Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2009, 2(2), 221-229

УДК 517.55

Области сходимости гипергеометрических рядов многих комплексных переменных

Анастасия Ю.Семушева*
Институт фундаментальной подготовки,
Сибирский федеральный университет,
пр. им. газеты "Красноярский рабочий" 95, Красноярск, 660025,
Россия
Август К.Цих†
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный 79, Красноярск, 660041
Россия

Получена 18.03.2009, окончательный вариант 21.04.2009, принята к печати 30.04.2009

Обобщается известный результат Я.Горна об областях сходимости гипергеометрических рядов многих комплексных переменных.

Ключевые слова: область сходимости, гипергеометрический ряд, носитель ряда, параметризация Горна-Капранова, амеба.

1. Гипергеометрические ряды и результат Горна

Существует несколько определений гипергеометрических функций [1]. Видимо, самым простым и универсальным из них является определение гипергеометрического ряда, данного Горном в 1889 году [5]: степенной ряд (ряд Лорана)

$$\sum_{s\in\mathbb{Z}^n}\varphi(s)x^s=\sum_{s\in\mathbb{Z}^n}\varphi(s_1,\ldots,s_n){x_1}^{s_1}\ldots{x_n}^{s_n} \tag{1}$$

называется *гипергеометрическим*, если отношения соседних коэффициентов представляют собой рациональные функции переменных s:

$$\frac{\varphi(s+\mathrm{e}_i)}{\varphi(s)}=R_i(s),\quad i=1,\ldots,n; \tag{2}$$

здесь $\mathrm{e}_i=(0,\ldots,\overset{\mathrm{i}}{\widehat{1}},\ldots,0)$. Согласно теореме Оре-Сато [8] общий вид для коэффициентов гипергеометрического ряда следующий:

$$\varphi(s)=R(s)\cdot t^s\cdot\frac{\prod\limits_{i=1}^{p}\Gamma(\langle A_i,s\rangle+c_i)}{\prod\limits_{j=1}^{r}\Gamma(\langle B_j,s\rangle+d_j)}; \tag{3}$$

*e-mail : densemushev@yandex.ru
†e-mail : tsikh@lan.krasu.ru

здесь $R(s)$ — рациональная функция, $t \in (\mathbb{C} \setminus \{0\})^n$, Γ — гамма-функция Эйлера, $A_i, B_j \in \mathbb{Z}^n$, $c_i, d_j \in \mathbb{C}$, наконец, $\langle , \rangle$ — знак скалярного произведения.

Отметим одно важное обстоятельство. Как правило, ряд (1) с коэффициентами вида (3) расходится, если суммирование брать по всей решетке $\mathbb{Z}^n$ (нагладный пример тому — ряд геометрической прогрессии $\sum\limits_{s=-\infty}^{+\infty} x^s$). Сам ряд (1) следует считать формальным, из которого можно строить неформальные (т. е. с непустой областью сходимости) ряды каким-либо естественным выбором массива суммирования $S \subset \mathbb{Z}^n$ (см. [1, 6, 7]).

В работе [5] Горн привел рецепт для описания области сходимости гипергеометрических рядов двух и трех переменных, рассматривая в качестве массива суммирования положительные ортанты $\mathbb{Z}^2_+$ и $\mathbb{Z}^3_+$. Приведем результат Горна для двукратных рядов

$$H(x_1, x_2) = \sum_{s_1, s_2 \geqslant 0} \varphi(s_1, s_2) {x_1}^{s_1} {x_2}^{s_2},$$

где, по определению гипергеометричности,

$$R_1(s_1, s_2) := \frac{\varphi(s_1 + 1, s_2)}{\varphi(s_1, s_2)}, \quad R_2(s_1, s_2) := \frac{\varphi(s_1, s_2 + 1)}{\varphi(s_1, s_2)}$$

являются рациональными функциями от s_1 и s_2. В [5] вводятся пределы

$$\Phi_1(q_1, q_2) = \lim_{l \to \infty} R_1(q_1 l, q_2 l), \quad \Phi_2(q_1, q_2) = \lim_{l \to \infty} R_2(q_1 l, q_2 l)$$

и отмечается, что функции Φ_i рациональны и однородны степени нуль, т. е. фактически зависят от отношения $q_1 : q_2$. С помощью этих функций и вычисляется область сходимости G ряда $H(x_1, x_2)$. А именно, хорошо известно, что области сходимости степенных рядов являются областями Рейнхардта [2], т. е. полностью определяются модулями $|x_1|, |x_2|$ переменных. Согласно результату Горна, если точка $(|x_1|, |x_2|)$ лежит на границе изображения Рейнхардта $|G|$ для области сходимости G, то она лежит или на прямой

$$\mathfrak{A}\colon |x_1| = \left| \frac{1}{\Phi_1(1, 0)} \right|,$$

или на прямой

$$\mathfrak{B}\colon |x_2| = \left| \frac{1}{\Phi_2(0, 1)} \right|,$$

или на кривой $\mathfrak{C}$, параметризованной в виде

$$|x_1| = \left| \frac{1}{\Phi_1(q_1, q_2)} \right|, \quad |x_2| = \left| \frac{1}{\Phi_2(q_1, q_2)} \right|, \quad q_1, q_2 \geqslant 0. \tag{4}$$

Более точная формулировка результата Горна заключена в следующих двух утверждениях.

Утверждение 1. *Если точка* (x_1^0, x_2^0) *лежит вне бицилиндра*

$$\Delta = \left\{ |x_1| < \left| \frac{1}{\Phi_1(1, 0)} \right|, |x_2| < \left| \frac{1}{\Phi_2(0, 1)} \right| \right\}$$

либо для некоторого положительного направления $q_1 : q_2$

$$|x_1^0| > \left| \frac{1}{\Phi_1(q_1, q_2)} \right|, \quad |x_2^0| > \left| \frac{1}{\Phi_2(q_1, q_2)} \right|,$$

то степенной ряд $H(x_1, x_2)$ *расходится в точке* (x_1^0, x_2^0).

Утверждение 2. *Если точка (x_1^0, x_2^0) лежит в бицилиндре Δ и для всех положительных направлений $q_1 : q_2$ выполняется хотя бы одно из неравенств*

$$|x_1^0| < \left|\frac{1}{\Phi_1(q_1, q_2)}\right|, \quad |x_2^0| < \left|\frac{1}{\Phi_2(q_1, q_2)}\right|,$$

то ряд $H(x_1, x_2)$ сходится в точке (x_1^0, x_2^0).

Теперь рассмотрим n-кратный гипергеометрический ряд с суммированием по положительному ортанту, где, по определению гипергеометричности, выполняются равенства (2) и, следовательно, коэффициенты $\varphi(s)$ имеют вид (3). Множитель $R(s)$ в (3) не дает существенного влияния на область сходимости ряда H (кроме случая $R(s) \equiv 0$, когда область сходимости есть $\mathbb{C}^n$), а множитель t^s влияет лишь растяжением на область сходимости ($|t_1|$ раз по переменной $x_1, \ldots, |t_n|$ раз по переменной x_n). Поэтому мы будем вести речь о рядах вида

$$H(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{s_1, \ldots, s_n \geqslant 0} \varphi(s_1, \ldots, s_n) {x_1}^{s_1} \ldots {x_n}^{s_n}, \tag{5}$$

у которых коэффициенты имеют вид

$$\varphi(s) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{p} \Gamma(\langle A_i, s\rangle + c_i)}{\prod\limits_{j=1}^{r} \Gamma(\langle B_j, s\rangle + d_j)}. \tag{6}$$

На самом деле мы не только распространим результат Горна на произвольное число переменных, но и обобщим его на случай, когда векторы A_i, B_j вещественные. Следуя идее Горна, введем для коэффициента $\varphi(s)$ вида (6) пределы

$$\Phi_i(q_1, \ldots, q_n) = \lim_{l \to \infty} \frac{\varphi(s + \mathrm{e}_i)}{\varphi(s)}|_{s=lq}, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{7}$$

составленные для произвольного вектора $q = (q_1, \ldots, q_n) \in \mathbb{Z}_+^n \backslash \{0\}$. Функции $\Phi_i(q)$ однородны степени нуль; они рациональны, если A_i, B_j целочисленные, и выражаются в радикалах, если A_i, B_j имеют рациональные координаты. С помощью функций $\Phi_i(q)$ и вычисляется область сходимости G ряда (5) с коэффициентами вида (6).

2. Формулировка обобщения теоремы Горна и примеры

Обозначим $I = \{1, \ldots, n\}$ и для произвольного непустого подмножества $J \subset I$ мощности $|J|$ определим вектор-функции

$$\Phi_J(q_J, 0_{I\backslash J}) = \big(\Phi_j(q_J, 0_{I\backslash J})\big)_{j \in J} : \mathbb{R}_+^{|J|} \to \mathbb{R}_+^{|J|},$$

где $(q_J, 0_{I\backslash J})$ — вектор с n координатами, у которого на местах с номерами $j \in J$ стоят q_j, а на всех остальных местах — нуль.

Теорема 1. *Для почти всех значений параметров $\{c_i\}$, $\{d_j\}$ в (6) область сходимости G ряда (5) представляет собой пересечение областей*

$$G = \bigcap_{1 \leqslant |J| \leqslant n} G_J,$$

где G_J состоит из всех $x = (x_1, \dots, x_n)$ таких, что для любого $q_J \in \mathbb{R}_+^{|J|}$ выполняется хотя бы одно из неравенств $|x_j| < \dfrac{1}{|\Phi_j(q_J, 0_{I\setminus J})|}, \quad j \in J.$

В случае $|J| = n$ отображение

$$\Psi = \left(\frac{1}{\Phi_1(q)}, \dots, \frac{1}{\Phi_n(q)}\right) : \mathbb{CP}_{n-1} \to V,$$

где V — сингулярная гиперповерхность для суммы ряда, называется параметризацией Горна-Капранова.

Пример 1. Этот пример взят из статьи Горна [5]:

$$H(x_1, x_2) = \sum_{s_1, s_2 \geqslant 0} \Gamma(s_1 + s_2 + a_1)\Gamma(s_1 - 2s_2 + a_2)\Gamma(s_2 - 2s_1 + a_3)x_1^{s_1}x_2^{s_2}, \tag{8}$$

где a_1, a_2, a_3 — произвольные комплексные, но не целые числа (что обеспечивает конечность значений гамма-функций). Согласно результату Горна область сходимости указанного ряда ограничена тремя линиями:

$$\mathfrak{A}\colon |x_1| = 4,\ \mathfrak{B}\colon |x_2| = 4,$$

$$\mathfrak{G}\colon |x_1| = \frac{(2q_1 - q_2)^2}{(2q_2 - q_1)(q_1 + q_2)}, \quad |x_2| = \frac{(q_1 - 2q_2)^2}{(2q_1 - q_2)(q_1 + q_2)},$$

где q_1, q_2 неотрицательные и изменяются в секторе $\frac{1}{2}q_1 \leqslant q_2 \leqslant 2q_1$ (см. рис. 1).

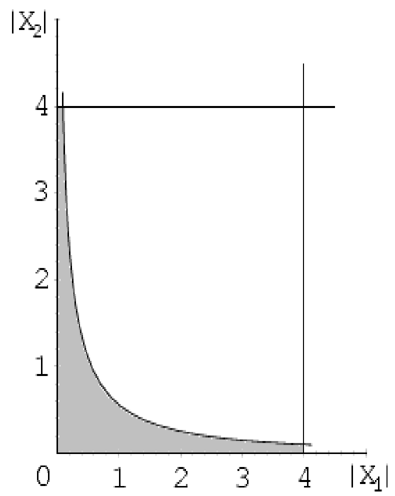


Рис. 1. Область сходимости

На самом деле область под кривой $\mathfrak{G}$ — это область сходимости "подряда" ряда (8) с массивом суммируемости

$$S = \{(s_1, s_2) \in \mathbb{Z}_+^2 : \quad \frac{1}{2}s_1 \leqslant s_2 \leqslant 2s_1\},$$

а не с полным положительным октантом $\mathbb{Z}_+^2$, который Горн взял "насильно".

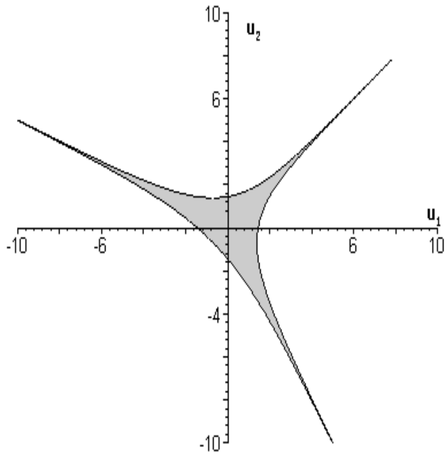
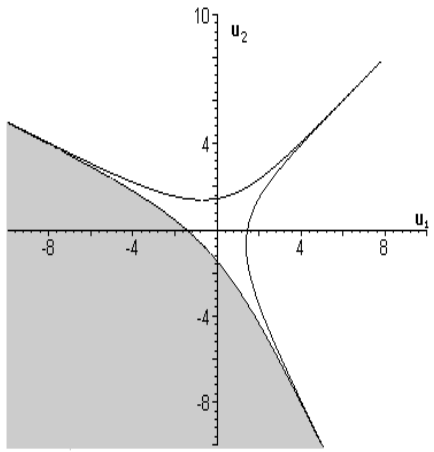


Рис. 2. Амеба

Для того чтобы лучше понять ситуацию, удобнее рассматривать не схему Рейнхардта, а ее логарифмический образ. Иными словами, рассмотрим отображение

$$(z_1, \ldots, z_n) \to (\log|z_1|, \ldots, \log|z_n|)$$

из $(\mathbb{C} \setminus 0)^n$ в $\mathbb{R}^n$. Сингулярное множество суммы степенного ряда (1) (которое, как правило, есть алгебраическая гиперповерхность (см. [6]) при указанном отображении переходит в так называемую *амебу* этой гиперповерхности. Известно, что дополнение к амебе состоит из выпуклых связных компонент, в прообразах которых сходятся степенные ряды, представляющие данную функцию [6].



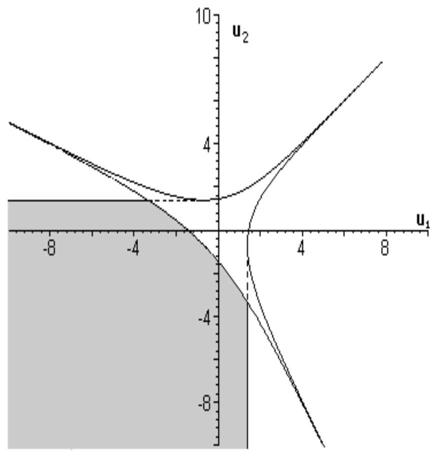


Рис. 3. Область сходимости "подряда"   Рис. 4. Область сходимости ряда (8)

На рис. 2 в системе координат $u_1 = \log|x_1|,\ u_2 = \log|x_2|$ изображена амеба для сингулярного множества суммы „подряда“

$$\sum_{\frac{1}{2}s_1 \leqslant s_2 \leqslant 2s_1} \Gamma(s_1 + s_2 + a_1)\Gamma(s_1 - 2s_2 + a_2)\Gamma(s_2 - 2s_1 + a_3)x_1^{s_1}x_2^{s_2}$$

ряда (8). Область сходимости "подряда" проектируется в связную компоненту дополнения к амебе, затемненную на рис. 3, а область сходимости ряда (8) проектируется лишь в часть этой компоненты (см. рис. 4), выделенную условием

$$u_1 < \log 4, \quad u_2 < \log 4.$$

Пример 2. В работе [3] вычислен фундаментальный период трехмерного многообразия Калаби-Яу в виде гипергеометрического ряда Горна:

$$H_1(x_1, x_2) = \sum_{s_1, s_2 \geqslant 0} \frac{\Gamma(4s_1 + 4s_2 + 1)}{\Gamma^2(s_1 + s_2 + 1)(s_1!)^2(s_2!)^2} {x_1}^{s_1} {x_2}^{s_2}. \tag{9}$$

Для определения области сходимости ряда в множестве параметров $s = (s_1, s_2) \in \mathbb{Z}_+^2$ зафиксируем направление $q = (q_1, q_2) \neq 0$ и рассмотрим "q-диагональную" подпоследовательность C_l. По формуле Стирлинга при $l \to \infty$ имеем

$$|C_l| \sim \frac{(4lq_1 + 4lq_2)^{4l(q_1+q_2)+\frac{1}{2}}}{(lq_1)^{2lq_1+1}(lq_1 + lq_2)^{2lq_1+2lq_2+1}(lq_2)^{2lq_2+1}(2\pi)^{\frac{3}{2}}}.$$

С помощью формулы Коши-Адамара составляем параметризацию Горна-Капранова:

$$(|x_1|, |x_2|) = \left(\frac{{q_1}^2}{4^4(q_1 + q_2)^2}, \frac{{q_2}^2}{4^4(q_1 + q_2)^2} \right).$$

Заметим, что граница области сходимости ряда (9) выписывается в виде

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 - \frac{2}{4^4}|x_1| - 2|x_1||x_2| - \frac{2}{4^4}|x_2| + \frac{1}{4^8} = 0.$$

Область сходимости ряда (9) представлена на рис. 5, а на рис. 6 изображена амеба для сингулярного множества этого ряда, причем затемненная компонента дополнения этой амебы и есть область сходимости ряда (9) в логарифмических координатах.

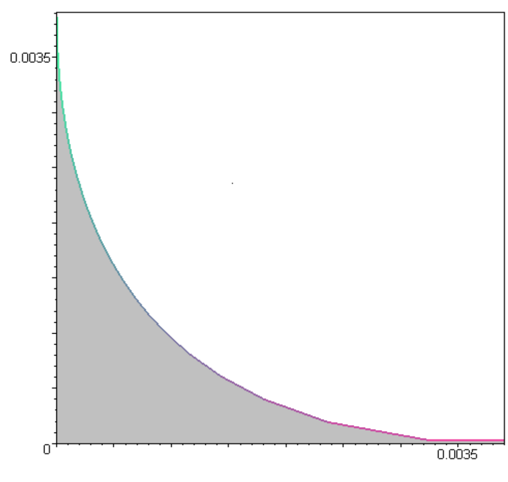


Рис. 5. Область сходимости ряда (9)

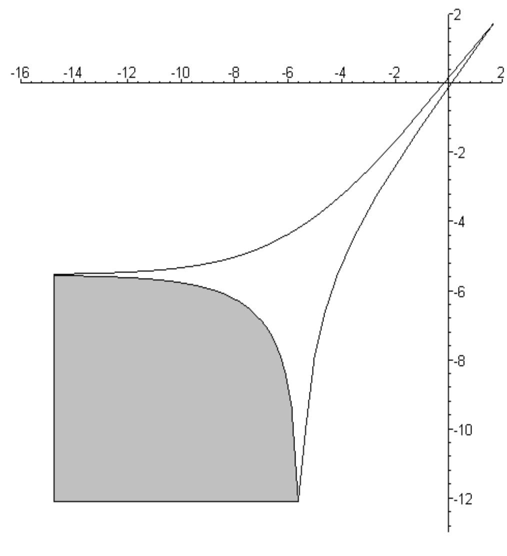


Рис. 6. Амеба сингулярного множества

3. Доказательство обобщения теоремы Горна

Вначале опишем асимптотическое поведение коэффициентов $\varphi(s)$ гипергеометрического ряда (5) вдоль рациональных направлений. Для этого в множестве параметров $s = (s_1, \dots, s_p) \in \mathbb{Z}_+^n$ зафиксируем точку (направление) $q = (q_1, \dots, q_n) \neq 0$ и рассмотрим "q-диагональную" подпоследовательность

$$C_l = \varphi(lq) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{p} \Gamma(\langle A_i, lq \rangle + c_i)}{\prod\limits_{j=1}^{r} \Gamma(\langle B_j, lq \rangle + d_j)}.$$

Запишем векторы A_i, B_j в координатах:

$$A_i = (A_{i1}, \dots, A_{in}), \quad B_j = (B_{j1}, \dots, B_{jn})$$

и введем вектор

$$\delta = \sum_{i=1}^{p} A_i - \sum_{j=1}^{r} B_j.$$

Напомним, что случай $\delta = 0$ соответствует неконфлуэнтному гипергеометрическому ряду [6].

Предложение 1. *Для почти всех значений параметров* $\{c_i\}$, $\{d_j\}$ *и почти всех направлений* $q \in \mathbb{Z}_+^n$ *радиус сходимости* ρ_q *диагонального подряда* $\sum\limits_{l=0}^{\infty} \varphi(lq)$ *определяется по формуле*

$$\rho_q = 0, \quad \text{если}\, \langle \delta, q \rangle < 0,$$
$$\rho_q = \infty, \quad \text{если}\, \langle \delta, q \rangle > 0;$$

в случае $\langle \delta, q \rangle = 0$

$$\rho_q = |{\Psi_1}^{q_1} \dots {\Psi_n}^{q_n}|, \tag{10}$$

где

$$\Psi_i(q) = \frac{\langle B_1, q \rangle^{B_{1i}} \dots \langle B_r, q \rangle^{B_{ri}}}{\langle A_1, q \rangle^{A_{1i}} \dots \langle A_p, q \rangle^{A_{pi}}}. \tag{11}$$

Доказательство. Для вычисления радиуса сходимости ρ_q воспользуемся формулой Коши-Адамара и асимптотической формулой Стирлинга

$$\Gamma(z+1) \sim \sqrt{2\pi} z^{z+\frac{1}{2}} e^{-z}$$

при $\operatorname{Re} z \to +\infty$. Имеем при $l \to \infty$

$$\frac{1}{\rho_q} = \overline{\lim_{l \to \infty}} \sqrt[l]{|C_l|} =$$

$$= \lim_{l \to \infty} \sqrt[l]{\frac{\prod\limits_{i=1}^{p} \Gamma(\langle A_i, lq \rangle + c_i)}{\prod\limits_{j=1}^{r} \Gamma(\langle B_j, lq \rangle + d_i)}} =$$

$$= \lim_{l\to\infty} \sqrt[l]{\frac{\prod\limits_{i=1}^{p} \sqrt{2\pi}(\langle A_i, lq\rangle + c_i - 1)^{\langle A_i,lq\rangle + c_i - \frac{1}{2}} e^{-\langle A_i,lq\rangle - c_i}}{\prod\limits_{j=1}^{r} \sqrt{2\pi}(\langle B_j, lq\rangle + d_j - 1)^{\langle B_j,lq\rangle + d_j - \frac{1}{2}} e^{-\langle B_j,lq\rangle - d_j}}} =$$

$$= \frac{\prod\limits_{i=1}^{p} \langle A_i, q\rangle^{\langle A_i,q\rangle}}{\prod\limits_{j=1}^{r} \langle B_j, q\rangle^{\langle B_j,q\rangle}} \cdot \lim_{l\to\infty} l^{\sum\limits_{i=1}^{p}\langle A_i,q\rangle - \sum\limits_{j=1}^{r}\langle B_j,q\rangle} e^{\sum\limits_{j=1}^{r}\langle B_j,q\rangle - \sum\limits_{i=1}^{p}\langle A_i,q\rangle}.$$

При этом

$$\lim_{l\to\infty} l^{\sum\limits_{i=1}^{p}\langle A_i,q\rangle - \sum\limits_{j=1}^{r}\langle B_j,q\rangle} e^{\sum\limits_{j=1}^{r}\langle B_j,q\rangle - \sum\limits_{i=1}^{p}\langle A_i,q\rangle} = \begin{cases} 0, \text{если} \sum\limits_{i=1}^{p}\langle A_i, q\rangle < \sum\limits_{j=1}^{r}\langle B_j, q\rangle, \\ \infty, \text{если} \sum\limits_{i=1}^{p}\langle A_i, q\rangle > \sum\limits_{j=1}^{r}\langle B_j, q\rangle, \\ 1, \text{если} \sum\limits_{i=1}^{p}\langle A_i, q\rangle = \sum\limits_{j=1}^{r}\langle B_j, q\rangle \end{cases}$$

Нас интересует только третий случай, когда область сходимости нетривиальная. Теперь, собирая основания при показателях степеней $q_1, \ldots, q_n$, получаем формулу (10) с выражениями (11) для Ψ_i. □

Предложение 1 показывает, что нетривиальные области сходимости имеют лишь неконфлуэнтные гипергеометрические ряды. Этот случай, соответствующий $\langle \delta, q\rangle = 0$, мы и будем рассматривать далее. Отметим, что в таком случае функции $\Psi_i(q)$ в (11) однородны степени нуль, т. е. зависят лишь от направления $q_1 : \ldots : q_n$. Кроме того, эти функции связаны с пределами (7) соотношениями $\Psi_i = \dfrac{1}{\Phi_i}$. В случае целых A_i, B_j это легко проверить, используя формулу $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$; для произвольных вещественных A_i, B_j можно воспользоваться формулой Стирлинга, как в доказательстве предложения 1.

Предложение 2. *Пусть ρ_q – радиус сходимости q-диагонального "подряда" $\sum\limits_{l=0}^{\infty} \varphi(ql)(x^q)^l$ степенного ряда (5). Тогда область сходимости этого ряда есть внутренность пересечения*

$$\bigcap_{q\geqslant 0} \{x : |x^q| < \rho_q\}. \tag{12}$$

Доказательство следует из того, что в каждой внутренней точке указанного пересечения все диагональные подряды сходятся, и потому члены ряда там ограничены. □

Теперь *доказательство* теоремы заканчивается следующим образом. Во-первых, заметим, что область сходимости G_J каждого подряда с суммированием по грани $\sigma_J = \{s_j > 0, j \in J, s_k = 0, k \in I \setminus J\}$ (эта область задается ограничениями только на $x_j, j \in J$) должна содержать область сходимости G всего ряда, причем

$$G = \bigcap_{1\leqslant |J|\leqslant n} G_J.$$

Поскольку сужение гипергеометрического ряда на каждую грань σ_J является гипергеометрическим рядом, то описания областей сходимости G_J с использованием параметризаций Горна-Капранова $\Phi_j(q_j, 0_{I\setminus J})$ для каждого подряда однотипны.

Из предложения 2 и формулы (10) следует, что вектор $(\Psi_1(q), \ldots, \Psi_n(q))$ локально (для подряда с суммированием в некотором малом конусе направлений q) параметризует поверхность сопряженных радиусов сходимости. Таким образом, точка x попадает в область сходимости G_J, $|J| = n$ тогда и только тогда, когда для $q > 0$ выполняется хотя бы одно из неравенств

$$|x_j| < |\Psi_j(q)| = \left|\frac{1}{\Phi_j(q)}\right|, \quad j = 1, \ldots, n,$$

что и требовалось доказать. □

Авторы поддержаны грантами СФУ и гранта Рособразования "Развитие научного потенциала высшей школы" р 2.1.1/4620. Второй автор также поддержан грантом РФФИ 08-01-90250_ Узб.

Список литературы

[1] И.М.Гельфанд, М.И.Граев, В.С.Ретах, Обобщенные гипергеометрические системы уравнений и ряды гипергеометрического типа, *Успехи матем. наук.*, **47**(1992), №4, 1-88.

[2] Б.В.Шабат, Введение в комплексный анализ, Ч. 2, М., Наука, 1976.

[3] V.V.Batyrev, I.Ciocan-Fontanine, B.Kim, D. van Straten, Conifold transitions and mirror symmetry for Calabi-Yau complete intersections in Grassmannians, *Nucl. Phys.*, **B514**(1998), №3 , 640-666.

[4] I.Gelfand, M.Kapranov, A.Zelevinsky, Discriminants, resultants and multidimensional determinants, Birkhäuser, Boston, 1994.

[5] J.Horn, Über die Convergenz der hypergeometrischen Reihen zweier und dreier Veränderlichen, *Math. Ann.*, **34**(1889), 544-600.

[6] M.Passare, T.Sadykov, A.Tsikh, Singularities of hypergeometric functions in several variables, *Compositio Math.*, **141**(2005), 787-810.

[7] T.M.Sadykov, On the Horn system of partial differential equations and series of hypergeometric type, *Math. Scand.*, **91**(2002), 127-149.

[8] M.Sato, Theory of prehomogeneous vector spaces (algebraic part), *Nagoya Math. J.*, **120**(1990), 1-34.

Domains of Convergence of Hypergeometric Series of Several Complex Variables

Anastasiya Yu.Semusheva
August K.Tsikh

We generalize the well-known result of Ja.Horn on the domain of convergence for hypergeometric series of several complex variables.

Keywords: domain of convergence, hypergeometric series, parametrization of Horn-Kapranov, the support of a series, amoeba.