Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Космических и информационных технологий
институт
Высокопроизводительные вычисления
кафедра

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
________ Д.А. Кузьмин
подпись инициалы, фамилия
«_____» ________ 2019 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ПРИМЕНЕНИЕ ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ГРАФОВ КЭЛИ ГРУПП ПОДСТАНОВОК

тема

09.04.01 Информатика и вычислительная техника
код и наименование направления

09.04.01.01 «Высокопроизводительные вычислительные системы»
код и наименование магистерской программы

Научный руководитель	____________ подпись, дата	к.т.н., доцент должность, ученая степень	Д.А. Кузьмин инициалы, фамилия
Выпускник	____________ подпись, дата		Я.С. Алексеева инициалы, фамилия
Рецензент	____________ подпись, дата	директор ИКИВТ СибГУ, должность, ученая степень	А.А. Кузнецов инициалы, фамилия
Нормоконтролер	____________ подпись, дата	канд.техн.наук., доцент должность, ученая степень	В.И. Иванов инициалы, фамилия

Красноярск 2019

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт космических и информационных технологий
институт

Высокопроизводительные вычисления
кафедра

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой

_____ Д.А. Кузьмин
подпись инициалы, фамилия

«____» _____ 2019 г.

ЗАДАНИЕ
НА ВЫПУСКНУЮ КВАЛИФИКАЦИОННУЮ РАБОТУ
в форме магистерской диссертации

Студенту Алексеевой Яне Самсоновне

Группа КИ17-01-1М. Направление (специальность) 09.04.01, «Информатика и вычислительная техника».

Тема выпускной квалификационной работы: «Применение высокопроизводительных вычислений для исследования графов Кэли групп подстановок».

Утверждена приказом по университету № 3734/с от 14.03.2019
Руководитель ВКР Д.А. Кузьмин, канд. техн. наук, доцент, заведующий кафедрой «Высокопроизводительных вычислений».

Исходные данные для ВКР: Суперкомпьютерный комплекс СФУ.

Перечень разделов ВКР: Введение, Основные определения и понятия, Программная реализация алгоритма A-I на языке C++, Исследование графов Кэли группы кубика Рубика размерности 2x2x2, Заключение, Список литературы

Перечень графического или иллюстративного материала с указанием основных чертежей, плакатов, слайдов: презентационные слайды pdf.

Руководитель ВКР	________ подпись, дата	Д.А. Кузьмин инициалы, фамилия
Задание принял к исполнению	________ подпись, дата	Я.С. Алексеева инициалы, фамилия

« ___ » __________ 2019 г.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Определение графа Кэли было дано известным английским математиком А. Кэли в во второй половине XIX века для представления алгебраической группы, заданной некоторым фиксированным множеством порождающих элементов [11].

В настоящее время теория графов Кэли развивается как отдельная большая ветвь теории графов. Графы Кэли находят применение как в математике, так и за ее пределами [27]. Известная задача по определению так называемого «числа Бога» кубика Рубика $3 \times 3 \times 3$, т. е. минимального количества поворотов граней кубика за которое его можно «собрать» из любого начального положения, сводится к исследованию соответствующего графа Кэли [28].

Важное применение графы Кэли нашли в информационных технологиях после пионерской работы 1986 года С. Эйкерса и Б. Кришнамурти [23], которые впервые предложили применять указанные графы для представления компьютерных сетей и топологий суперкомпьютеров [4, 22]. С тех пор данное направление активно развивается. Графы Кэли имеют много замечательных свойств, такие как регулярность, вершинная транзитивность, малые диаметр и степень при наличии достаточно большого числа вершин в графе. Такие известные топологии сети, как «кольцо», «гиперкуб» и «тор» [2], являются графами Кэли.

Для вычисления диаметра графа необходимо найти кратчайшие пути, связывающие все пары вершин в графе, затем среди них выбрать наибольший путь, длина которого и будет являться диаметром графа. Соответственно, средний диаметр графа будет равен среднему арифметическому всех длин кратчайших путей.

Если граф представлен в виде матрицы смежности, то задача по вычислению диаметра графа решается полиномиальным алгоритмом (например, алгоритмом Дейкстры [15]). Специфика же графов Кэли такова, что в исходной ситуации известны только порождающие элементы и определяющие соотношения группы. Чтобы вычислить диаметр графа Кэли сначала требуется найти для каждого элемента группы минимальное слово, т. е. представить элемент в виде комбинации из порождающих наименьшей длины, затем определить максимальную длину минимальных слов, которая и будет являться диаметром графа Кэли.

В общем случае задача по вычислению минимального слова элемента группы, а следовательно и диаметра графа Кэли, является NP–трудной [24]. Так, при вычислении в 2010 году упомянутого выше числа Бога, которое равно диаметру соответствующего графа Кэли, Т. Рокики, Г. Коцемба, М. Дэвидсон и Д. Детридж доказали, что любая конфигурация кубика Рубика $3 \times 3 \times 3$ может быть решена не более чем в 20 ходов [25]. Для этого потребовалось около 35 лет процессорного времени.

Цель магистерской диссертации – *на основе высокопроизводительных вычислений исследовать графы Кэли групп подстановок.*

Поставленная в работе цель достигается путем решения следующих **задач**.

1. Изучить литературу по основам теории групп и теории графов, а также по параллельным алгоритмам и инструментам их реализации на многопроцессорных вычислительных системах.

2. Создать параллельный алгоритм для исследования графов Кэли групп подстановок, обосновать его корректность.

3. Реализовать данный алгоритм на языке C++.

4. Исследовать графы Кэли групп подстановок на примере группы кубика Рубика размерности $2 \times 2 \times 2$.

5. По результатам вычислительных экспериментов определить ускорение предложенного параллельного алгоритма в зависимости от количества процессорных ядер, а также эффективность их использования.

Структура работы. Магистерская диссертация состоит из введения, трех глав основного текста, заключения и списка литературы.

Во **введении** обоснована актуальность темы работы, определены цель и задачи исследования.

В **первой главе** приведены основные понятия из теории групп и теории графов. После чего дано описание параллельного алгоритма для вычисления функции роста, диаметра и среднего диаметра графа Кэли произвольной группы подстановок. Затем доказана корректность представленного алгоритма, а в конце главы приведены примеры, иллюстрирующие его работу.

В **главе 2** настоящей работы приведен текст программы на языке С++, представленного в главе 1 алгоритма А–I.

В **третьей главе** содержатся результаты вычислительных экспериментов на графах Кэли группы кубика Рубика размерности $2 \times 2 \times 2$, а также даются оценки ускорения параллельного алгоритма и его эффективности.

В **заключении** приводятся основные результаты и выводы, полученные в процессе выполнения работы.

Изъяты страницы с 6 по 30

Заключение

В результате исследования были решены все сформулированные в работе задачи и достигнута поставленная цель.

1. Изучена литература по основам теории групп и теории графов, а также по параллельным алгоритмам и инструментам их реализации на многопроцессорных вычислительных системах.

2. Создан параллельный алгоритм для исследования графов Кэли групп подстановок, обоснована его корректность.

3. Данный алгоритм был реализован на языке C++. Для распараллеливания алгоритма была использована библиотека OpenMP.

4. Исследованы графы Кэли групп подстановок на примере группы кубика Рубика размерности $2 \times 2 \times 2$.

5. По результатам вычислительных экспериментов определены ускорение предложенного параллельного алгоритма в зависимости от количества процессорных ядер, а также эффективность их использования.

Результаты диссертации могут быть использованы в качестве инструмента для решения задач на графах Кэли. В частности, созданное программное обеспечение может быть полезным при проектировании топологии МВС. В этом случае модель МВС будет представлена в виде графа Кэли, в котором процессоры являются вершинами графа, а ребра соответствуют физическим соединениям между процессорами. Вычислительные эксперименты позволят изучить характеристики рассматриваемого графа, что в свою очередь дает возможность оценить эффективность топологии МВС.

Список литературы

[1] Барский А.Б. Параллельные информационные технологии: учебное пособие. М.: Интернет-Университет Информациооных Технологий; Бином. Лаборатория знаний, 2007. 503 с.

[2] Богданов А.В., Корхов В.В., Мареев В.В., Станкова Е.Н. Архитектуры и топологии многопроцессорных вычислительных систем. Курс лекций. М.: ИНТУИТ.РУ “ Интернет-университет информационных технологий“, 2004. 176 с.

[3] Босс В. Лекции по математике. Т. 8: Теория групп. М.: КомКнига, 2007. 216 с.

[4] Гергель В.П. Теория и практика параллельных вычислений: учебное пособие. М.: Интернет-Университет Информациооных Технологий; Бином. Лаборатория знаний, 2007. 423 с.

[5] Гоппа В.Д. Введение в алгебраическую теорию информации. М.: Наука. Физматлит, 1995. 112 с.

[6] Гроссман И., Магнус В. Группы и их графы / пер. с англ. М.: Мир, 1971. 246 с.

[7] Дэвенпорт Дж., Сирэ И., Турнье Э. Компьютерная алгебра: символьные и алгебраические вычисления / пер. с англ. М.: Мир, 1991. 350 с.

[8] Дяконов В.П. Компьютерная математика. Теория и практика. М.: Нолидж, 2001. 1296 с.

[9] Емеличев В.А., Мельников О.И., Сарванов В.И., Тышкевич В.И. Лекции по теории графов. М.: Либроком, 2009. 392 с.

[10] Коксетер Г., Мозер У. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп / пер. с англ. М.: Наука, 1980. 240 с.

[11] Константинова Е.В. Комбинаторные задачи на графах Кэли // Новосибирск: НГУ, 2010. 110 с.

[12] КузнецовА.А., Кузнецова А.С. Параллельный алгоритм для исследования графов Кэли групп подстановок // Вестник СибГАУ. 2014. № 1. С. 34–39.

[13] Кузнецов М. И., Бурланков Д.Е., Долгов Г.А., Чирков А.Ю., Яковлев В.А. Компьютерная алгебра. Н. Новгород: Изд-во Нижегород. гос. ун-та, 2002. 223 с.

[14] Курош А.Г. Теория групп. СПб.: Лань, 2005. 648 с.

[15] Новиков Ф.А. Дискретная математика для программистов: Учебник для вузов. СПб: Питер, 2008. 384 с.

[16] Ноден П., Китте К. Алгебраическая алгоритмика (с упражнениями и решениями). М.: Мир, 1999. 720 с.

[17] Оре О. Теория графов. М.: Наука, 1980. 336 с.

[18] Самсонов Б.Б., Плохов Е.М., Филоненков А.И. Компьютерная математика (основание информатики). Ростов-на-Дону: Феникс, 2002. 512 с.

[19] Системный анализ и принятие решений: Словарь-справочник: учеб. пособие для вузов / под. ред. В.Н. Волковой, В.Н. Козлова. М.: Высш.шк., 2004. 616 с.

[20] Уилсон Р. Введение в теорию графов / пер с англ. М.: Мир, 1977. 208 с.

[21] Харари Ф. Теория графов. М.: КомКнига, 2006. 296 с.

[22] Эндрюс Г.Р. Основы многопоточного, параллельного и распределенного программирования / пер. с англ. М.: Издательсткий дом “Вильямс“, 2003. 512 с.

[23] Akers S., Krishnamurthy B. A group theoretic model for symmetric interconnection networks // Proceedings of the International Conference on Parallel Processing, 1986. P. 216–223.

[24] Even S., Goldreich O. The Minimum Length Generator Sequence is NP–Hard // Journal of Algorithms. 1981. Vol. 2. P. 11–313.

[25] God’s Number is 20 // URL: http://www.cube20.org/ (дата обращения: 02.06.2017).

[26] Heydemann M. Cayley graphs and interconnection networks, in Graph symmetry: algebraic methods and applications (Editors: Hahnand Sabidussi) // Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1997. P. 167–226. 167–226.

[27] Holt D., Eick B., O’Brien E. Handbook of computational group theory. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2005. 514 p.

[28] Joyner D. Adventures in group theory. Rubic’s Cube, Merlin’s Mashine, and other Mathematical Toys. Baltimore: The Johns Hopkins University Press, 2008. 310 p.

[29] Schibell S., Stafford R. Processor interconnection networks and Cayley graphs // Discrete Applied Mathematics. 1992. Vol. 40. P. 337–357.

[30] Seress. A. An introduction to computational group theory // Notices AMS. 1997. 44, № 6. P 671–679.

[31] Sims C. Computation with finitely presented groups. Cambridge: Cambridge University Press, 1994. 628 p.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение
высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт космических и информационных технологий
Кафедра «Высокопроизводительные вычисления»

УТВЕРЖДАЮ Заведующий
кафедрой

_______ Д.А. Кузьмин
подпись инициалы, фамилия
« 3 » 07 2019 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ПРИМЕНЕНИЕ ВЫСОКОПРОИЗВОДИТЕЛЬНЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ГРАФОВ КЭЛИ ГРУПП ПОДСТАНОВОК

09.04.01 Информатика и вычислительная техника

09.04.01.01 «Высокопроизводительные вычислительные системы»

Научный руководитель 26.06.19 к.т.н., доцент Д.А. Кузьмин
подпись, дата должность, ученая степень инициалы, фамилия

Выпускник 25.06.19 Я.С. Алексеева
подпись, дата инициалы, фамилия

Рецензент 26.06.19 директор ИКИВТ СибГУ, А.А. Кузнецов
подпись, дата должность, ученая степень инициалы, фамилия

Нормоконтролер 03.07.19 к.т.н., доцент В.И. Иванов
подпись, дата должность, ученая степень инициалы, фамилия

Красноярск 2019