Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики

Базовая кафедра вычислительных и информационных технологий

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
______ /В. В. Шайдуров
«____» ______ 20 __ г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 02.03.01 Математика и компьютерные науки

АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ О РЕШЕТОЧНЫХ ПУТЯХ

Научный руководитель
Кандидат физико-математических наук ___________ А.П. Ляпин

Выпускник ___________ В.Ю. Гришунов

Красноярск 2019

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В перечислительном комбинаторном анализе широко известна задача о решёточных путях: задан набор векторов $\Delta = \{\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^N\} \subset \mathbb{Z}^N$, и требуется вычислить количество способов, которыми можно прийти в точку $x \in \mathbb{Z}^N$ из начала координат, используя только шаги из набора Δ. Решеточные пути возникают в различных задачах перечислительного комбинаторного анализа.

Мощным средством исследования свойств функции $f(x)$ являются производящие функции, то есть функции вида $F(z) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^N} f(x) z^x$, которые позволяют эффективно использовать методы комплексного анализа для исследования свойств функции $f(x)$.

Абрахам Муавр в 1722 году доказал, что в одномерном случае степенной ряд $F(z)$ представляет собой рациональную функцию тогда и только тогда, когда его коэффициенты удовлетворяют рекуррентному соотношению с постоянными коэффициентами. В данной работе доказан многомерный аналог теоремы Муавра (теорема 1, п. 4) и получена рекуррентная формула для сечений производящей функции $F(z)$.

Ричард Стенли выделял следующие классы производящих функций:

D-финитные $\supset$ алгебраические $\supset$ рациональные,

и рассматривал последние как «наиболее полезный» класс производящих функций. В работе показано, что сечения производящей функции для решеточных путей являются рациональными функциями (следствие из теоремы 1).

На основе теоремы разработан и реализован алгоритм вычисления сечений производящей функции в системе компьютерной алгебры Maple.

1 Общая постановка задачи

В перечислительном комбинаторном анализе широко известна задача о решёточных путях: задан набор векторов $\Delta = \{\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^N\} \subset \mathbb{Z}^N$, и требуется вычислить количество способов, которыми можно прийти в точку $x \in \mathbb{Z}^N$ из начала координат, используя только шаги из Δ.

Если обозначить искомое число путей через $f(x)$, то известно (см. [6]), что $f(x)$ удовлетворяет рекуррентному соотношению

$$f(x) - f(x - \alpha^1) - \cdots - f(x - \alpha^N) = 0, x \in m + K, \tag{1.1}$$

где $m = \alpha^1 + \cdots + \alpha^N$, K – конус, натянутый на вектора из Δ.

Мощным средством исследования свойств функции $f(x)$ являются производящие функции (см. [1]), то есть функции вида

$$F(z) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^N} f(x) z^x. \tag{1.2}$$

2 Примеры классических решёточных путей

2.1 Пути Дика

Путями Дика будем называть пути на целочисленной решётке с шагами (0,1), (1,0), не поднимающиеся выше прямой $y = x$ (рис. 1).

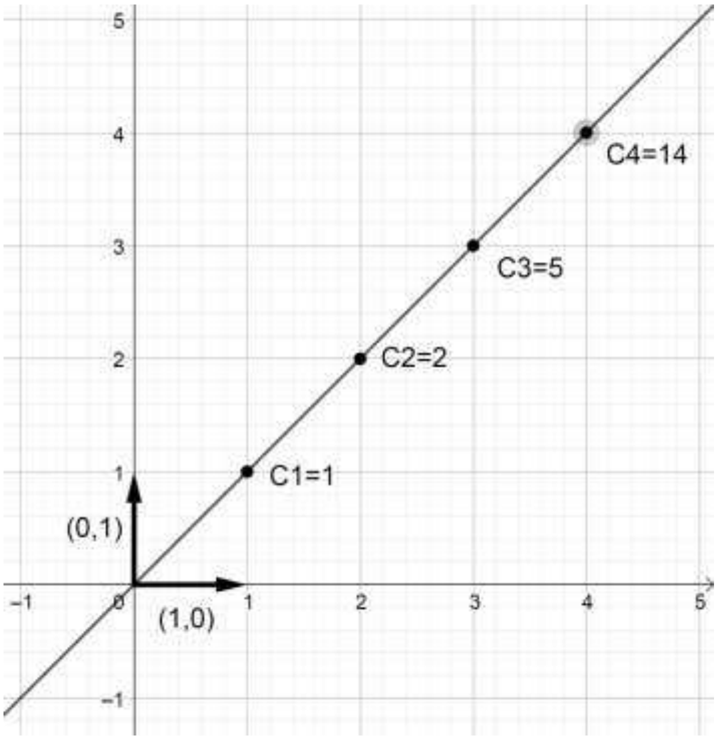

Рисунок 1 – Пути Дика

Количество таких путей из точки (0, 0) в точку (n, n) называетсяn-ым числом Каталана C_n. Широко известная задача о числе правильных скобочных последовательностей даётся числами Каталана и звучит так: сколькими способами можно разместить nправильных скобочных последовательностей. Легко заметить, что решения этой задачи для произвольного числа nлежат на диагонали $y = x$.

2.2 Пути Шрёдера

Путями Шрёдера будем называть пути на целочисленной решётке с шагами $\Delta = \{(0,1), (1,0), (1,1)\}$, не поднимающиеся выше диагонали $y = x$ (рис. 2).

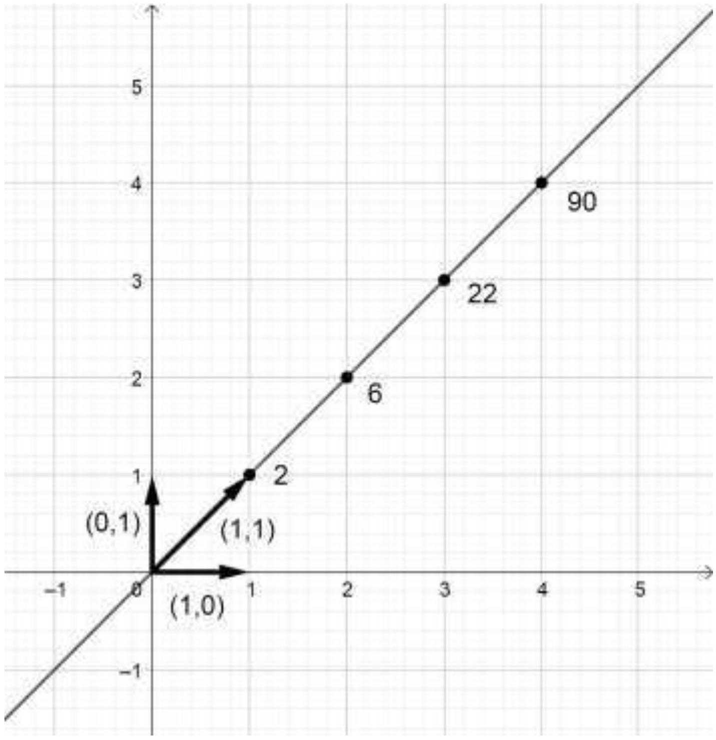

Рисунок 2 – Пути Шрёдера

Числа Шрёдера являются ответом на вопрос: сколькими способами “шахматный король” может прийти из начала координат в точку с координатами (n, n), используя только шаги из Δ.

Первые несколько чисел последовательности Шрёдера

$$1, 2, 6, 22, 90, 394, 1806, 8558, \dots .$$

2.3 Числа Деланноя

Условие, что пути с шагами из Δ не должны подниматься выше диагонали $y = x$, является отличительной особенностью для путей Шрёдера. Если его опустить, то мы получим пути, количество которых описывают числа Деланноя.

В классической постановке задача о “шахматном короле” сводится к отысканию центрального числа Деланноя $D_{n,n}$, находящегося на диагонали $y = x$, без дополнительных условий.

Вообще говоря, можно отыскать число Деланноя $D_{n,m}$ в произвольной точке с координатами (n, m) (рис.3).

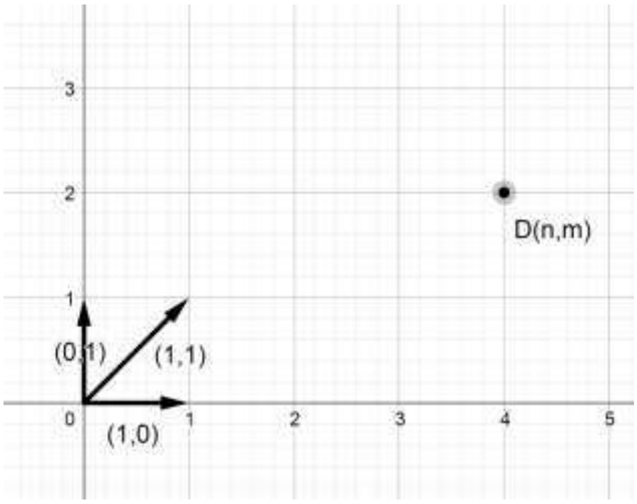

Рисунок 3 – числа Деланноя

Известно (см. [7]), что производящая функция для набора шагов $\Delta = \{(1,0), (0,1), (1,1)\}$ имеет вид:

$$F(x, y) = \frac{1}{1 - x - y - xy},$$

а соответствующее рекуррентное соотношение:

$$f(x, y) - f(x - 1, y) - f(x, y - 1) - f(x - 1, y - 1) = 0.$$

3 Производящая функция в одномерном случае

Абрахам Муавр в 1722 году доказал, что в одномерном случае степенной ряд $F(z)$ представляет собой рациональную функцию тогда и только тогда, когда его коэффициенты удовлетворяют рекуррентному соотношению с постоянными коэффициентами. Доказательство этого факта можно найти в [1], в главе, посвященной производящим функциям из класса рациональных функций.

Найдем рекуррентное соотношение, связывающее коэффициенты разложения в ряд Тейлора рациональной функции

$$F(z) = \frac{1}{c_k z^k + c_{k-1} z^{k-1} + \cdots + c_1 z + c_0} = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n,$$

где $c_i \in \mathbb{C}, i = 0, \dots, k$ – некоторые постоянные.

Выполним преобразования:

$$(c_k z^k + c_{k-1} z^{k-1} + \cdots + c_1 z + c_0) \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = 1,$$

$$c_k \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{n+k} + c_{k-1} \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{n+k-1} + \cdots + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^{n+1} + + c_0 \sum_{n=0}^{\infty} f(n) z^n = 1. \qquad (3.1)$$

Для каждой суммы из (3.1)произведем замену:

$n \to n - k$ для члена при коэффициенте c_k,

$n \to n - k + 1$для члена при коэффициенте c_{k-1} и т.д.

В результате получим

$$c_k \sum_{n=k}^{\infty} f(n-k)z^n + c_{k-1} \sum_{n=k-1}^{\infty} f(n-k+1)z^n + \cdots +$$
$$+ c_1 \sum_{n=1}^{\infty} f(n-1)z^n + c_0 \sum_{n=0}^{\infty} f(n)z^n = 1. \quad (3.2)$$

Далее для каждого слагаемого в (3.2) вынесем за знак суммы те члены, которые идут до k-го номера. Таким образом, каждая сумма будет начинаться с $n = k$:

$$c_k \sum_{n=k}^{\infty} f(n-k)z^n + c_{k-1}\left(f(0)z^{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} f(n-k+1)z^n\right) +$$
$$+c_{k-2}\left(f(0)z^{k-2} + f(1)z^{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} f(n-k+2)z^n\right) + \cdots +$$
$$+c_1\left(f(0)z + f(1)z^2 + \cdots + f(k-2)z^{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} f(n-1)z^n\right) +$$
$$+c_0\left(f(0) + f(1)z + f(2)z^2 + \cdots + f(k-1)z^{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty} f(n)z^n\right).$$

Сгруппируем подобные слагаемые:

$$\sum_{n=k}^{\infty}\big(c_k f(n-k) + c_{k-1} f(n-k+1) + \cdots + c_1 f(n-1) + c_0 f(n)\big)z^n +$$
$$+\big(c_{k-1} f(0) + c_{k-2} f(1) + \cdots + c_1 f(k-2) + c_0 f(k-1)\big)z^{k-1} +$$
$$+\big(c_{k-2} f(0) + \cdots + c_1 f(k-3) + c_0 f(k-2)\big)z^{k-2} + \cdots +$$
$$+(c_1 f(0) + c_0 f(1))z + c_0 f(0) = 1.$$

Выражение при степени z^n имеет вид:

$$c_k f(n-k) + c_{k-1} f(n-k+1) + \cdots + c_1 f(n-1) + c_0 f(n) = 0, \quad (3.3)$$

ввиду отсутствия в правой части степеней вида $z^n, n > 0$. Формула (3.3) представляет собой рекуррентное соотношение для функции $f(n)$, все элементы которой, начиная с k-го, вычисляются через это рекуррентное соотношение.

Коэффициенты при остальных степенях $z^{k-1}, z^{k-2}, \dots, z^1, z^0$связывают начальные данные $f(0), \dots, f(k-1)$следующим образом:

$$\begin{cases} c_0 f(0) = 1, \\ c_1 f(0) + c_0 f(1) = 0, \\ c_2 f(0) + c_1 f(1) + c_0 f(2) = 0, \\ \dots \\ c_{k-2} f(0) + c_{k-3} f(1) + \dots + c_1 f(k-3) + c_0 f(k-2) = 0, \\ c_{k-1} f(0) + c_{k-2} f(1) + \dots + c_1 f(k-2) + c_0 f(k-1) = 0. \end{cases}$$

Отсюда видно, что значения начальных данных $f(n), n < k$ можно рекурсивно вычислить, начиная с $c_0 f(0) = 1$.Ниже представлены расчеты некоторых начальных данных в общем случае:

$$\begin{cases} f(0) = \dfrac{1}{c_0}, \\ f(1) = -\dfrac{c_1}{c_0^2}, \\ f(2) = -\dfrac{c_2}{c_0^2} + \dfrac{c_1^2}{c_0^3}, \\ f(3) = -\dfrac{c_3 - c_1 c_2}{c_0^2} + \dfrac{c_1 c_2}{c_0^3} - \dfrac{c_1^3}{c_0^4}, \\ f(4) = -\dfrac{c_4 + c_1^2 c_2}{c_0^2} + \dfrac{2c_1 c_3 + c_2^2}{c_0^3} - \dfrac{2c_1^2 c_2}{c_0^4} + \dfrac{c_1^4}{c_0^5}, \\ \dots \\ f(k) = -\dfrac{1}{c_0} (\sum_{n=0}^{k-1} c_{k-n} f(n)). \end{cases}$$

4 Теорема Муавра для производящей функции в многомерном случае

Рассмотрим набор векторов $\Delta = \{\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^N\} \subset \mathbb{Z}^n_{\geq}$, и предположим, что конус

$$K = \{\alpha^1 x_1 + \cdots \alpha^N x_N,\ x_1, \dots, x_N \geq 0\},$$

натянутый на эти вектора, заострённый, т.е. лежит в некотором открытом полупространстве. Обозначим

$$F^k('z) = \sum_{'z \in \mathbb{Z}^{n-1}_{\geq}} f(k,'x)'z'^x,$$

– “сечение” производящей функции (см. [8]) для решёточных путей с шагами из Δ, где $'z = (z_2, z_3, \dots, z_n)$, $'x = (x_2, x_3, \dots, x_n)$. Тогда справедливо следующее обобщение теоремы Муавра:

Теорема 1. Сечения $F^k('z)$ производящей функции $F(z)$ для решёточных путей с шагами из Δ удовлетворяют рекуррентному соотношению

$$c_k('z)F^{n-k}('z) + c_{k-1}('z)F^{n-k+1}('z) + \cdots + c_1('z)F^{n-1}('z) + c_0('z)F^n('z) = 0,$$

с полиномиальными коэффициентами:

$$c_l('z) = \sum_{\alpha \in \Delta : \alpha_1^i = l} z_2^{\alpha_2^i} \dots z_n^{\alpha_n^i}.$$

Замечание. Если положить $F^0('z) = \frac{1}{c_0('z)}$ и $F^n('z) = 0$ для $n < 0$, то любое $F^n('z)$ может быть найдено при помощи рекуррентного соотношения. Например,

$$F^0('z) = \frac{1}{c_0('z)},$$

$$F^1('z) = -\frac{c_1('z)}{c_0^2('z)},$$

$$F^2('z) = -\frac{c_2('z)}{c_0^2('z)} + \frac{c_1^2('z)}{c_0^3('z)},$$

$$F^3('z) = -\frac{c_3('z) - c_1('z)c_2('z)}{c_0^2('z)} + \frac{c_1('z)c_2('z)}{c_0^3('z)} - \frac{c_1^3('z)}{c_0^4('z)},$$

$$\dots$$

$$F^k('z) = -\frac{1}{c_0('z)}(\sum_{n=0}^{k-1} c_{k-n}('z)F^n).$$

<u>Доказательство.</u>

Положим

$$\frac{1}{c_k('z)z_1^k + c_{k-1}('z)z_1^{k-1} + \dots + c_1('z)z_1 + c_0('z)} = \sum_{n=0}^{\infty} F^n('z)z_1^n,$$

и проделаем те же шаги, что и в одномерном случае:

$$(c_k('z)z_1^k + c_{k-1}('z)z_1^{k-1} + \dots + c_1('z)z_1 + c_0('z)) \sum_{n=0}^{\infty} F^n('z)z_1^n = 1,$$

$$c_k('z)\sum_{n=0}^{\infty} F^n('z)z_1^{n+k} + c_{k-1}('z)\sum_{n=0}^{\infty} F^n('z)z_1^{n+k-1} + \cdots$$

$$+ c_1('z)\sum_{n=0}^{\infty} F^n('z)z_1^{n+1} + c_0('z)\sum_{n=0}^{\infty} F^n('z)z_1^n = 1.$$

Замена:

$n \to n - k$, для члена при коэффициенте $c_k('z)$,

$n \to n - k + 1$, для члена при коэффициенте $c_{k-1}('z)$ и т.д.:

$$c_k('z)\sum_{n=k}^{\infty}F^{n-k}('z)z_1^n + c_{k-1}('z)\sum_{n=k-1}^{\infty}F^{n-k+1}('z)z_1^n + \cdots + c_1('z)\sum_{n=1}^{\infty}F^{n-1}('z)z_1^n$$
$$+ c_0\sum_{n=0}^{\infty}F^n('z)z_1^n = 1.$$

Далее выделим суммы, начинающиеся с $n = k$:

$$c_k('z)\sum_{n=k}^{\infty}F^{n-k}('z)z_1^n + c_{k-1}('z)\left(F^0('z)z_1^{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty}F^{n-k+1}('z)z_1^n\right) +$$
$$+c_{k-2}('z)\left(F^0('z)z_1^{k-2} + F^1('z)z_1^{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty}F^{n-k+2}('z)z_1^n\right) + \cdots +$$
$$+c_1('z)\left(F^0('z)z_1 + F^1('z)z_1^2 + \cdots + F^{k-2}('z)z_1^{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty}F^{n-1}('z)z_1^n\right) +$$
$$+c_0('z)\left(F^0('z) + F^1('z)z_1 + \cdots + F^{k-1}('z)z_1^{k-1} + \sum_{n=k}^{\infty}F^n('z)z_1^n\right),$$

и сгруппируем подобные слагаемые:

$$\sum_{n=k}^{\infty}(c_k('z)F^{n-k}('z) + c_{k-1}('z)F^{n-k+1}('z) + \cdots + c_1('z)F^{n-1}('z) +$$
$$+c_0('z)F^n('z))z_1^n +$$
$$+\left(c_{k-1}('z)F^0('z) + c_{k-2}('z)F^1('z) + \cdots + c_1('z)F^{k-2}('z) + c_0F^{k-1}('z)\right)z_1^{k-1} +$$
$$+\left(c_{k-2}('z)F^0('z) + \cdots + c_1('z)F^{k-3}('z) + c_0('z)F^{k-2}('z)\right)z_1^{k-2} + \cdots +$$
$$+(c_1('z)F^0('z) + c_0('z)F^1('z))z_1 + c_0('z)F^0('z) = 1.$$

Ричард Стенли выделял следующие классы производящих функций:

D-финитные ⊃ алгебраические ⊃ рациональные,

и рассматривал последние как «наиболее полезный» класс производящих функций.

Следствие. Сечения $F^n('z)$производящей функции $F(z)$ для числа решёточных путей – рациональные функции.

5 Пример

Рассмотрим набор векторов

$$\Delta = \{(1,0,1), (2,2,2), (1,2,3), (3,1,2), (3,2,1), (2,1,2)\}.$$

Известно (см. [7]), что для такого набора векторов производящая функция будет иметь вид:

$$\frac{1}{1 - xz - x^2y^2z^2 - xy^2z^3 - x^3yz^2 - x^3y^2z - x^2yz^2}.$$

Выделим сечение, т.е. зафиксируем одну из переменных. В данном примере это будет переменная x.

Для начала выпишем коэффициенты c_i, которые будут зависеть только от переменных (y, z):

$$\begin{aligned}
&c_0(y,z) = 1,\\
&c_1(y,z) = -z - y^2z^3,\\
&c_2(y,z) = -yz^2 - y^2z^2,\\
&c_3(y,z) = -yz^2 - y^2z.
\end{aligned}$$

Далее, используя теорему 1, можно сразу выписать рекуррентное соотношение:

$$\begin{aligned}
&F^n(y,z) + (-z - y^2z^3)F^{n-1}(y,z) + (-yz^2 - y^2z^2)F^{n-2}(y,z) +\\
&+(-yz^2 - y^2z)F^{n-3}(y,z) = 0.
\end{aligned}$$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе доказан многомерный аналог теоремы Муавра для сечений производящей функции числа путей на целочисленной решетке и доказано, что такие сечения являются рациональными функциями.

На основе этой теоремы разработан и реализован алгоритм в системе компьютерной алгебре Maple, вычисляющий сечения производящей функции, а также составляющий соответствующее рекуррентное соотношение в двумерном и трёхмерном случаях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Стенли, Р. Перечислительная комбинаторика: учебник / Р.Стенли; Пер. с англ. –М. –Мир, 1990. –440 стр.
2. Виленкин, Н.Я. Комбинаторика: учебное пособие / Н.Я.Виленкин; изд. «Наука». –М., 1969 г., –323 стр.
3. Лейнартас, Д.Е. О задаче Коши для многомерных разностных уравнений с постоянными коэффициентами / Красноярский Государственный Университет – Известия высших учебных заведений –2002. –79-80 стр.
4. Некрасова, Т.И. Об иерархии производящих функций решений многомерных разностных уравнений. / Изв. Иркутского гос. ун-та. – Сер. Математика. –2014, –том 9, –91–102 стр.
5. Фихтенгольц, Г.М. Курс Дифференциального и интегрального исчисления: в 3 т. Т. 1 / Г.М.Фихтенгольц; пред. и прим. А.А.Флоринского. –8-е изд. –М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. –680 стр.
6. Leinartas, E.K. On the Rationality of Multidimentional Recusive Series. / E. K. Leinartas, A. P. Lyapin; Journal of Siberian Federal University. – Mathematics & Physics. –2009. –449–455 p.
7. M.Bousquet-Mélou, M.Petkovšek, Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case. / Discrete Mathematics, 225(2000), 51–75.
8. Lipshitz L. D-Finite power series. Journal of Algebra, 1989, vol. 122, pp. 353–373.
9. Moivre, A. De fractionibus algebraicis radicalitate immunibus ad fractiones simpliciores reducendis, deque summandis terminis quarumdam serierum aequali intervallo a se distantibus / A. de Moivre // Philosophical transactions. – 1724. –176 p.
10. A.P. Lyapin, S.Chandragiri, Generating functions for vector partition functions and a basic recurrence relation, Journal of Difference Equations and Applications, 25:7. – pp. 1052-1061.

ПРИЛОЖЕНИЕ А

Код программы для вычисления производящей функции с шагами $\Delta = \{(1,0,1),(2,2,2),(3,1,3)\}$ с фиксированной первой компонентой, и нахождения соответствующего рекуррентного соотношения.

```
> restart : with(linalg) :
  TrytoFind := proc(A, k, D)
  #option trace;
  local hei, len, Mx, My, Mz,  ph, some, Gener;
  hei := coldim(A) :
  len := rowdim(A) :
  Mx := 0 :
  My := 0 :
  Mz := 0 :
  if D > hei then error('ERR') end if;
  for i from 1 to len do
    if A[i, 1] > Mx then Mx := A[i, 1] end if;
    if A[i, 2] > My then My := A[i, 2] end if;
  od;
 if hei = 3 then
       for i from 1 to len do
         if A[i, 3] > Mz then Mz := A[i, 3] end if;
       od;
   end if;
  if D = 1 then
    for i from −Mx to Mx do
      ph[i] := 0 :
    od;
  end if;
  if D = 2 then
    for i from −My to My do
      ph[i] := 0 :
    od;
  end if;
  if D = 3 then
    for i from −Mz to Mz do
      ph[i] := 0 :
```

```
    od;
  end if;
  ph[0] := 1 :
  if hei = 2 then
    for i from 1 to k do
      ph[i] := sum((x^A[j,1] y^A[j,2] ph[i - A[j,D]]), j = 1..len) :
      some := ph[i] :
    od;
   print(simplify(some));
    if D = 1 then
    Gener := F^n(y) + sum((-y^A[j,2]) . F^(n - A[j,D])(y), j = 1..len) :
    end if;
    if D = 2 then
   Gener := F^n(x) + sum((-x^A[j,1]) . F^(n - A[j,D])(x), j = 1..len) :
    end if;
    print(simplify(Gener) = 0);

  end if;
  if hei = 3 then
    for i from 1 to k do
      ph[i] := sum((x^A[j,1] y^A[j,2] z^A[j,3] ph[i - A[j,D]]), j = 1..len) :
      some := ph[i] :
    od;
    print(simplify(some));
   if D = 1 then
    Gener := F^n(y, z) + sum((-y^A[j,2] z^A[j,3]) . F^(n - A[j,D])(y, z), j = 1..len) :
   end if;
  if D = 2 then
    Gener := F^n(x, z) + sum((-x^A[j,1] z^A[j,3]) . F^(n - A[j,D])(x, z), j = 1..len) :
  end if;
  if D = 3 then
    Gener := F^n(x, y) + sum((-x^A[j,1] y^A[j,2]) . F^(n - A[j,D])(x, y), j = 1..len) :
  end if;
  print(factor(Gener) = 0);
  end if;
  end proc;
```

> $A := matrix([[1, 0, 1], [2, 2, 2], [3, 1, 3]]);$

$$A := \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

> $TrytoFind(A, 3, 1)$

$$x^3 z^3 + 2 x^3 y^2 z^3 + x^3 y z^3$$
$$F(y, z)^n - z F(y, z)^{n-1} - y^2 z^2 F(y, z)^{n-2} - y z^3 F(y, z)^{n-3} = 0$$

Федеральное государственное автономное

образовательное учреждение высшего образования

«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики

Базовая кафедра вычислительных и информационных технологий

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
______/В. В. Шайдуров
« 18 » 06 20 19 г.

БАКАЛАВРСКАЯ РАБОТА

Направление 02.03.01 Математика и компьютерные науки

АЛГОРИТМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРОИЗВОДЯЩИХ ФУНКЦИЙ РЕШЕНИЙ МНОГОМЕРНЫХ РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ О РЕШЕТОЧНЫХ ПУТЯХ

Научный руководитель
Кандидат физико-математических наук __________ А.П. Ляпин
18.06.19г.

Выпускник __________ В.Ю. Гришунов
18.06.19г.

Красноярск 2019