Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_____ / В.М. Левчук
«___» _____2019 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.01 Математика

ПОСТРОЕНИЕ АЛГЕБРЫ ЛИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент _____/ О.Н. Жданов

Выпускник _____/ И.В. Семенова

Красноярск 2019

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Современные модели в прикладных науках описываются дифференциальными уравнениями. Одним из направлений для исследования системы дифференциальных уравнений является современный групповой анализ, истоки группового анализа дифференциальных уравнений находятся в фундаментальных работах Софуса Ли.

1 Основные понятия и определения

1.1 Однопараметрические группы Ли и операторы

Рассматриваются преобразования $T : R^n \rightarrow R^n$, определяемые формулой $\bar{x} = f(x)$: $x,\ \bar{x} \in R^n$. Предполагается, что преобразования T обратимы, то есть существует T^{-1} такое, что $x = T^{-1}\bar{x}$. Произведением преобразований T_1и T_2 является их композиция, то есть последовательное применение $(T_1T_2)x = T_1(T_2x)$. Умножение, заданное таким правилом, обладает свойством ассоциативности: $T_1(T_2T_3) = (T_1T_2)T_3$.

Рассмотрим семейство преобразований $\{T_a\}$,определяемое формулами $\bar{x} = f(x, a)$: $x, \bar{x} \in R^n$ и зависящее от вещественного параметра $a \in \Delta \subset$ R.

<u>Определение 1</u>. Семейство преобразований $\{T_a\}$ называется *локальной однопараметрической непрерывной группой Ли*, если существует интервал $\Delta' \subset \Delta$ такой, что выполнены следующие аксиомы:

1. $\{T\}$ замкнуто в Δ' относительно операции умножения, то есть для всех $\forall\ a, b \in \Delta'$ выполнено$T_aT_b = T_c \in \{T\}$, где с $= \varphi(a, b) \in \Delta'$ - закон умножения в группе;
2. Закон умножения является гладким, то есть $\varphi(a, b) \in C^2(\Delta' \times \Delta')$;
3. Семейство $\{T\}$ локально упорядочено в Δ', то есть $\forall\ a, b \in \Delta'$из$T_a = T_b$следует $a = b$.
4. Семейство$\{T\}$содержит единицу в Δ', то есть $\exists a_0 \in \Delta'$ такое, что $T_{a_0} = I$ – тождественное преобразование.
5. Существование обратного элемента, то есть $\forall a \in \Delta'\ \exists a^{-1} \in \Delta'$ такой, что $\varphi(a^{-1}, a) = \varphi(a, a^{-1}) = a_0$ (иначе записывается так: $T_a^{-1} = T_{a^{-1}}$).

Интервал Δ' может быть выбран достаточно малым так, чтобы в нём выполнялись аксиомы, поэтому в определение группы применяется термин «локальная». В последующем однопараметрическая непрерывная группа Ли локальных преобразований обозначается символом G_1.

Определение 2. Параметр a называется *каноническим*, в случае если закон умножения в группе G_1 определяется формулой $\varphi(a,b) = a + b$.

Инфинитезимальный оператор

Рассматривается локальная однопараметрическая группа Ли G_1 с каноническим параметром $a \in \Delta \subset R$, которая задана преобразованиямиT_a : $\bar{x} = f(x,a), x \in R^n$. Функцию $f(x,a)$ будем называть производящей функцией группы G_1. Фиксируя точку x и изменяя параметрa, получим кривую в пространстве R^n, представляющую собой орбиту точки x. Касательный к данной кривой вектор ξ в точке x состоит из компонент

$$\xi^i(x) = \left.\frac{\partial f^i(x,a)}{\partial a}\right|_{a=0}.$$

Определение 3. *Инфинитезимальным оператором* группы G_1 называется дифференциальный оператор

$$X = \sum_{i=1}^{n} \xi^i(z) \frac{\partial}{\partial z^i}.$$

1.2 Инварианты и инвариантные многообразия однопараметрической группы преобразований

Определение 4.Функция $F(z)$ называется *инвариантом* группы преобразований $z' = f(z,a) \equiv z + \xi(z)a + o(a)$, если ∀(допустимых) z, a: $F(f(z,a)) = F(z)$.

Определение 4'. Функция $F(x)$ называется *инвариантом* группы преобразований G_1, если $\forall T \in G_1$ имеет место тождество $F(Tx) = F(x)$.

Теорема. Функция $F(x)$ называется инвариантом группы преобразований $G_1 \Leftrightarrow$ когда выполнено равенство:

$$XF \equiv \xi^i(x)\frac{\partial F}{\partial x^i} = 0. \qquad (1)$$

Определение 5. Полный набор функционально независящих инвариантов группы называется *базисом инвариантов* этой группы.

Замечание. Критерий инвариантности $\xi^i(z) = \frac{\partial F(z)}{\partial z^i} = 0$ представляет собой линейное однородное уравнение в частных производных 1-го порядка. Вследствие этого всякая однопараметрическая группа преобразований в R^NимеетN-1 функционально независящих инвариантов, при этом всякий другой инвариант предоставленной группы является функцией данныхN-1 «базисных» инвариантов. В качестве такого базиса можно выбрать левые части первых интегралов

$$J_1(z) = C_1, \dots, J_{N-1}(z) = C_{N-1}$$

характеристической системы

$$\frac{dz^1}{\xi^1(z)} = \frac{dz^2}{\xi^2(z)} = \cdots = \frac{dz^N}{\xi^N(z)}.$$

Определение 6. *Многообразие* — хаусдорфово топологическое пространство со счётной базой, любая точка которого обладает окрестностью, гомеоморфной евклидову пространству. Евклидово пространство является самым простым примером многообразия. Более сложным примером может служить поверхность Земли.

Гомеоморфизм - взаимно однозначное и взаимно непрерывное отображение топологических пространств.

Определение 7. *Многообразие M инвариантно* относительно группы G_1⇔ когда для всякой точки $x \in M$ и для любого преобразования $T \in G_1$выполнено $Tx \in M$.

Пусть многообразие $M \subset R^n$ задано системой уравнений:

$$\text{M:} \qquad \psi^{\sigma}(x) = 0, \qquad \sigma = 1, \dots, s. \tag{2}$$

<u>Определение 8.</u> *Многообразие M регулярно* задано уравнениями (2) если матрица Якоби $\left\| \frac{\partial \psi^{\sigma}}{\partial x^{i}} \right\|$ имеет в точках M ранг равный s. Число $n - s$называется размерностью, а s – коразмерностью многообразия M.

Критерий инвариантности.

Пусть $F = (F^1, \dots, F^p)$ – аналитическая функция от $x = (x^1, \dots, x^n)$ и дифференциальной переменной $u = (u^1, \dots, u^m)$, то есть $F = (x, u, u_1, \dots, u_s)$, где $s \geq 1$ – некоторое натуральное число. Символом $\underset{v}{F}$ обозначается совокупность функций $D_{i_1} \dots D_{i_v}(F)$. Уравнение порядка s

$$F = (x, u, u_1, \dots, u_s) = 0, \tag{4}$$

рассматривается совместно со всеми дифференциальными следствиями и тем самым порождает (бесконечномерное) многообразие [F] ⊂ Z, заданное бесконечной системой уравнений

$$[\mathrm{F}]: F = 0, \qquad F_v = 0, \qquad v = 1,2, \dots \tag{5}$$

Будем говорить, что уравнение (4) задаёт дифференциальное многообразие [F]. Уравнение (5) называется инвариантным относительно группы Ли, в случае если инвариантно многообразие [F].

Теорема. Пусть G_1 – группа преобразований Ли, а X- её касательное векторное поле. Дифференциальное многообразие [F] инвариантно относительно G_1 тогда и только тогда, когда

$$(XF)_{[F]} = 0.$$

1.3 Теория продолжения

Дано пространство$Z = R^n(x) \times R^m(u) = \mathrm{X} \times \mathrm{U}$. Переменные делятся на два типа: $x = (x^1, \dots, x^n)$ – независимые переменные, $u = (u^1, \dots, u^m)$ – функции отx.

<u>Определение 9.</u>k*-ым продолжением* пространства Z называется пространство

$$Z_k = X \times \mathrm{U} \times U_1 \times \dots \times U_k.$$

Здесь $U_s = \left\{\frac{\partial^s u^\alpha}{\partial x^{j_1 \cdots} x^{j_s}}\right\}$ – пространство всех производных k-го порядка.

Координатами (независимыми переменными) в продолженном пространстве Z_k считаются переменные x, функции u, и все производные $u^\alpha_{j_1 \dots j_s}$ до k -го порядка включительно. Размерность продолженного пространства вычисляется по формуле

$$v_k = dim Z_k = n + m C^n_{n+k}.$$

<u>Определение 10.</u> Локальная группа Ли G_k, полученная распространением преобразований группы G_1 на производные по простым правилам замены переменных, действующая в пространстве Z_k, называется k*-ым продолжением локальной группы Ли* G_1.

Продолженной группе G_k отвечает оператор:

$$X_k = \xi^i \partial_{x^i} + \eta^\alpha \partial_{u^\alpha} + \zeta^\alpha_i \partial_{u^\alpha_i} + \dots + \zeta^\alpha_{i_1 \dots i_k} \partial_{u^\alpha_{i_1 \dots i_k}}.$$

Далее индексы принимают следующие значения: $\alpha = 1, \dots, m;\ \ i, i_1, \dots, i_k = 1, \dots, n$, по повторяющимся индексам выполняется суммирование. Координаты продолженного оператора X_k вычисляются по формуле:

$$\zeta^\alpha_{i_1 \dots i_k} = D_{j_1} \dots D_{j_n}\left(\eta^\alpha - u^\alpha_i \xi^i\right) + \xi^i u^\alpha_{i j_1 \dots j_k},$$

D_i – оператор полной производной по i-ой переменной:

$$D_i = \partial_{x^i} + u_i^\alpha \partial_{u^\alpha} + \cdots + u_{ij_1\ldots j_k}^\alpha \partial_{u_{j_1\ldots j_k}^\alpha} + \cdots$$

Важно, что во всех данных формулах координаты x,u, а также все производные $u_{j_1\ldots j_k}^\alpha$ должны рассматриваться как независимые переменные.

Операция продолжения обладает следующими свойствами:

- Линейность.
- Инвариантность относительно замены координат: операции замены переменных$(x, u) \leftrightarrow (u, v)$и продолжения перестановочны.
- Сохранение коммутатора: $\forall X_1, X_2$ – операторов верно$\underset{k}{[X_1, X_2]} = \left[\underset{k}{X_1}, \underset{k}{X_2}\right]$.

1.4 Дифференциальные инварианты группы преобразований

<u>Определение 11.</u> *Дифференциальные инварианты группы* G_1 называется инвариант продолженного действия группы G_1, то есть такая функция $F = (x, u, u_1, \ldots, u_k)$, что для всякого преобразования $T \in G_1$ выполнено

$$F(Tx, Tu, T_1 u_1, \ldots, T_k u_k) = F(x, u, u_1, \ldots, u_k).$$

Порядок k самой старшей производной, входящей в F, называется *порядком дифференциального инварианта*. Дифференциальными инвариантами нулевого порядка считаются конечные инварианты группы G_1.

<u>Определение 12.</u> Говорят, что *система дифференциальных уравнений* E *допускает локальную группу преобразований* G_1, в случае если многообразие $E \subset Z_k$ является дифференциальным инвариантным многообразием группы G_1, то есть

$$X_k E(x, u, u_1, \ldots, u_k)|_E = 0.$$

1.5 Разрешимая алгебра

Определение 13. Алгебра Ли L называется *разрешимой*, если цепочка её последовательных производных обрывается впоследствии конечного количества шагов, то есть $L^{(p)} = 0$ при некотором p.

Определение 14. Алгебра Ли L называется *разрешимой*, если в ней существует цепочка вложенных подалгебр

$$(0) = A_0 \subset A_1 \subset \cdots \subset A_{m-1} \subset A_m = L,$$

таких, что A_{k-1} считается идеалом A_k и фактор-алгебра A_k/A_{k-1} коммутативна.

1.6 Тензор

Определение 15. *Тензор* — объект линейной алгебры, линейно преобразующий элементы 1-го линейного пространства в элементы другого. Частными случаями тензоров считаются скаляры, векторы и т. п.

Определение 16. *Тензор напряжений* — тензор 2-го ранга, состоящий из 9-ти величин, представляющих механические напряжения в любой точке нагруженного тела. В декартовой системе координат эти 9-ть величин записываются в виде таблицы, в которой по главной диагонали стоят *нормальные* составляющие векторов напряжений на трёх взаимно перпендикулярных площадках, проходящих через рассматриваемую точку среды, а в остальных позициях — *касательные* компоненты векторов напряжений на данных площадках.

Составляющие тензора напряжений σ_{ij} в декартовой системе координат Ox_i (то есть $Oxyz$) вводят следующим образом. Оценивают бесконечно малый объём тела (сплошной среды) в виде прямоугольного параллелепипеда, грани которого ортогональны координатным осям и имеют площади dS_i. На каждой грани dS_i параллелепипеда действуют

поверхностные силы dF_i. В случае, если обозначить проекции этих сил на оси Ox_j как dF_{ij}, то компонентами тензора напряжений называют отношение проекций силы к величине площади грани, на которой действует эта сила: $\sigma_{il} = \frac{dF_{ij}}{dS_i}$.

По индексу i здесь суммирования нет. Составляющие σ_{11} , σ_{22} , σ_{33}, обозначаемые также как σ_{xx}, σ_{yy},σ_{zz} — это *нормальные напряжения*, они предполагают собой отношение проекции силы dF_i на нормаль к площади рассматриваемой грани dS_i:

$\sigma_{11} = \frac{dF_{11}}{dS_1}$ и т. д.

Составляющие σ_{12} , σ_{23} , σ_{31},обозначаемые также как τ_{xy}, τ_{yz},τ_{zx} — это *касательные напряжения*, они представляют собой отношение проекции силы dF_i на касательные направления к площади рассматриваемой грани dS_i:

$\sigma_{12} = \frac{dF_{12}}{dS_1}$и т. д.

1.7 Идеал

Определение 18. *Идеалом кольца A* называется такое подмножество I кольца A, что

1. $\forall i, j \in I$ их сумма $i + j$ также лежит в I;
2. $\forall i \in I$ его противоположный элемент $-i$ также лежит в I;
3. (условие на правые идеалы) $\forall i \in I$ и $\forall a \in A$ произведение ia также лежит в I;
4. (условие на левые идеалы) $\forall i \in I$ и $\forall a \in A$ произведение ai также лежит в I.

1.8 Зависимые / Независимые переменные

Определение 19. Если линейная комбинация

$$C_1\alpha^{(1)} + C_2\alpha^{(2)} + \cdots + C_p\alpha^{(p)},$$

может представлять собой нулевой вектор тогда, когда среди чисел $C_1, C_2, \dots, C_p$ имеется хотя бы одно, не равное нулю, то система векторов $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(p)}$ называется *линейно зависимой.*

Определение 20. Если линейная комбинация

$$C_1\alpha^{(1)} + C_2\alpha^{(2)} + \cdots + C_p\alpha^{(p)},$$

представляет собой нулевой вектор только тогда, когда все числа $C_1, C_2, \dots, C_p$ равны нулю, то система векторов $\alpha^{(1)}, \alpha^{(2)}, \dots, \alpha^{(p)}$ называется *линейно независимой.*

1.9 Коммутаторы и коммутант

Определение 21. Если в произвольной группе G даны элементы a и b, то элемент этой группы

$$[a, b] = a^{-1}b^{-1}ab$$

называется *коммутатором* заданных элементов. Коммутатор равен единице тогда и только тогда, когда $a и b$ перестановочны, в общем же случае он в некотором смысле характеризует не перестановочность этих элементов, так как $ab = ba \cdot [a, b]$.

Свойства коммутаторов:

1. $[a, b][b, a] = 1$ откуда $[a, b]^{-1} = [b, a]$;
2. $[a, b^{-1}] = b[b, a]b^{-1}$, $[a^{-1}, b] = a[b, a]a^{-1}$;
3. $[ab, c] = b^{-1}[a, c]b[b, c]$;
4. $[a, bc] = [a, c]c^{-1}[a, b]c$.

Коммутирование можно рассматривать как новую операцию, определенную в множестве элементов группы. В общем случае данная операция не будем ассоциативной, то есть равенство

$$\big[[a, b], c\big] = \big[a, [b, c]\big] \tag{8}$$

не всегда верно. Для того чтобы узнать, когда равенство (8) выполняется, определим класс групп, более широкий, чем абелевы группы.

Коммутант.

Определение 23. Подгруппа G'группы G, порожденная множеством коммутаторов всех пар элементов данной группы, называется *коммутантом* группы G.

Со следующей теоремой связанно значение коммутанта.

Теорема. Фактор-группа по коммутанту абелева; обратно, коммутант содержится во всяком нормальном делителе.

Доказательство: Если a и b – элементы группы G, то

$$aG'bG' = abG' = ba[a,b]G' = baG' = bG'aG',$$

так как элемент $[a,b]$лежит в коммутанте G'. Если, с иной стороны, фактор-группа $G/_N$ абелева, то коммутатор всякой пары элементов изG лежит в N, то есть $G' \subseteq N$.

Определение 24. Пусть G – алгебра Ли. Введем обозначение G' для множества$[G,G]$, составленного из коммутаторов $[a,b]$, $a,b \in G$, и их различных линейных комбинаций. Алгебра G' называется *производной подалгеброй* алгебры G. По индукции вводятся также определения:

$$G'' = (G')', G''' = (G'')', \dots, G^{(k)} = \left(G^{(k-1)}\right)'.$$

2 ИССЛЕДОВАНИЕ СВОЙСТВ АЛГЕБРЫ ЛИ, СООТВЕТСТВУЮЩЕЙ СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Будем рассматривать систему уравнений плоского напряжённого состояния при условии постоянства интенсивности касательных напряжений.

Дифференциальные уравнения равновесия имеют вид (см. [1], с.225):

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \tag{1.1}$$

где σ_x и σ_y - нормальные, а τ_{xy} - касательная компоненты тензора напряжения.

Условие пластичности можно представить следующим образом:

$$\frac{1}{3}(\sigma_x^2 - \sigma_x\sigma_y + \sigma_y^2) + \tau_{xy}^2 = k^2. \tag{1.2}$$

Следуя [1], в уравнения (1.1) подставим выражения

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \end{Bmatrix} = k(\sqrt{3}\cos\omega \pm \sin\omega\cos 2\varphi), \qquad \tau_{xy} = k\sin\omega\sin 2\varphi, \tag{1.3}$$

тождественно удовлетворяющие условию (1.2). Получим систему уравнений

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\varphi - \dfrac{1}{2}ctg\omega\right)\dfrac{\partial\omega}{\partial x} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\varphi\dfrac{\partial\omega}{\partial y} - \dfrac{\partial\varphi}{\partial y} = 0, \\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\varphi\dfrac{\partial\omega}{\partial x} - \left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\varphi + \dfrac{1}{2}ctg\omega\right)\dfrac{\partial\omega}{\partial y} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial x} = 0. \end{cases} \tag{1.4}$$

К системе (1.4) применим методы группового анализа дифференциальных уравнений, следуя гл.2 книги [2]. Рассмотрим пространство переменных $x, y, \omega, \varphi, p_i^k \ \ (i, k = 1, 2)$. Уравнения (1.4) можно рассмотреть как уравнения, задающие локальное многообразие в данном пространстве после замены $\frac{\partial\omega}{\partial x}, \frac{\partial\omega}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}$ на $p_1^1,\ p_1^2,\ p_2^1,\ p_2^2$. Теперь переменные $x, y, \omega, \varphi, p_i^k$ считаются

независимыми, а многообразие M задаётся уравнениями $F_\nu(x, y, \omega, \varphi, p_1^1, p_1^2, p_2^1, p_2^2) = 0$ $(\nu = 1, 2)$. Рассмотрим однопараметрическую группу точечных преобразований в R^4:

$$\begin{aligned} x' &= f^1(x, y, \omega, \varphi, a), \quad & f^1\big|_{a=0} &= x, \\ y' &= f^2(x, y, \omega, \varphi, a), \quad & f^2\big|_{a=0} &= y, \\ \omega' &= g^1(x, y, \omega, \varphi, a), \quad & g^1\big|_{a=0} &= \omega, \\ \varphi' &= g^2(x, y, \omega, \varphi, a), \quad & g^2\big|_{a=0} &= \varphi. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Группе преобразований (2.1) соответствует инфинитезимальный оператор

$$X = \xi^1 \frac{\partial}{\partial x} + \xi^2 \frac{\partial}{\partial y} + \eta^1 \frac{\partial}{\partial \omega} + \eta^2 \frac{\partial}{\partial \varphi}. \tag{2.2}$$

В пространстве R^8переменных $(x, y, \omega, \varphi, p_1^1, p_1^2, p_2^1, p_2^2)$ преобразования (2.1) индуцируют преобразование переменных p:

$$p_i'^k = h_i^k(x, y, \omega, \varphi, p, a), \quad h_i^k\big|_{a=0} = p_i^k, \tag{2.3}$$

которые согласованы с равенствами

$$p_1^1 = \frac{\partial \omega}{\partial x}, \; p_1^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \; p_2^1 = \frac{\partial \omega}{\partial y}, \; p_2^2 = \frac{\partial \varphi}{\partial y}. \tag{2.4}$$

Условия (2.4) однозначно определяют для каждой группы G преобразования (2.3). Итогом считается однопараметрическая группа $\underset{1}{G}$ - первое продолжение группы G точечных преобразований (2.1). Оператор продолженной группы $\underset{1}{G}$ имеет вид

$$\underset{1}{X} = X + \xi_i^k \frac{\partial}{\partial p_i^k}\bigg|_{a=0}, \tag{2.5}$$

где $\xi_i^k = \left.\dfrac{dh_i^k}{da}\right|_{a=0}$, а X - оператор (2.2).

В соответствии с критерием инвариантности многообразия M (см. [2], с.47) относительно группы $\underset{1}{G}$ получаем:

$$(\underset{1}{X} F_1)\Big|_{F_1=F_2=0} = 0, \quad (\underset{1}{X} F_2)\Big|_{F_1=F_2=0} = 0. \tag{2.6}$$

Уравнения (2.6) – это определяющие уравнения группы, предполагаемой системой (1.4). Множество всех решений системы (2.6) образует алгебру Ли.

Теорема:(Гомонова О.В., Дудинова Н.Д., Жданов О.Н., Сенашов С.И.). Алгебра Ли L системы уравнений (1.4) порождается операторами:

$X_1 = x\dfrac{\partial}{\partial x} + y\dfrac{\partial}{\partial y}$, $X_2 = -y\dfrac{\partial}{\partial x} + x\dfrac{\partial}{\partial y} + \dfrac{\partial}{\partial \varphi}$, $X_3 = t^1\dfrac{\partial}{\partial x} + t^2\dfrac{\partial}{\partial y}$, где t^1, t^2 - решение системы

$$\begin{cases} \dfrac{\partial t^1}{\partial \omega} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\varphi \cdot \dfrac{\partial t^1}{\partial \varphi} + \left(\dfrac{1}{2}ctg\omega - \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\varphi\right)\dfrac{\partial t^2}{\partial \varphi} = 0, \\ \left(\dfrac{1}{2}ctg\omega + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\varphi\right)\dfrac{\partial t^1}{\partial \varphi} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\varphi \cdot \dfrac{\partial t^2}{\partial \varphi} - \dfrac{\partial t^2}{\partial \omega} = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Соответствующая данной алгебре группа Ли представляет собой максимальную группу преобразований, допускаемую системой (1.4).

Инвариантами оператора X_1 являются $\omega,\ \varphi,\ \dfrac{y}{x}$. Следовательно, у системы (1.4) существуют инвариантные решения вида $\omega = \omega\left(\dfrac{y}{x}\right)$, $\varphi = \varphi\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

Инварианты оператора X_2 - это $\omega,\ x^2 + y^2,\ \varphi - arctg\dfrac{y}{x}$. Значит, система (1.4) имеет инвариантные решения вида $\omega = \omega(x^2 + y^2)$, $\varphi = arctg\dfrac{y}{x} + f(x^2 + y^2)$, где f - некоторая функция.

Следствие 1. Алгебра L является разрешимой алгеброй ступени разрешимости 2.

Доказательство: Операторы имеют вид

$X_1 = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial y}$, $X_2 = -y\frac{\partial}{\partial x} + x\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \varphi}$, $X_3 = t^1\frac{\partial}{\partial x} + t^2\frac{\partial}{\partial y}$, где t^1, t^2 - решение системы (2.7). Запишем, как операторы действуют на функцию f:

$$X_1(f) = x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$X_2(f) = -y\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial \varphi},$$

$$X_3(f) = t^1\frac{\partial f}{\partial x} + t^2\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Формулы для вычисления коммутатора:

$$[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1,$$

$$[X_1, X_3] = X_1X_3 - X_3X_1,$$

$$[X_2, X_3] = X_2X_3 - X_3X_2.$$

Найдем первую производную подалгебру G' алгебры Ли:

I. Вычислим коммутатор $[X_1, X_2]$:

1. Композиция действий, последовательно выполненных операторами X_1 и X_2:

$$X_1\big(X_2(f)\big) = x\left(-y\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y} + x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \varphi}\right)$$
$$+ y\left(-\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + x\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \varphi}\right).$$

2. Аналогично, X_2 и X_1:

$$X_2\big(X_1(f)\big) = -y\left(\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + x\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \varphi} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \varphi}.$$

Нетрудными вычислениями получаем, что коммутатор $[X_1, X_2] = X_1X_2 - X_2X_1 = 0$.

II. Вычислим коммутатор$[X_1, X_3]$:

1. Композиция действий, последовательно выполненных операторами X_1 и X_3:

$$X_1\big(X_3(f)\big) = x\left(t^1\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + t^2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + y\left(t^1\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + t^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

2. Аналогично, X_3 и X_1:

$$X_3\big(X_1(f)\big) = t^1\left(\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + t^2\left(x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial f}{\partial y} + y\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right).$$

Аналогичными вычислениями получаем, что коммутатор $[X_1, X_3] = X_1X_3 - X_3X_1 = -t^1\frac{\partial f}{\partial x} - t^2\frac{\partial f}{\partial y}$.

III. Вычислим коммутатор$[X_2, X_3]$:

1. Композиция действий, последовательно выполненных операторами X_2 и X_3:

$$X_2\big(X_3(f)\big) = -y\left(t^1\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + t^2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right) + x\left(t^1\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + t^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) + t^1\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \varphi} + t^2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \varphi}.$$

2. Аналогично, X_3 и X_2:

$$X_3\big(X_2(f)\big) = t^1\left(-y\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial f}{\partial y} + x\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \varphi}\right)$$
$$+ t^2\left(-\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \varphi} + x\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial \varphi}\right).$$

Так же, несложными вычислениями получаем, что коммутатор $[X_2, X_3] = X_2X_3 - X_3X_2 = t^1\frac{\partial f}{\partial y} - t^2\frac{\partial f}{\partial x}$.

Получили линейную комбинацию$G' =< 0, -t^1\frac{\partial f}{\partial x} - t^2\frac{\partial f}{\partial y}, t^1\frac{\partial f}{\partial y} - t^2\frac{\partial f}{\partial x} >$.

Найдём вторую производную подалгебру G''. Обозначим:

$$Y_1(f) = 0,$$

$$Y_2(f) = -t^1\frac{\partial f}{\partial x} - t^2\frac{\partial f}{\partial y},$$

$$Y_3(f) = t^1\frac{\partial f}{\partial y} - t^2\frac{\partial f}{\partial x}.$$

Очевидно, что коммутаторы$[Y_1, Y_2]$и$[Y_1, Y_3]$ равны нулю.

1. Запишем действия, последовательно выполненные операторами Y_2 и Y_3:
$$Y_2\big(Y_3(f)\big) = -t^1\left(t^1\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - t^2\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right) - t^2\left(t^1\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - t^2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right).$$
2. Запишем действия, последовательно выполненные операторами Y_3 и Y_2:
$$Y_3\big(Y_2(f)\big) = t^1\left(-t^1\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - t^2\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right) - t^2\left(-t^1\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - t^2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right).$$

Подробно запишем вычисления коммутатора $[Y_2, Y_3]$:

$$[Y_2, Y_3] = Y_2Y_3 - Y_3Y_2 =$$

$$= -(t^1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + t^1 t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - t^1 t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + (t^2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + (t^1)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$+ t^1 t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - t^1 t^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - (t^2)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0.$$

Вывод: цепочка последовательных производных обрывается после второго шага вычислений, то есть $G'' = 0$. Утверждение руководителя доказано, алгебра Ли является разрешимой ступени разрешимости 2.

Так же мной были найдены частные решения вспомогательной системы (2.7):

$$t^1 = \frac{sin2\varphi}{2sin\omega},$$

$$t^2 = -\frac{cos2\varphi}{2sin\omega} + \frac{\sqrt{3}}{2} \ln\left(tg\frac{\omega}{2}\right).$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Аналогично находятся инвариантные решения системы (1.4), соответствующие инвариантам операторов X_1 и X_3.

Действуя группой преобразований на полученные инвариантные решения, можно находить новые решения системы (1.4).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Соколовский, В.В. Теория пластичности / В.В. Соколовский.- Москва: ГИТТЛ:1950. – 225с.
2. Киряков, П.П. Приложение симметрий и законов сохранения к решению дифференциальных уравнений: науч. изд. / П.П. Киряков, С.И. Сенашов, А.Н. Яхно / Новосибирск: СО РАН, 2001. – 349с.
3. Ибрагимов, Н.Х. Азбука группового анализа / Н.Х. Ибрагимов. – Москва: «Звание», 1989. – 5с.
4. Курош, А.Г. Теория групп / А.Г. Курош. – Москва: «Наука» главная редакция физико-математической литературы, 1967. – 87с.
5. Гомонова, О.В. Применение симметрий и законов сохранения к системе уравнений, описывающей плоское напряжённое состояние идеальной пластической среды. : науч. изд. / О.В. Гомонова, Н.Д. Дудинова, О.Н. Жданов, С.И. Сенашов.- Новосибирск: Лаврентьевские чтения по математике, механике и зизике, 27-31 мая 2005. – 126-127с.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Кафедра алгебры и математической логики

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_____ В.М. Левчук
«19» июня 2019 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 01.03.01 Математика

ПОСТРОЕНИЕ АЛГЕБРЫ ЛИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОГО НАПРЯЖЁННОГО СОСТОЯНИЯ ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент _____ / О.Н. Жданов
19.06.19

Выпускник _____ / И.В. Семенова
19.06.19

Красноярск 2019