

МИНИМИЗАЦИЯ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА ТЕНЗОРНОМ ПРОИЗВЕДЕНИИ ВЕКТОРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

Федотова А.И.,

научный руководитель канд. физ.-мат. наук, доц. Киреев И.В.

Сибирский федеральный университет

Институт математики и фундаментальной информатики

При численном решении уравнений математической физики хорошо зарекомендовал себя метод разделения переменных, естественное развитие которого привело к задаче следующего типа: построить наилучшее в некоторой норме приближение функции нескольких независимых переменных, определенной на многомерном кубе, суммой произведений функций, каждая из которых зависит только от одной независимой переменной. Решение подобной задачи методом вариационных итераций (МВИ) [1] осуществляется в три этапа. **1:** вводится структура тензорного произведения [2] в пространстве аппроксимируемых функций; **2:** осуществляется дискретизация уравнений; **3:** строится численное решение дискретной задачи.

В ряде работ отмечается высокая эффективность описанного подхода. Однако трудности с введением структуры тензорного произведения и отсутствие легко проверяемых критериев сходимости вызывают определенные затруднения при численной реализации функционального МВИ. Поэтому поменяем местами этапы **1** и **2** в изначальной версии МВИ, что приводит к дискретному аналогу метода. В его основе лежит понятие тензорного произведения векторных пространств [2]. Сразу отметим, что под тензором мы будем понимать многомерный массив (многомерную таблицу) из чисел. Целью работы является построение приближения сеточной функции от нескольких аргументов суммой произведений дискретных функций одной переменной, доставляющей минимум заданному выпуклому функционалу.

Рассмотрим n -мерное евклидово пространство \mathbb{R}^n , в котором введено скалярное произведение $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ и порожденная им норма $\|\vec{x}\| = \sqrt{\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle}$. Пусть $\Phi: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ - сильно выпуклая дифференцируемая вещественная функция с параметром сильной выпуклости λ , градиент $\vec{\Phi}'(\vec{x})$ которой удовлетворяет условию Липшица с константой Λ т.е. [3] для любых $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{R}^n$ и произвольного числа $\alpha \in [0, 1]$ справедливы неравенства

$$\Phi(\alpha\vec{x} + (1-\alpha)\vec{y}) \leq \alpha\Phi(\vec{x}) + (1-\alpha)\Phi(\vec{y}) - \alpha(1-\alpha)\|\vec{x} - \vec{y}\|^2, \quad \|\vec{\Phi}'(\vec{x}) - \vec{\Phi}'(\vec{y})\| \leq \Lambda\|\vec{x} - \vec{y}\|. \quad (1)$$

В сделанных предположениях решение $\vec{x}_* \in \mathbb{R}^n$ задачи

$$\Phi(\vec{x}) \xrightarrow{\vec{x} \in \mathbb{R}^n} \inf \quad (2)$$

существует и единственно [2]. Если размерность исходного пространства \mathbb{R}^n - число составное, т.е. $n = n_1 \cdot n_2 \cdot \dots \cdot n_p$, где n_1, n_2, \dots, n_p - натуральные числа большие 1, то на \mathbb{R}^n можно ввести структуру тензорного произведения $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n_1} \otimes \mathbb{R}^{n_2} \otimes \dots \otimes \mathbb{R}^{n_p}$ так что i -ю координату x_i ($i = 1, \dots, n$) вектора $\vec{x} \in \mathbb{R}^n$ можно представить в виде элемента p -мерного массива $x_i = x_{i_1 i_2 \dots i_p}$ где, например, нумерация имеет вид

$$i = i(i_1, i_2, \dots, i_p) = i_1 + n_1(i_2 - 1) + n_1 n_2(i_3 - 1) + \dots + n_1 n_2 \dots n_{p-1}(i_p - 1); \quad 1 \leq i_k \leq n_k, k = 1, 2, \dots, p.$$

Множество всех разложимых элементов [2] из такого \mathbb{R}^n будем обозначать через

$$\mathbb{T}_p^n = \left\{ \bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \bar{x} = \bar{x}^1 \otimes \bar{x}^2 \otimes \dots \otimes \bar{x}^p; \quad \bar{x}^k \in \mathbb{R}^{n_k}, k=1,2,\dots,p \right\}.$$

Блок схема МВИ при решении задачи (2) имеет вид:

[a]. Известно $t-1$ приближение \bar{x}_{m-1} к решению \bar{x}_* задачи (2): начальное приближение \bar{x}_0 считается известным.

[b]. Задаем для t -го шага циклическую последовательность несовпадающих индексов i_k^m : $1 \leq i_k^m \leq p$; $k=1,2,\dots,p; m=1,2,\dots$

[c]. Вычисляем вектор $\bar{\Delta}_m$ как результат выполнения k_m шагов следующего итерационного процесса:

[c₁]. Задаем вектор $\bar{\Delta}_0 \in \mathbb{T}_p^n$;

[c₂]. По вектору $\bar{\Delta}_{k-1} \in \mathbb{T}_p^n$, $k=1,2,\dots,k_m$, определяем вектор $\bar{\Delta}_k$ следующим образом: $\bar{\Delta}_k = \bigotimes_{i=1}^{i=p} \bar{\Delta}_k^i$, где $\bar{\Delta}_k^i = \bar{\Delta}_{k-1}^i \in \mathbb{R}^{n_i}$, если $i \neq i_k$, а $\bar{\Delta}_k^{i_k}$ являются решением задачи $\Phi(\bar{x}_{m-1} + \bar{\Delta}_{k-1}^1 \otimes \dots \otimes \bar{\Delta}_{k-1}^{i_k-1} \otimes \bar{t}_k \otimes \bar{\Delta}_{k-1}^{i_k+1} \otimes \dots \otimes \bar{\Delta}_{k-1}^p) \xrightarrow{\bar{t}_k \in \mathbb{R}^{n_k}} \inf$;

[d]. Полагаем $\bar{x}_m = \bar{x}_{m-1} + \bar{\Delta}_m$ и проверяем выполнение критерия точности. Если точность удовлетворительна, то полагаем $\bar{x}_* \approx \bar{x}_m$ и процесс заканчиваем, иначе переходим на блок **[a]**.

В работе доказано вспомогательное утверждение

Лемма. Для любого $\bar{y} \in \mathbb{R}^n$ решение $\bar{t}_* \in \mathbb{T}_p^n$ задачи $\varphi_u(\bar{t}) = \frac{1}{2} \|\bar{t}\|^2 - \langle \bar{t}, \bar{y} \rangle \xrightarrow{\bar{t} \in \mathbb{T}_p^n} \inf$ существует и справедливо неравенство $\varphi_u(\bar{t}_*) \leq \varphi_u(\bar{\Delta}_*) = \frac{1}{2n} \|\bar{y}\|^2 \max_{k=1,\dots,p} n_k$ для некоторого $\bar{\Delta}_* \in \mathbb{T}_p^n$.

Доказательство этой леммы конструктивно, т.е. явно строится элемент $\bar{\Delta}_* \in \mathbb{T}_p^n$, что позволяет, базируясь на основных теоремах выпуклого программирования [2], доказать следующее основное утверждение

Теорема. Пусть в итерационном процессе **[a]–[d]** для функции $\Phi(\bar{x})$, удовлетворяющей ограничениям (1), вектор $\bar{\Delta}_0 \in \mathbb{T}_p^n$ построен по тому же алгоритму, что и вектор $\bar{\Delta}_0 \in \mathbb{T}_p^n$ из леммы для $\bar{y} = \bar{x}_{m-1}$. Тогда даже в случае $k_m \equiv 1$ имеет место оценка скорости сходимости:

$$\Phi(\bar{x}_m) - \Phi(\bar{x}_*) \leq [\Phi(\bar{x}_0) - \Phi(\bar{x}_*)] \exp\left(-\frac{mn_s \lambda}{n\Lambda}\right), n_s = \max_{k=1,\dots,p} n_k.$$

Список использованных источников

1. Кириченко В.Ф., Крысько В.А. К вопросу о решении нелинейных краевых задач методом Канторовича - Власова. ДУ. том XVI № 12, 1980. - С. 2186
2. Винберг Э. Б. / Э. Б. Винберг; Курс алгебры. — М.: Факториал Пресс', 2002. - 544с.
3. Карманов В. Г. / В. Г. Карманов; Математическое программирование: Учеб. пособие. - 5-е изд., стереотип. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. — 264 с.