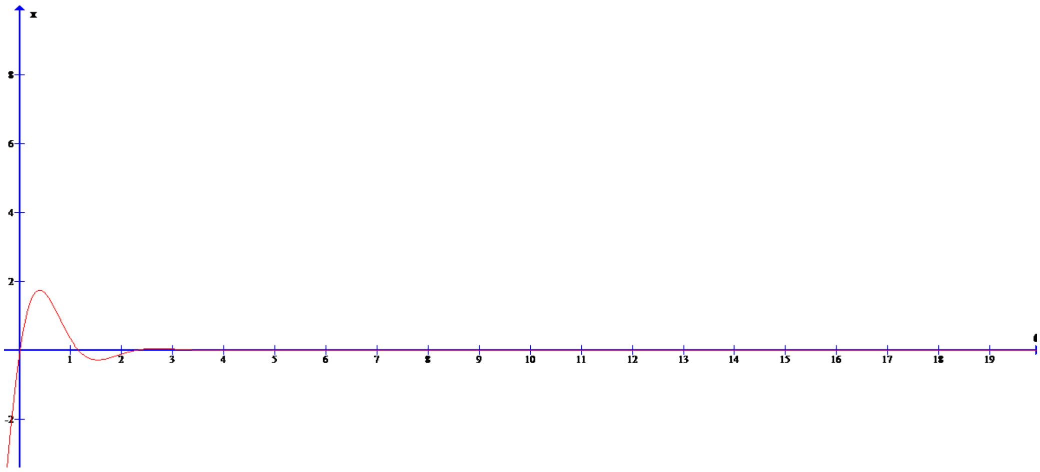

Рис. 3.

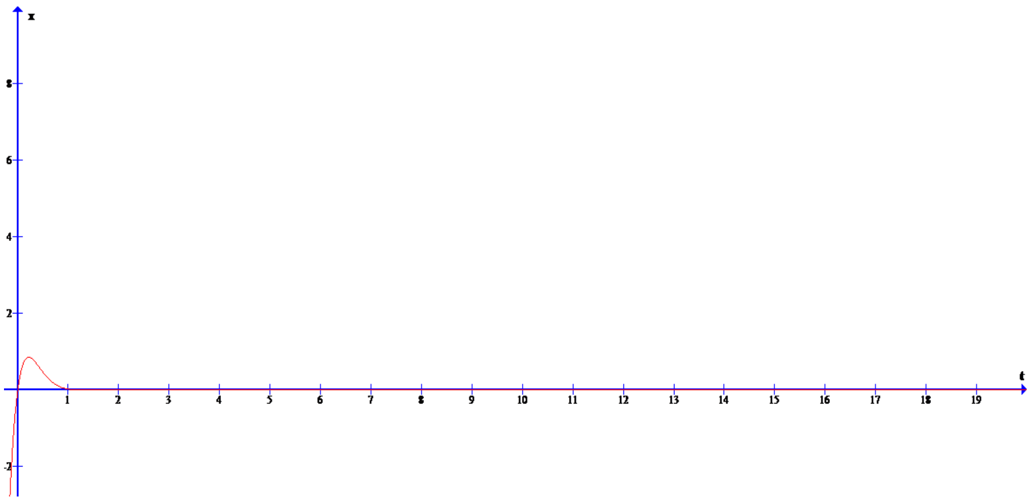

Рис. 4.

Подводя итог, отметим, что, так как мы являемся студентами направления «Металлургия» вуза, то для нас наиболее важен прикладной аспект использования математического аппарата к построению моделей различных процессов и явлений. Приведенный выше пример это наглядно проиллюстрировал. Рассмотрение комплексных решений вещественных дифференциальных уравнений используется в физических и технических задачах достаточно широко, в том числе и для случая электромагнитных колебаний в электротехнике.