Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Базовая кафедра вычислительных и информационных технологий

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_____ / В. В. Шайдуров

«17» июня 2019 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

АКСИОМАТИЗАЦИЯ ТАБЛИЧНЫХ ЛОГИК ГЁДЕЛЯ-ЛЁБА

Направление 02.04.01 Математика и компьютерные науки

Магистерская программа 02.04.01.01 Математическое и компьютерное моделирование

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент _____ / М.И. Голованов
17.06.19

Выпускник _____ / И.А. Марковская
17.06.19

Красноярск 2019

АННОТАЦИЯ

Магистерская диссертация по теме «Аксиоматизация табличных логик Гёделя-Лёба» представляет собой исследование в области неклассических модальных логик. Интерес к данной теме обусловлен проблемой алгоритмической неразрешимости задачи аксиоматизации непротиворечивых табличных нормальных модальных логик.

Целью работы являлась аксиоматизация табличных логик Гёделя-Лёба, порождённых замкнутыми классами корневых фреймов глубины 3 и ширины 3, порядка 7. Для достижения данной цели были поставлены следующие задачи: построение всех корневых фреймов глубины 3 и ширины 3, порядка 7, построение замкнутых классов полученных фреймов и дальнейшая их аксиоматизация.

В результате исследований построены формулы, которые в совокупности с аксиомами логики Гёделя-Лёба и формулами глубины и ширины, задают логику каждого из построенных замкнутых классов.

АКСИОМАТИЗАЦИЯ, МОДАЛЬНАЯ ЛОГИКА, ЛОГИКА ГЁДЕЛЯ-ЛЁБА, ИРРЕФЛЕКСИВНОЕ ОТНОШЕНИЕ, ТРАНЗИТИВНОЕ ОТНОШЕНИЕ.

ABSTRACT

The master's thesis on the topic «Axiomatization of Gödel-Löb's tabular logics» is a research in the field of non-classical modal logic. Interest in this topic is due to that the problem axiomatization of consistent normal modal tabular logics is algorithmically unsolvable.

The aim of the work was the axiomatization of the Gödel-Löb's tabular logics generated by closed classes of rooted frames of depth 3 and width 3, with the number of points equals 7. To achieve this goal, the following tasks were set: constructing all rooted frames of depth 3 and width 3, with the number of points equals 7, constructing closed classes of obtained frames and their further axiomatization.

As a result of the research, formulas were built which, together with the axioms of Gödel-Löb's logic and with formulas of depth and width, define the logic of each of the constructed closed classes.

AXIOMATIZATION, MODAL LOGIC, GÖDEL-LÖB'S LOGIC, IRREFLEXIVE RELATION, TRANSITIVE RELATION.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В работе с любой математической логикой немаловажным аспектом является вопрос аксиоматизации логики. Интерес к аксиоматизации модальных логик обусловлен следующими известными результатами: В [1] доказана конечная аксиоматизируемость табличных суперинтуиционистской и ряда нормальных модальных логик, но при этом в статье А.В. Чагрова [2] доказан факт того, что задача аксиоматизации непротиворечивых табличных нормальных модальных логик является алгоритмически неразрешимой. Поскольку логика Гёделя-Лёба является одной из указанного множества логик, она и стала предметом изучения данной магистерской диссертации. Также решающим фактором, явилось наблюдение, что для случая логики Гёделя-Лёба (GL) удаётся строить достаточно простые аксиоматизации, по крайней мере для логик, задаваемых не очень большими фреймами.

Так, в бакалаврской работе и отчётах по научно-исследовательской работе были представлены аксиоматизации логик, задаваемых фреймами глубины не больше 3 и ширины не больше 3, порядка меньше 7. В рамках данной магистерской диссертации были аксиоматизированы логики, задаваемые фреймами глубины 3 и ширины 3, порядка 7. Для этого были построены данные фреймы и их замкнутые классы, после чего были предложены новые модальные формулы, описывающие структуру соответствующих фреймов, и предложена конечная аксиоматизация всех адекватных данным фреймам логик. Полученные результаты были сформулированы в ряде лемм, доказанных в ходе исследования.

Удобным инструментом для разработки системы аксиом является конструкция В.В.Рыбакова [3] для n-характеристических моделей полных по Крипке логик, которая позволяет по заданным спискам фреймов, адекватных и не адекватных логике, проводить проверку формул, исследуемых на предмет принадлежности системы аксиом данной логике.

1 Основные понятия, определения и используемые результаты

Введём некоторые определения и некоторые используемые известные результаты:

Фреймом называется пара $F :=< W, R >$, где W – непустое множество, R – бинарное отношение, определённое на W.

Будем говорить, что точка x *видит* точку y, если xRy (либо y *достижима* из x).

Множество точек $X \subseteq W$ называется *антицепью* во фрейме $F :=< W, R >$, если $\forall\ x,\ y$ выполняется $\neg(xRy)$. Другими словами X – *антицепь*, если отдельные элементы в X не видят друг друга.

Глубиной фрейма называется длина максимальной цепи, *шириной* – количество элементов антицепи наибольшей мощности во фрейме.

Формула глубины:

$$\delta_0 := \bot, \delta_{n+1} = p_{n+1} \vee \Box(\Box p_{n+1} \to \delta_n).$$

Формула δ_{n+1} выполняется на фреймах, глубина которых не превышает $n+1$ элемент.

Формула ширины:

$$w_n := \bigvee_{0 \le i \ne j \le n} \Diamond(p_i \wedge (p_j \vee \Diamond p_j)).$$

Данная формула выполняется на фреймах, максимальная ширина которых не превышает n элементов.

Фрейм F – является *корневым*, если существует элемент $a \in F$ такой, что $\forall b \in F aRb$. Данный элемент a называют *корнем* F.

Фрейм $F_1 =< W_1, R >$ называется *открытым подфреймом* фрейма $F_2 =< W_2, R >$, если $W_1 \subseteq W_2$ и $\forall a \in W_1$ и $\forall b \in W_2 : (aRb \Rightarrow b \in W_1)$, и обозначается $F_1 \subseteq F_2$.

Отображение f фрейма $F_1 :=< W_1; R_1 >$ во фрейм $F_2 :=< W_2; R_2 >$ является p-морфизмом, если выполняются следующие условия:

$$1)\forall a, b \in W_1 : ((aRb) \Rightarrow (f(a)Rf(b))),$$
$$2)\forall a, b \in W_1 : (f(a)Rf(b)) \Rightarrow \exists c \in W_1 : ((aRc)\&(f(c) = f(b))).$$

Замкнутым называют класс фреймов, включающий в себя вместе с каждым фреймом все его p-морфные образы и открытые подфреймы.

Замкнутый класс, порождаемый фреймом f_i, обозначим $\mathcal{F}_i$. Логика каждого такого класса совпадает с логикой фрейма, порождающего данный класс $\lambda(f_i) = \lambda(\mathcal{F}_i)$, где i=$(\overline{1,15})$.

В ходе работы мы опирались на теорему В. В. Рыбакова 3.3.6 [3], в которой говорится о конструкции модели n-характеристической модели $Ch_\lambda(n)$, описанной в гл.3 [3], приведём краткое описание данной модели.

Пусть задана финитно аппроксимируемая логика λ, расширяющая логику $K4$. И множество пропозициональных переменных $p_i|1 \leq i \leq n)$ обозначено P_n. Первый слой данной модели $S_1(Ch_n(\lambda))$ представляет собой множество попарно неизоморфных как модели элементов со всевозможными означиваниями V переменных из множества P_n. Предположим, что слой глубины k $S_k(Ch_n(\lambda))$ уже построен. Для того, чтобы получить следующий слой глубины $k+1$ возьмём произвольную антицепь, содержащую хотя бы один элемент глубины k, и добавим к ней элемент из первого слоя S_1 в качестве конакрытия для данной антицепи, при условии, что получаемый в результате фрейм является λ- фреймом.

Продолжая таким образом построение, получаем модель $Ch_\lambda(n)$, которая в силу теоремы 3.3.6 [3] является n-характеристической для любой модальной логики $\lambda \supseteq K4$.

2 Логика GL

Рассмотрим набор аксиом, определяющих логику Гёделя-Лёба. Логика GL включает в себя 10 аксиом классической логики:

(A1) $(x \to (y \to x))$,

(A2) $(x \to (y \to z)) \to ((x \to y) \to (x \to z))$,

(A3) $x \to (x \vee y)$,

(A4) $y \to (x \vee y)$,

(A5) $(x \to z) \to ((y \to z) \to ((x \vee y) \to z))$,

(A6) $(x \wedge y) \to x$,

(A7) $(x \wedge y) \to y$,

(A8) $(x \to y) \to ((x \to z) \to (x \to (y \wedge z)))$,

(A9) $(x \to y) \to ((x \to \neg y) \to \neg x)$,

(A10) $\neg\neg x \to x$.

А также дополнительную аксиому логики K, связанную с модальной связкой $\Box$:

(A11) $\Box(x \to y) \to (\Box x \to \Box y)$.

Ещё одну аксиому, расширяющую K до K4:

(A12) $\Box x \to \Box\Box x$.

И, наконец, в логике GL к аксиомам логики K4 добавляется следующая аксиома:

(A13) $\Box(\Box x \to x) \to \Box x$.

Помимо перечисленных аксиом, на рассматриваемых в дальнейшем фреймах выполняются аксиомы ширины 3 и глубины 3:

$(A14) w_3 := \bigwedge_{0 \le i \le 3} \Diamond p_i \to \bigvee_{0 \le i \ne j \le 3} \Diamond(p_i \wedge (p_j \vee \Diamond p_j))$,

$(A15) \delta_3 := p_3 \vee \Box(\Box p_3 \to p_2 \vee \Box(\Box p_2 \to p_1 \vee \Box(\Box p_1 \to \bot)))$.

А также понадобится формула достижения первого слоя не менее чем за 2 шага:

(A16) $\Diamond^2(\Box\bot) \wedge \Diamond(p \wedge \Box\bot) \to \Diamond^2 p$.

И формула, истинная для фреймов, на которых есть хотя бы одна точка первого слоя, достижимая за 1 шаг:

(A17) $\bigwedge_{1 \le i \le n} \Diamond(p_i \wedge \Box\bot) \to \bigvee_{1 \le i \le n} \neg\Diamond^2(p_i \wedge \Box\bot)$,

где n – количество точек в первом слое.

3 Построение фреймов

Фреймы, удовлетворяющие аксиомам A1-A15 представляют собой достаточно обширный класс фреймов логики GL ширины не более 3, глубины не более 3. С помощью формул A16 и A17 данный класс разбивается на 2 подкласса:

1) Фреймы, на которых выполняется формула A16, либо имеют глубину не более 2, либо первый слой на них достигается не менее, чем за 2 шага;

2) Фреймы, на которых выполняется формула A17, либо имеют глубину не более 1, либо в первом слое есть точка, достижимая из корня за 1 шаг.

Первый подкласс в свою очередь делится на 5 групп фреймов, первые 4 из которых были рассмотрены в предыдущих работах:

1.1) 5 фреймов ширины 2;

1.2) 5 фреймов, в первом слое которых содержится 2 точки, во втором слое – 3;

1.3) 5 фреймов, в первом слое которых содержится 3 точки, во втором слое – 2;

1.4) 2 фрейма, в первом или втором слое которых содержится 1 точка;

1.5) 15 фреймов, в первом и втором слое которых содержится по 3 точки (рис. 1);

Второй подкласс не такой многочисленный и содержит всего 6 фреймов, которые были аксиоматизированы в предыдущих работах.

4 Характеризация классов, порождаемых фреймами f_1 – f_{15}, между собой

Рассмотрим 15 попарно-неизоморфных фреймов порядка 7 f_1 – f_{15}, задаваемых формулами A1-A16 (группа 1.5 первого подкласса).

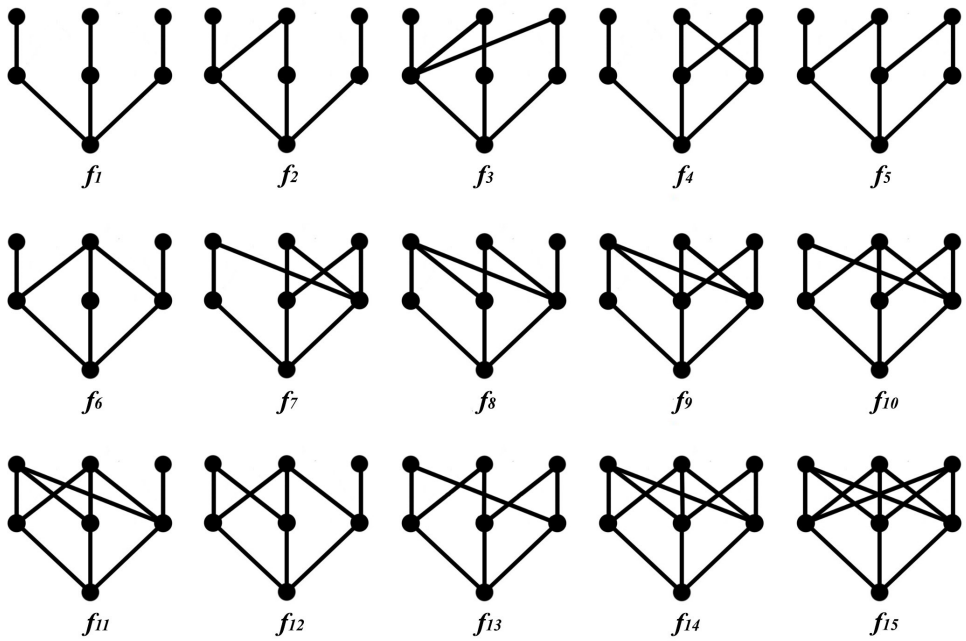

Рис. 1 – Фреймы f_1–f_{15} глубины 3, ширины 3

Для каждого из 15 фреймов, была подобрана формула (1.i), которая выполняется на фрейме f_i и опровергается на фреймах f_j, где $1 \leq i \neq j \leq 15$.

Обозначив точки первого слоя c_i, а точки второго слоя b_j (x и y – количество точек в первом и во втором слое соответственно), введём означивание (*):

$V(m_i) = c_j$, где $\{i, j\} = (\overline{1, x})$, x – количество точек первого слоя,
$V(n_i) = b_j$, где $\{i, j\} = (\overline{1, y})$, y – количество точек второго слоя.

Также, для краткости введём обозначения для последующих формул:

$$M_1 = (m_1 \wedge \neg m_2 \wedge \neg m_3 \wedge \Box\bot),$$

$$M_2 = (\neg m_1 \wedge m_2 \wedge \neg m_3 \wedge \Box\bot),$$

$$M_3 = (\neg m_1 \wedge \neg m_2 \wedge m_3 \wedge \Box\bot),$$

$$N_1 = (n_1 \wedge \neg n_2 \wedge \neg n_3 \wedge \Diamond\Box\bot),$$

$$N_2 = (\neg n_1 \wedge n_2 \wedge \neg n_3 \wedge \Diamond\Box\bot),$$

$$N_3 = (\neg n_1 \wedge \neg n_2 \wedge n_3 \wedge \Diamond\Box\bot),$$

$$A = \bigwedge_{1 \le i \le 3} \Diamond(N_i \wedge \Diamond M_i).$$

Следующие схожие обозначения нам понадобятся в 5 разделе:

$$M_1' = (m_1 \wedge \neg m_2 \wedge \Box\bot),$$

$$M_2' = (\neg m_1 \wedge m_2 \wedge \Box\bot),$$

$$N_1' = (n_1 \wedge \neg n_2 \wedge \Diamond\Box\bot),$$

$$N_2' = (\neg n_1 \wedge n_2 \wedge \Diamond\Box\bot).$$

$$A \to \bigwedge_{i \ne j \ne k} [\Diamond(N_i \wedge \neg\Diamond M_j \wedge \neg\Diamond M_k)], \tag{1.1}$$

$$A \to \bigvee_{i \ne j \ne k} [\Diamond(N_i \wedge \Diamond M_j \wedge \neg\Diamond M_k) \wedge \Diamond(N_j \wedge \neg\Diamond M_i \wedge \neg\Diamond M_k) \wedge \Diamond(N_k \wedge \neg\Diamond M_i \wedge \neg\Diamond M_j)], \tag{1.2}$$

$$A \to \bigvee_{i \ne j \ne k} [\Diamond(N_i \wedge \Diamond M_j \wedge \Diamond M_k) \wedge \Diamond(N_j \wedge \neg\Diamond M_i \wedge \neg\Diamond M_k) \wedge \Diamond(N_k \wedge \neg\Diamond M_i \wedge \neg\Diamond M_j)], \tag{1.3}$$

$$A \to \bigvee_{i \neq j \neq k} [\Diamond(N_i \wedge \neg\Diamond M_j \wedge \neg\Diamond M_k) \wedge \Diamond(N_j \wedge \neg\Diamond M_i \wedge \Diamond M_k) \wedge \Diamond(N_k \wedge \neg\Diamond M_i \wedge \Diamond M_j)], \quad (1.4)$$

$$A \to \bigvee_{i \neq j \neq k} [\Diamond(N_i \wedge \Diamond M_j \wedge \neg\Diamond M_k) \wedge \Diamond(N_j \wedge \neg\Diamond M_i \wedge \Diamond M_k) \wedge \Diamond(N_k \wedge \neg\Diamond M_i \wedge \neg\Diamond M_j)], \quad (1.5)$$

$$A \to \bigvee_{i \neq j \neq k} [\Diamond(N_i \wedge \Diamond M_j \wedge \neg\Diamond M_k) \wedge \Diamond(N_j \wedge \neg\Diamond M_i \wedge \neg\Diamond M_k) \wedge \Diamond(N_k \wedge \neg\Diamond M_i \wedge \Diamond M_j)], \quad (1.6)$$

$$A \to \bigvee_{i \neq j \neq k} [\Diamond(N_i \wedge \neg\Diamond M_j \wedge \neg\Diamond M_k) \wedge \Diamond(N_j \wedge \neg\Diamond M_i \wedge \Diamond M_k) \wedge \Diamond(N_k \wedge \Diamond M_i \wedge \Diamond M_j)], \quad (1.7)$$

$$A \to \bigvee_{i \neq j \neq k} [\Diamond(N_i \wedge \neg\Diamond M_j \wedge \neg\Diamond M_k) \wedge \Diamond(N_j \wedge \Diamond M_i \wedge \neg\Diamond M_k) \wedge \Diamond(N_k \wedge \Diamond M_i \wedge \Diamond M_j)], \quad (1.8)$$

$$A \to \bigvee_{i \neq j \neq k} [\Diamond(N_i \wedge \neg\Diamond M_j \wedge \neg\Diamond M_k) \wedge \Diamond(N_j \wedge \Diamond M_i \wedge \Diamond M_k) \wedge \Diamond(N_k \wedge \Diamond M_i \wedge \Diamond M_j)], \quad (1.9)$$

$$A \to \bigvee_{i \neq j \neq k} [\Diamond(N_i \wedge \Diamond M_j \wedge \neg\Diamond M_k) \wedge \Diamond(N_j \wedge \neg\Diamond M_i \wedge \Diamond M_k) \wedge \Diamond(N_k \wedge \Diamond M_i \wedge \Diamond M_j)], \quad (1.10)$$

$$A \to \bigvee_{i \neq j \neq k} [\Diamond(N_i \wedge \Diamond M_j \wedge \neg\Diamond M_k) \wedge \Diamond(N_j \wedge \Diamond M_i \wedge \neg\Diamond M_k) \wedge \Diamond(N_k \wedge \Diamond M_i \wedge \Diamond M_j)], \quad (1.11)$$

$$A \to \bigvee_{i \neq j \neq k} [\Diamond(N_i \wedge \Diamond M_j \wedge \neg\Diamond M_k) \wedge \Diamond(N_j \wedge \Diamond M_i \wedge \neg\Diamond M_k) \wedge \Diamond(N_k \wedge \neg\Diamond M_i \wedge \Diamond M_j)], \quad (1.12)$$

$$A \to \bigvee_{i \neq j \neq k} [\Diamond(N_i \wedge \Diamond M_j \wedge \neg\Diamond M_k) \wedge \Diamond(N_j \wedge \neg\Diamond M_i \wedge \Diamond M_k) \wedge \Diamond(N_k \wedge \Diamond M_i \wedge \neg\Diamond M_j)], \quad (1.13)$$

$$A \to \bigvee_{i \neq j \neq k} [\Diamond(N_i \wedge \Diamond M_j \wedge \neg\Diamond M_k) \wedge \Diamond(N_j \wedge \Diamond M_i \wedge \Diamond M_k) \wedge \Diamond(N_k \wedge \Diamond M_i \wedge \Diamond M_j)], \quad (1.14)$$

$$A \to \bigwedge_{i \neq j \neq k} [\Diamond(N_i \wedge \Diamond M_j \wedge \Diamond M_k)], \quad (1.15)$$

где $i, j, k = \{1, 2, 3\}$

Лемма 1 *Формула (1.i) истинна на фрейме f_i и опровергается на всех остальных фреймах f_j, где $\{i,j\} = \{1,2,3\}$ и $i \neq j$.*

Доказательство. Докажем, что формулы (1.1)-(1.15) действительно являются разделяющими формулами для фреймов порядка 7. Данные формулы имеют одну и ту же посылку A. Так как формула M_i имеет конъюнктивный член $\Box\bot$, то она может выполняться только в точке первого слоя, при условии соответствующего означивания в этой точке. Поскольку формула N_i имеет конъюнктивный член $\Diamond\Box\bot$, она может выполняться в точках не выше второго слоя, при условии соответствующего означивания в этих точках. А так как мы рассматриваем фреймы глубины не более трёх, то формула A может выполняться только в корне фрейма f_j, $j \in [1,15]$ при условии, что формулы N_1, N_2, N_3 выполняются в точках из множества $\{b_1, b_2, b_3\}$, не важно в каком порядке. Причём, если N_k выполняется в точке b_s, то M_k выполняется в точке c_s. Поскольку это единственное условие, которому должно удовлетворять означивание при выполнении формулы A в корне, то для удобства изложения будем предполагать, что $V(n_i) = \{b_i\}$, $V(m_i) = \{c_i\}$ для всех фреймов $f_1 - f_{15}$. Далее рассмотрим значения заключений формул $(1.i)$ на фреймах f_j для $j \in [1,15]$. Другие означивания, при которых в точке a выполняется формула A, будут отличаться от приведённого только перестановкой индексов пропозициональных переменных n_i, m_i. Начнём рассмотрение с формулы (1.1). Заключение этой формулы является конъюнкцией трёх формул: $\Diamond(N_1 \wedge \neg\Diamond M_2 \wedge \neg\Diamond M_3)$, $\Diamond(N_2 \wedge \neg\Diamond M_1 \wedge \neg\Diamond M_3)$, $\Diamond(N_3 \wedge \neg\Diamond M_1 \wedge \neg\Diamond M_2)$. Поскольку на фрейме f_1 из точки b_s достижима только точка c_s, причём $b_s \Vdash N_s$, $c_s \Vdash M_s$, то $b_s \Vdash \Diamond(N_s \wedge \neg\Diamond M_t \wedge \neg\Diamond M_k)$, где $\{s,t,k\} = \{1,2,3\}$. Следовательно, в корне фрейма f_1 истинна формула (1.1) при любом означивании. Если же при указанном означивании мы рассмотрим значение формулы (1.1) на фрейме f_k, $k \neq 1$, то среди точек b_1, b_2, b_3 этих фреймов найдётся хотя бы одна, из которой достижимы по крайней мере две точки первого слоя, в силу чего заключение формулы (1.1) в корне не будет выполняться. Например, на фрейме f_2 справедливо утверждение $b_1 \Vdash N_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \neg\Diamond M_3$, на фрейме f_3 справедливо утверждение $b_1 \Vdash N_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3$ и т.д.

Далее рассмотрим формулу (1.2). При заданном выше означивании на фрейме f_2 справедливы утверждения: $b_1 \Vdash N_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \neg\Diamond M_3$, $b_2 \Vdash N_2 \wedge$

$\wedge\neg\Diamond M_1 \wedge \neg\Diamond M_3$, $b_3 \Vdash N_3 \wedge \neg\Diamond M_1 \wedge \neg\Diamond M_2$. Следовательно, в корне выполняется соответствующий дизъюнктивный член заключения формулы (1.2). При другом означивании, при котором в корне выполняется посылка A формулы (1.2), изменится взаимнооднозначное соответствие между номерами $1, 2, 3$ точек первого, второго слоёв и формулами $N_1 \wedge \Diamond M_1$, $N_2 \wedge \Diamond M_2$, $N_3 \wedge \Diamond M_3$. Если означивание будет таково, что $b_1 \Vdash N_l$, $b_2 \Vdash N_m$, $b_3 \Vdash N_n$, $c_1 \Vdash M_l$, $c_2 \Vdash M_m$, $c_3 \Vdash M_n$, то будут справедливы утверждения: $a \Vdash A$, $b_1 \Vdash N_l \wedge \Diamond M_l \wedge \Diamond M_m \wedge \wedge\neg\Diamond M_n$, $b_2 \Vdash N_m \wedge \Diamond M_m \wedge \neg\Diamond M_l \wedge \neg\Diamond M_n$, $b_3 \Vdash N_n \wedge \Diamond M_n \wedge \neg\Diamond M_l \wedge \neg\Diamond M_m$. Следовательно, в корне будет истинна формула (1.2). Поскольку изменение нумерации точек фрейма, приводящее к изоморфизму соответствующих моделей, не влияет на оценку истинности формул, то далее будем рассматривать описанное выше фиксированное означивание $V(n_i) = \{b_i\}$, $V(m_i) = \{c_i\}$. При этом условии, как показано выше, на фрейме f_2 справедливы утверждения: $b_1 \Vdash N_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \neg\Diamond M_3$, $b_2 \Vdash N_2 \wedge \neg\Diamond M_1 \wedge \neg\Diamond M_3$, $b_3 \Vdash N_3 \wedge \neg\Diamond M_1 \wedge \neg\Diamond M_2$. На фрейме f_j, при $j \neq 2$ хотя бы одно из трёх приведённых утверждений будет ложно, соответственно формула (1.2) на фрейме f_j будет опровергаться. Например, на фреймах f_1, f_3, f_4, f_7, f_8, f_9, f_{15} справедливо утверждение $b_1 \nVdash N_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \neg\Diamond M_3$.

Аналогичная проверка остальных формул из списка (1.1) – (1.15) позволяет утверждать, что формула $(1.i)$ истинна только на фрейме f_i и опровергается на остальных фреймах списка f_1 – f_{15}.

Таким образом, произведено разделение всех фреймов 7-го порядка. Но для того, чтобы дать полную характеризацию каждого из замкнутых классов $\mathcal{F}_i$, необходимы дополнительные формулы, отделяющие каждый из классов $\mathcal{F}_i$ от всех не входящих в него фреймов.

5 Аксиоматизация классов $\mathcal{F}_1$–$\mathcal{F}_{15}$

Теперь для каждого из классов $\mathcal{F}_i$ нам потребуется список фреймов, которые необходимо отделить от класса $\mathcal{F}_i$, где $1 \leq i \leq 15$. Поскольку отделение будет происходить в рамках подкласса 1, список будет состоять из остальных фреймов, лежащих в данном подклассе (рис. 2).

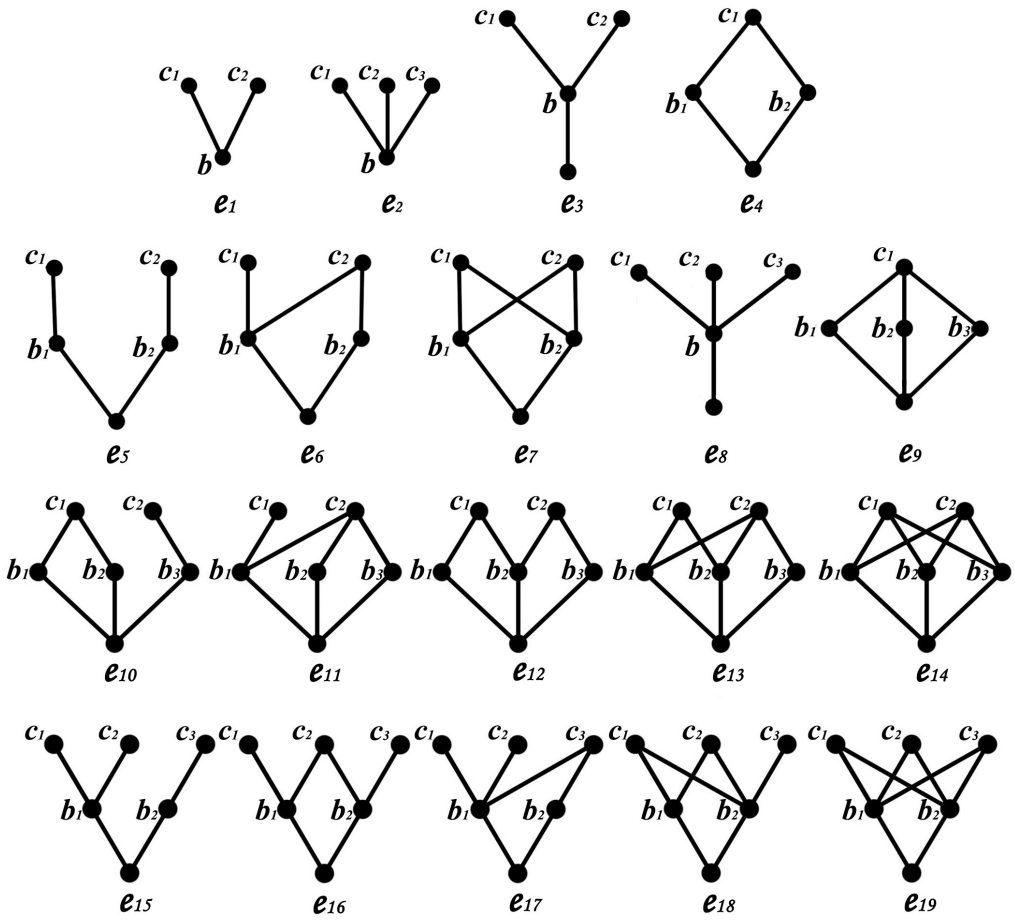

Рис. 2 - Фреймы подкласса 1 порядка меньше 7

Пусть заданы два класса фреймов: $\mathcal{G}$ и $\mathcal{F}$. Будем говорить, что формула φ отделяет класс $\mathcal{G}$ от класса $\mathcal{F}$, если она истинна на всех фреймах класса $\mathcal{G}$ и опровергается на всех фреймах класса $\mathcal{F}$. В силу теоремы 3.3.6 [3] для построения системы аксиом логики, задаваемой замкнутым классом $\mathcal{F}$, достаточно указать совокупность формул, отделяющих класс $\mathcal{F}$ от всех фреймов, не принадлежащих классу $\mathcal{F}$.

Также будем писать $a \to b$, если точки a и b склеиваются при p-морфизме (имеют общий образ).

Фреймы $e_{10} - e_{19}$ порядка 6 имеют следующие p-морфные образы порядка 5.

e_{10} – e_9 $(c_1 \to c_2)$, e_5 $(b_1 \to b_2)$; e_{11} – e_9 $(c_1 \to c_2)$, e_6 $(b_2 \to b_3)$; e_{12} – e_9 $(c_1 \to c_2)$; e_{13} – e_9 $(c_1 \to c_2)$, e_6 $(b_1 \to b_2)$; e_{14} – e_9 $(c_1 \to c_2)$, e_7 $(b_1 \to b_2)$;

e_{15} – e_5 $(c_1 \to c_2)$, $e_6(c_2 \to c_3)$; e_{16} – e_6 $(c_1 \to c_2)$, e_7 $(c_1 \to c_3)$; e_{17} – e_6 $(c_1 \to c_2)$; e_{18} – e_6 $(c_1 \to c_2)$, e_7 $(c_2 \to c_3)$; e_{19} – e_7 $(c_1 \to c_2)$, e_8 $(b_1 \to b_2)$.

Фреймы порядка 5 имеют следующие p-морфные образы порядка 4.
e_5 – e_4 $(c_1 \to c_2)$; e_6 – e_4 $(c_1 \to c_2)$; e_7 – e_4 $(c_1 \to c_2)$, e_3 $(b_1 \to b_2)$;
e_8 – e_3 $(c_1 \to c_2)$; e_9 – e_4 $(b_1 \to b_2)$;

5.1 Аксиоматизация класса $\mathcal{F}_1$

Построим замкнутый класс фрейма f_1. Помимо фрейма порядка 6 e_{10} (получается склейкой точек $c_1 \to c_2$) в замкнутом классе $\mathcal{F}_1$ лежат фреймы e_4, e_5 и e_9 и фреймы ширины 1.

Поскольку фреймы ширины 1 лежат в замкнутых всех фреймов глубины и ширины 3, на них будут выполняться все формулы, построенные для классов $\mathcal{F}_1$–$\mathcal{F}_{15}$, а значит в рассмотрении они не участвуют.

Введём следующую формулу:

1.$\Diamond^2\Box\bot \vee \Box p \vee \Box\neg p$.

Данная формула опровергается на фрейме e_1 – самом маленьком фрейме, не лежащем в замкнутом классе $\mathcal{F}_1$ (при означивании $V(p) = c_1$, $V(\neg p) = c_2$). Следовательно, данная формула опровергается на всех фреймах, для которых e_1 является открытым подфреймом или p-морфным образом (на всех фреймах подкласса 1, не лежащих в замкнутом классе $\mathcal{F}_1$). В то же время данная формула истинна на f_1, поскольку в корне данного фрейма выполняется первый дизъюнктивный член, а в остальных точках один из оставшихся дизъюнктивных членов (то есть формула выполняется во всех точках и при любом означивании).

Приведённое выше доказывает следующую лемму:

Лемма 2 *Набор формул: A1-A16 + f_1.1 – аксиоматизирует логику замкнутого класса $\mathcal{F}_1$, т.е. формулы истинны на фрейме f_1 и фреймах, принадлежащих $\mathcal{F}_1$, в то время как на фреймах, не лежащих в $\mathcal{F}_1$ опровергается хотя бы одна формула из набора.*

5.2 Аксиоматизация класса $\mathcal{F}_2$

Как было показано, формула (1.2) отделяет $\mathcal{F}_2$ от остальных фреймов

порядка 7. Далее для получения аксиоматизации класса $\mathcal{F}_2$ укажем список фреймов порядка меньшего, чем порядок f_2 и не принадлежащих классу $\mathcal{F}_2$. Фрейм f_2 имеет следующие p-морфные образы порядка 6: $e_{10}(c_1 \to c_2)$, $e_{11}(c_2 \to c_3)$ и $e_{12}(c_1 \to c_3)$, следовательно, фреймы $e_{13} - e_{19}$ к классу $\mathcal{F}_2$ не принадлежат. Из приведённых списков p-морфизмов для фреймов $e_{10} - e_{12}$ находим p-морфные образы порядка 5: e_5, e_6, e_9 и порядка 4: e_4, принадлежащие классу $\mathcal{F}_2$. Таким образом, к классу $\mathcal{F}_2$ не принадлежат фреймы глубины 3 порядка 5: e_7, e_8, и фреймы глубины 3 порядка 4: e_3. Из фреймов глубины 2 к $\mathcal{F}_2$ не принадлежит только фрейм e_2. Итак, к классу $\mathcal{F}_2$ не принадлежат фреймы: $e_{13} - e_{19}$, e_8, e_7, e_3, e_2. Но из приведённой таблицы видно, что фрейм e_7, не принадлежащий классу $\mathcal{F}_2$, является p-морфным образом фреймов $e_{14}, e_{16}, e_{18}, e_{19}$, также не принадлежащих классу $\mathcal{F}_2$. То есть любая формула, отделяющая класс $\mathcal{F}_2$ от e_7 будет отделять от $\mathcal{F}_2$ и фреймы $e_{14}, e_{16}, e_{18}, e_{19}$. По той же причине исключим из списка e_8, e_{17}, e_7, так как e_2 является открытым подфреймом e_8 и e_{17}, а e_3 является p-морфным образом фрейма e_7. Следовательно, достаточно отделить от класса $\mathcal{F}_2$ фреймы e_{13}, e_{15}, e_3, e_2. Далее укажем список формул, отделяющих фрейм f_2 от фреймов из приведённого списка.

1. $[\Diamond p_1 \wedge \Diamond p_2 \wedge \Diamond p_3 \to (\Diamond(p_1 \wedge p_2) \vee \Diamond(p_1 \wedge p_3) \vee \Diamond(p_2 \wedge p_3)] \vee \Diamond^2\Box\bot$.

На f_2 данная формула истинна, так как в корне выполняется второй дизъюнктивный член при любом означивании, а в остальных точках выполняется первый дизъюнктивный член (в первом слое по причине ложности посылки импликации, во втором слое – при означиваниях вида $V(p_i) = \{c_j\}$, где $i, j = \{1, 2, 3\}$, истинна и посылка, и заключение импликации, поскольку во втором слое существует точка, которая видит 2 точки первого слоя, при других означиваниях посылка ложна и импликация истинна).

В то же время на e_2 данная формула опровергается в корне, так как в нём не выполняется ни один из дизъюнктивных членов.

Далее необходимо рассмотреть фреймы e_{13}, e_{15}, e_3.

2. $\Diamond(N_1' \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2') \wedge \Diamond(N_2' \wedge \Diamond M_2') \to \Diamond(N_2' \wedge \neg\Diamond M_1')$.

Данная формула опровергается на e_{13} при означивании $V(n_1) = \{b_1\}$, $V(n_2) = \{b_2\}$, $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$. Посылка данной формулы выполняется на f_2 при условиях: $b_1 \Vdash N_1'$, $c_1 \Vdash M_1'$, $c_2 \Vdash M_2'$, формула $N_2' \wedge \Diamond M_2'$ выполняется либо на b_2, либо на b_3. Но при этих условиях на f_2 выполняется и заключение данной формулы. Следовательно, рассмотренная формула отделяет $\mathcal{F}_2$ от фрейма e_{13}.

3. $\Diamond(\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2) \wedge \Diamond^2 M_3 \to (\Diamond(\Diamond M_1 \wedge \neg\Diamond M_2 \wedge \neg\Diamond M_3) \vee \Diamond(\Diamond M_2 \wedge$ $\wedge \neg\Diamond M_1 \wedge \neg\Diamond M_3))$.

Формула 3 опровергается на e_{15}, при означивании $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$, $V(m_3) = \{c_3\}$. Если посылка данной формулы выполняется на f_2, то $c_1 \Vdash M_1$, $c_2 \Vdash M_2$, $c_3 \Vdash M_3$, но в этом случае $b_2 \Vdash \Diamond M_2 \wedge \neg\Diamond M_1 \wedge \neg\Diamond M_3$, т.е. эта формула истинна на f_2.

4. $\Diamond(p \wedge \Diamond q \wedge \Diamond\neg q) \to ((\Diamond\Box q \wedge \Diamond\Box\bot) \vee (\Diamond\Box\neg q \wedge \Diamond\Box\bot))$.

Формула опровергается на e_3 при означивании $V(p) = \{b_1\}$, $V(q) = \{c_1\}$. Посылка данной формулы выполняется на f_2 при условии: $V(p) = \{b_1\}$, $V(q) = \{c_1\}$ либо $V(q) = \{c_2\}$, но в этом случае формула истинна на f_2.

Приведённое выше доказывает следующую лемму:

Лемма 3 *Набор формул: A1-A16, формула (1.2) из раздела 4, f_2.1, f_2.2, f_2.3 и f_2.4 – аксиоматизирует логику замкнутого класса, порождённый фреймом f_2, т.е. формулы истинны на данном фрейме и фреймах, принадлежащих его замкнутому классу, в то время как на фреймах, не лежащих в замкнутом классе опровергается хотя бы одна формула из набора.*

5.3 Аксиоматизация класса $\mathcal{F}_3$

Фрейм f_3 имеет следующие p-морфные образы порядка 6: e_{12} $(c_1 \to c_2)$, e_{11} $(c_2 \to c_3)$, следовательно фреймы $e_{10}, e_{13} - e_{19}$ к классу $\mathcal{F}_2$ не принадлежат. Из приведённых списков p-морфизмов для фреймов e_{11}, e_{12} находим

p-морфные образы порядка 5: e_9, e_6, и порядка 4: e_4, принадлежащие классу $\mathcal{F}_2$. Таким образом, к классу $\mathcal{F}_2$ не принадлежат фреймы глубины 3 порядка 5: e_5, e_7, e_8 и фреймы глубины 3 порядка 4: e_3. Итак, необходимо построить формулы, отделяющие класс $\mathcal{F}_3$ от фреймов $e_{10}, e_{13} - e_{19}$, e_3, e_5, e_7, e_8. Но фрейм e_5 является p-морфным образом фреймов e_{10}, e_{15} и формула, опровергающаяся на e_5 будет опровергаться и на e_{10}, e_{15}. Фрейм e_7 является p-морфным образом фреймов $e_{14}, e_{16}, e_{18}, e_{19}$. Фрейм e_3 является p-морфным образом фреймов e_8, e_7.

Таким образом, достаточно найти формулы, отделяющие класс $\mathcal{F}_3$ от фреймов e_{13}, e_{17}, e_5, e_3.

1. $\Diamond^2 M_1' \wedge \Diamond^2 M_2' \to \Diamond(\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2')$.

Данная формула опровергается на e_5, при означивании $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$. Если посылка данной формулы выполняется на f_3, то в точке b_1 выполняется формула $\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$, т.е. данная формула истинна на f_3.

2. $\Diamond(N_1' \wedge \Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3) \wedge \Diamond(N_2' \wedge \Diamond M_3) \to \Diamond(\neg\Diamond M_3 \wedge \Diamond\Box\bot)$.

Формула 2 опровергается на e_{17}, поскольку при означивании, при котором M_i выполняются в первом слое, а N_j' во втором, опровергается посылка, так как если какая-то точка первого слоя достижима из двух точек второго слоя, то во втором слое нет точки, которая её не видит. На f_3 такая точка есть, а при других означиваниях посылка ложна, следовательно формула 2 истинна.

3. $\Diamond(N_1' \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2') \wedge \Diamond(N_2' \wedge \Diamond M_2') \to \Diamond(N_2' \wedge \neg\Diamond M_1')$.

Формула опровергается на фрейме e_{13} при означивании $V(n_1) = \{b_1\}$, $V(n_2) = \{b_2\}$, $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$. Так как только из b_1 достижимо более одной точки первого слоя, то посылка данной формулы выполняется на f_3 при условии $V(n_1) = \{b_1\}$, а формула $N_2' \wedge \Diamond M_2'$ выполняется либо на b_2, либо на b_3. Но так как из обеих точек b_2 и b_3 достижима только одна

точка первого слоя, в которой будет выполняться при соответствующем означивании формула M_2', то либо на b_2, либо на b_3 будет выполняться формула $N_2' \wedge \neg\Diamond M_1'$. Следовательно, в b будет истинна рассматриваемая формула.

4. $\Diamond^2 q \wedge \Diamond^2 \neg q \to \Diamond(\Diamond\Box\bot \wedge (\Box q \vee \Box\neg q))$.

Формула 4 опровергается на e_3 при означивании $V(q) = \{c_1\}$. Заключение данной формулы будет истинно в точке a на f_3 при любом означивании, поскольку открытые подфреймы с корнями в точках b_2 и b_3 линейны.

Приведённое выше доказывает следующую лемму:

Лемма 4 *Набор формул: A1-A16, формула (1.3) из раздела 4, f_3.1,f_3.2, f_3.3 и f_3.4 – аксиоматизирует логику замкнутого класса, порождённого фреймом f_3, т.е. формулы истинны на данном фрейме и фреймах, принадлежащих его замкнутому классу, в то время как на фреймах, не лежащих в замкнутом классе опровергается хотя бы одна формула из набора.*

5.4 Аксиоматизация класса $\mathcal{F}_4$

Фрейм f_4 имеет следующие p-морфные образы порядка 6: e_{10} ($c_2 \to c_3$), e_{13} ($c_1 \to c_2$), e_{15} ($b_2 \to b_3$); p-морфные образы порядка 5: e_5, e_6, e_9; порядка 4: e_4. Все p-морфные образы меньшего порядка и фреймы глубины меньше 3 входят в $\mathcal{F}_4$. Не входят в класс $\mathcal{F}_4$ фреймы e_{11}, e_{12}, e_{14}, $e_{16} - e_{19}$ порядка 6, фреймы e_7, e_8 порядка 5, и фрейм e_3 порядка 4. Но фреймы e_{14}, e_{16}, e_{18}, e_{19} в качестве p-морфного образа имеют фрейм e_7, который также не входит в класс $\mathcal{F}_4$. Следовательно, любая формула, отделяющая класс $\mathcal{F}_4$ от фрейма e_7, будет отделять от $\mathcal{F}_4$ и фреймы e_{14}, e_{16}, e_{18}, e_{19}. Фреймы e_7, e_8 имеют p-морфный образ e_3, не входящий в $\mathcal{F}_4$. Итак, от $\mathcal{F}_4$ достаточно отделить фреймы e_{11}, e_{12}, e_{17} и e_3.

1. $\Diamond N_1 \wedge \Diamond N_2 \wedge \Diamond N_3 \wedge \Diamond(N_2 \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2') \to (\Diamond(N_1 \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2') \vee$
$\vee \Diamond(N_3 \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2')$.

Положим $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$.

Если положить $V(n_1) = \{b_2\}$, $V(n_2) = \{b_1\}$, $V(n_3) = \{b_3\}$, то формула опровергается на e_{11}. Если положить $V(n_1) = \{b_1\}$, $V(n_2) = \{b_2\}$, $V(n_3) = \{b_3\}$, то формула опровергается на e_{12}. Посылка формулы может быть выполнена на f_4 только при условии, что формула N_2 истинна на одной из точек b_2 или b_3. Но в этом случае одна из формул N_1, N_3 будет выполняться на второй из точек b_2, b_3. Следовательно, заключение истинно. При невыполнении посылки, формула истинна согласно свойствам операции импликации.

2. $\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3 \to [\Diamond(\Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3 \wedge \neg\Diamond M_1) \vee \Diamond(\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_3 \wedge$ $\wedge \neg\Diamond M_2) \vee \Diamond(\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \neg\Diamond M_3)]$.

Данная формула опровергается на e_{17} при означивании $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$, $V(m_3) = \{c_3\}$, поскольку во втором слое нет точки, из которой достижимы ровно две точки первого слоя.

Докажем, что формула истинна на f_4. Если посылка формулы выполняется на f_4, то формулы M_1, M_2, M_3 выполняются на точках c_1, c_2, c_3 взятых в некотором порядке. Поскольку из обеих точек b_2, b_3 достижимы только точки c_2, c_3, то на обеих точках b_2, b_3 будет выполняться одна из формул $\Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3 \wedge \neg\Diamond M_1$, $\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_3 \wedge \neg\Diamond M_2$, $\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \neg\Diamond M_3$ и, следовательно, заключение формулы будет выполняться в корне.

3. $\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2' \to [\Diamond(\Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2') \vee \Diamond(\neg\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2') \vee$ $\vee \Diamond(\neg\Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2')]$.

Покажем, что даная формула опровергается на e_3 при означивании $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$. Если посылка формулы выполняется на e_3, то на $b \Vdash \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$ и ни один дизъюнктивный член заключения на b не выполняется, т.е. формула опровергается.

В то же время она истинна на f_4, так как при любом означивании из точки b_1 достижима только одна точка c_1 и в ней не могут быть истинными M_1' и M_2' ввиду их несовместности.

Приведённое выше доказывает следующую лемму:

Лемма 5 *Набор формул: A1-A16, формула (1.4) из раздела 4,* $f_4.1$, $f_4.2$ *и*

f_4.3 – аксиоматизирует логику замкнутого класса, порождённого фреймом f_4, т.е. формулы истинны на данном фрейме и фреймах, принадлежащих его замкнутому классу, в то время как на фреймах, не лежащих в замкнутом классе опровергается хотя бы одна формула из набора.

5.5 Аксиоматизация класса $\mathcal{F}_5$

Фрейм f_5 имеет следующие p-морфные образы: e_{11} $(c_2 \to c_3)$, e_{12} $(c_1 \to c_2)$, e_{13} $(c_1 \to c_3)$, e_4, e_6, e_9. Таким образом, $\mathcal{F}_5$ фреймы e_{10}, $e_{14} - e_{19}$, e_3, e_5, e_7, e_8 не содержатся в $\mathcal{F}_5$. Кроме того фрейм e_2 не содержится в $\mathcal{F}_5$ так как не является ни p-морфным образом, ни открытым подфреймом f_5. Фреймы $e_{17} - e_{19}$ содержат открытый подфрейм e_2, фреймы e_{14}, e_{16} имеют p-морфный образ e_7, p-морфным образом которого является e_3, фреймы e_{10}, e_{15} имеют p-морфный образ e_5. Итак, достаточно отделить от $\mathcal{F}_5$ фреймы e_5, e_3, e_2.

1. $\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3 \to [\Diamond(\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2) \vee \Diamond(\Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3)]$.

Посылка данной формулы выполнима на e_2, заключение на фрейме глубины 2 не выполнимо, поэтому данная формула опровержима на e_2. Посылка данной формулы выполняется на f_5 при условии, что формулы M_1, M_2, M_3 выполняются на взятых в произвольном порядке точках c_1, c_2, c_3. Предположим, что первый дизъюнктивный член заключения, формула $\Diamond(\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2)$ не выполняется на f_5. Это возможно при условии, что формула $\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2$ не выполняется ни на b_1, ни на b_2. Так как формулы M_1, M_2 не могут выполняться в одной точке, то пара точек, на которых выполняются M_1, M_2 совпадает с c_1, c_3. Следовательно, $c_2 \Vdash M_3$, а M_2 выполняется либо на c_1 и тогда $b_1 \Vdash \Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3$, либо на c_3 и тогда $b_2 \Vdash \Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3$. В обоих случаях рассматриваемая формула выполняется в корне. Следовательно, формула истинна на f_5.

2. $\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2' \wedge \Box^2(M_1' \vee M_2') \to \Diamond(\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2')$.

При таком означивании, что $c_1 \Vdash M_1'$, $c_2 \Vdash M_2'$, посылка формулы выполняется в корне фрейма e_5, а заключение не выполняется, т.е. формула

опровергается на e_5.

Покажем, что формула истинна на f_5. Если посылка формулы выполняется в корне фрейма f_5, то одна из формул M_1', M_2' выполняется в двух точках множества c_1, c_2, c_3, а вторая только в одной. Если $b_1 \nVdash \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$, то либо в c_1, c_2 выполняется M_1' и тогда $c_3 \Vdash M_2'$, следовательно $b_2 \Vdash \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$ и формула истинна на f_5, либо в c_1, c_2 выполняется M_2' и тогда $c_3 \Vdash M_1'$, следовательно $b_2 \Vdash \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$ и формула истинна на f_5.

3.(f_4.3) $\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2' \to [\Diamond(\Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2') \vee \Diamond(\neg\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2') \vee$
$\vee \Diamond(\neg\Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2')]$.

Данная формула опровергается на e_3 (доказано в п.5.4).

Докажем, что формула также истинна на фрейме f_5. Предположим, что посылка выполняется на f_5. Если в точке c_3 не выполняется ни одна из формул M_1', M_2', то $b_3 \Vdash \neg\Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2'$ и заданная формула выполняется на f_5. Если же в точке c_3 выполняется хотя бы одна из формул M_1', M_2', то вторая не выполняется и вновь в корне выполняется заключение формулы. Следовательно, формула истинна на f_5.

Приведённое выше доказывает следующую лемму.

Лемма 6 *Набор формул: A1-A16, формула (1.5) из раздела 4, f_5.1, f_5.2 и f_4.3 – аксиоматизирует логику замкнутого класса, порождённого фреймом f_5, т.е. формулы истинны на данном фрейме и фреймах, принадлежащих его замкнутому классу, в то время как на фреймах, не лежащих в замкнутом классе опровергается хотя бы одна формула из набора.*

5.6 Аксиоматизация класса $\mathcal{F}_6$

Фрейм f_6 имеет следующие p-морфные образы: e_{11} ($c_2 \to c_3$), e_{13} ($c_1 \to$ $\to c_3$), e_9, e_6, e_4. Следовательно, в классе $\mathcal{F}_6$ не содержатся фреймы e_{10}, e_{12}, $e_{14} - e_{19}$, e_8, e_5, e_7, e_3 и e_2, не являющийся открытым подфреймом f_6. Фреймы $e_{17} - e_{19}$ содержат открытый подфрейм e_2, фреймы e_{10}, e_{15} имеют p-морфный образ e_5, фреймы e_{14}, e_{16} имеют p-морфный образ e_7, e_7 и e_8 имеют p-морфный образ e_3. Таким образом, от $\mathcal{F}_6$ достаточно отделить e_{12}, e_5, e_3, e_2.

1. $\Diamond(N_1 \wedge \Diamond M_1') \wedge \Diamond(N_2 \wedge \Diamond M_1') \wedge \Diamond N_3 \wedge \Diamond^2 M_2' \to \Diamond(N_3 \wedge \Diamond M_1')$.

Формула опровергается на фрейме e_{12} при означивании $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$, $V(n_1) = \{b_1\}$, $V(n_2) = \{b_2\}$, $V(n_3) = \{b_3\}$. При этом, если посылка выполняется на f_6, то $c_2 \Vdash M_1'$ так как только c_2 достижима из различных точек второго слоя. Если N_1 и N_2 выполняются на точках b_1, b_3, то $b_2 \Vdash N_3$ и заключение формулы тоже выполняется. Если N_1 и N_2 выполняются на точках b_1, b_2 или b_2, b_3, то, соответственно, либо $b_3 \Vdash N_3$ и $b_3 \Vdash \Diamond M_1'$, либо $b_1 \Vdash N_3$ и $b_1 \Vdash \Diamond M_1'$. Следовательно, формула 2 истинна на f_6.

2. (f_5.2) $\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2' \wedge \Box^2(M_1' \vee M_2') \to \Diamond(\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2')$.

Данная формула опровергается на фрейме e_5 (доказано в п.5.5).

Покажем, что формула истинна на f_6. Если посылка формулы выполняется в корне фрейма f_6, то одна из формул M_1', M_2' выполняется в двух точках множества c_1, c_2, c_3, а вторая только в одной. Если $b_1 \nVdash \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$, то либо в c_1, c_2 выполняется M_1' и тогда $c_3 \Vdash M_2'$, следовательно $b_3 \Vdash \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$ и формула истинна на f_6, либо в c_1, c_2 выполняется M_2' и тогда $c_3 \Vdash M_1'$, следовательно, $b_3 \Vdash \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$ и формула истинна на f_6.

3. (f_2.1.) $[\Diamond p_1 \wedge \Diamond p_2 \wedge \Diamond p_3 \to (\Diamond(p_1 \wedge p_2) \vee \Diamond(p_1 \wedge p_3) \vee \Diamond(p_2 \wedge p_3)] \vee \Diamond^2 \Box \bot$.

На f_6 данная формула истинна, так как в корне выполняется второй дизъюнктивный член при любом означивании, а в остальных точках выполняется первый дизъюнктивный член (в первом слое по причине ложности посылки импликации, во втором слое – при означиваниях вида $V(p_i) = \{c_j\}$, где $i, j = \{1, 2, 3\}$, истинна и посылка, и заключение импликации, поскольку во втором слое существует точка, которая видит 2 точки первого слоя, при других означиваниях посылка ложна и импликация истинна).

Доказательство того, что формула f_2.1. опровергается на e_2 приведено в п.5.2.

4. (f_4.3) $\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2' \to [\Diamond(\Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2') \vee \Diamond(\neg\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2') \vee \Diamond(\neg\Diamond M_1' \wedge$

$\wedge \neg\Diamond M_2')]$.

Данная формула опровергается на e_3 при означивании $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$ (доказано в п. 5.4). Но при этом истинна на фрейме f_6, так как при любом означивании из точки b_2 достижима только одна точка c_2, и в ней не могут быть истинными M_1' и M_2' ввиду их несовместности.

Приведённое выше доказывает следующую лемму:

Лемма 7 *Набор формул: A1-A16, формула (1.6) из раздела 4, $f_7.1$, $f_5.2$, $f_2.1$ и $f_4.3$ – аксиоматизирует логику замкнутого класса, порождённого фреймом f_6, т.е. формулы истинны на данном фрейме и фреймах, принадлежащих его замкнутому классу, в то время как на фреймах, не лежащих в замкнутом классе опровергается хотя бы одна формула из набора.*

5.7 Аксиоматизация класса $\mathcal{F}_7$

Фрейм f_7 имеет следующие p-морфные образы: e_{12} $(c_2 \to c_3)$, e_{13} $(c_1 \to c_2)$, e_9, e_6, e_4 и содержит открытый подфрейм e_2. Следовательно, в классе $\mathcal{F}_7$ не содержатся фреймы e_{10}, e_{11}, $e_{14} - e_{19}$, e_8, e_5, e_7, e_3. Для перечисленных фреймов, не входящих в $\mathcal{F}_7$ имеются следующие p-морфизмы на фреймы, также не входящие в $\mathcal{F}_7$: $e_{10} \to e_5$, $e_{14} \to e_7$, $e_{15} \to e_5$, $e_{16} \to e_7$, $e_{18} \to e_7$, $e_{19} \to e_7$, $e_8 \to e_3$, $e_7 \to e_3$. Итак, окончательный список фреймов, достаточный для построения аксиоматизации класса $\mathcal{F}_7$ содержит фреймы e_{11}, e_{17}, e_5, e_3.

1. $\Diamond(N_1 \wedge \Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2') \wedge \Diamond(N_2 \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2') \wedge \Diamond N_3 \to$
$\to \neg\Diamond(N_3 \wedge \Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2')$.

Формула опровергается на фрейме e_{11} при означивании $V(m_1) = \{c_2\}$, $V(m_2) = \{c_1\}$, $V(n_1) = \{b_2\}$, $V(n_2) = \{b_1\}$, $V(n_3) = \{b_3\}$.

Предположим, при некотором означивании посылка формулы выполняется на f_7, а заключение не выполняется, т.е. $a \Vdash \Diamond(N_3 \wedge \Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2')$. Так как посылка выполняется, то $a \Vdash \Diamond(N_2 \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2')$. Поскольку из b_3 достижим весь первый слой, то при выбранном означивании $b_3 \Vdash \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$ и поэтому $b_3 \nVdash N_3$, иначе заключение формулы выполняется на f_7, т.е. N_3 должно выполняться на одной из точек b_1, b_2. На второй из последних двух

точек должна выполняться одна из формул N_1, N_2. Пусть выполняется N_2. В этом случае на выбранной точке вместе с N_2 выполняется $\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$, но это возможно, только если выбранной точкой является b_2, так как M_1' и M_2' не могут выполняться в одной точке. Следовательно, имеем следующее распределение значений формул: $b_2 \Vdash N_2 \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$, $b_1 \Vdash N_3$, $b_3 \Vdash N_1$. По предположению $a \Vdash \Diamond(N_1 \wedge \Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2')$ - это противоречит тому, что на первом слое выполняются M_1' и M_2', так как из b_3 достижим весь первый слой. Следовательно, предположение неверно и на b_1, b_2 должны выполняться формулы N_3, N_1. Вместе с N_1 выполняется $\Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2'$. Если $b_1 \Vdash \Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2'$, то $c_1 \Vdash M_1'$, следовательно M_2' выполняется на одной из точек c_2, c_3. Так как при этом $b_2 \Vdash N_3$ и из b_2 достижимы c_2, c_3, то $b_2 \Vdash N_3 \wedge \Diamond M_2'$ и заключение выполняется на f_7, что противоречит предположению. Осталось рассмотреть последний вариант: $b_1 \Vdash N_3$, $b_2 \Vdash N_1$. В этом случае $b_2 \Vdash N_1 \wedge \Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2'$. Следовательно M_2' не выполняется на c_2, c_3 и $c_1 \Vdash M_2'$. Таким образом, $b_1 \Vdash N_3 \wedge \Diamond M_2'$, т.е. $\nVdash \Diamond(N_3 \wedge \Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2')$, что противоречит исходному предположению. Следовательно, данная формула истинна на f_7.

2. $\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2' \to \Diamond(\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2')$.

Формула опровергается на e_5 при означивании $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$, поскольку обе точки второго слоя видят по одной точке первого слоя.

Однако, формула истинна на f_7 при любом означивании, так как из точки b_3 достижимы все точки первого слоя.

3. (f_4.2) $\Diamond(\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3) \to [\Diamond(\neg\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3) \vee \vee \Diamond(\Diamond M_1 \wedge \neg\Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3) \vee \Diamond(\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \neg\Diamond M_3)]$.

Данная формула опровергается на e_{17} при означивании: $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$, $V(m_3) = \{c_3\}$ (п.5.4).

При этом формула истинна на f_7 при любом означивании, так как из точки b_2 достижимы ровно две точки первого слоя.

4. (f_4.3) $\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2' \to [\Diamond(\Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2') \vee \Diamond(\neg\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2') \vee$
$\vee \Diamond(\neg\Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2')]$.

Данная формула опровергается на e_3 при означивании $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$, поскольку из единственной точки второго слоя достижим весь первый слой (п.5.4).

В то же время, формула истинна на f_7, так как при любом означивании из точки b_1 достижима только одна точка c_1 и в ней не могут быть истинными M_1' и M_2' ввиду их несовместности.

Приведённое выше доказывает следующую лемму.

Лемма 8 *Набор формул: A1-A16, формула (1.7) из раздела 4, f_8.1, f_8.2, f_4.2 и f_4.3 – аксиоматизирует логику замкнутого класса, порождённого фреймом f_7, т.е. формулы истинны на данном фрейме и фреймах, принадлежащих его замкнутому классу, в то время как на фреймах, не лежащих в замкнутом классе опровергается хотя бы одна формула из набора.*

5.8 Аксиоматизация класса $\mathcal{F}_8$

Фрейм f_8 имеет следующие p-морфные образы: e_{11} ($c_1 \to c_2$), e_{13} ($c_2 \to$ $\to c_3$), e_9, e_6, e_4 и содержит открытый подфрейм e_2. В классе $\mathcal{F}_8$ не содержатся фреймы e_{10}, e_{12}, $e_{14} - e_{19}$, e_8, e_5, e_7, e_3. Для фреймов последнего списка имеются следующие p-морфизмы внутри списка: $e_{10} \to e_5$, $e_{14} \to e_7$, $e_{15} \to e_5$, $e_{16} \to e_7$, $e_{18} \to e_7$, $e_{19} \to e_7$, $e_8 \to e_3$, $e_7 \to e_3$. Следовательно, достаточно отделить класс $\mathcal{F}_8$ от фреймов e_{12}, e_{17}, e_5, e_3.

1. $\Diamond^2 M_1' \wedge \Diamond^2 M_2' \to \neg\Diamond(\Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2') \vee \neg\Diamond(\neg\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2')$.

Формула опровергается на e_{12} при означивании $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$, так как при этом означивании справедливы утверждения $b_1 \Vdash \Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2'$, $b_3 \Vdash \neg\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$.

Предположим, что на фрейме f_8 при некотором означивании формула опровергается. Тогда на точках первого слоя выполняются формулы M_1' и M_2', а на точках второго слоя выполняются формулы $\Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2'$ и $\neg\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$. Поскольку из точки b_3 достижим весь первый слой, то ни одна из этих фор-

мул не может выполняться в b_3. Если $\Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2'$ выполняется в b_1, то $c_1 \Vdash M_1'$, но тогда $b_2 \Vdash \Diamond M_1'$ и $b_2 \nVdash \neg\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$. Аналогично происходит и во втором случае, когда $b_1 \Vdash \neg\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$. Итак, наше предположение приводит к противоречию. Следовательно, формула истинна на f_8.

2. (f_5.2) $\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2' \wedge \Box^2(M_1' \vee M_2') \to \Diamond(\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2')$.

Данная формула опровергается на e_5 (доказано в п.5.5).

Если посылка формулы выполняется в корне фрейма f_8, то $b_3 \Vdash \Diamond M_1' \wedge$ $\wedge\Diamond M_2'$ и $\Vdash \Diamond(\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2')$. Следовательно, формула истинна на f_8.

3. (f_4.2.) $\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3 \to [\Diamond(\Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3 \wedge \neg\Diamond M_1) \vee \Diamond(\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_3 \wedge$ $\wedge \neg\Diamond M_2) \vee \Diamond(\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \neg\Diamond M_3)]$.

Данная формула опровергается на e_{17} при означивании $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$, $V(m_3) = \{c_3\}$ (доказательство в п.5.4). Докажем, что данная формула истинна на f_8. Если посылка выполняется на f_8, то формулы M_1, M_2, M_3 выполняются на точках c_1, c_2, c_3 взятых в некотором порядке. Поскольку из точки b_2 достижимы только точки c_2, c_3, то на b_2 будет выполняться одна из формул $\Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3 \wedge \neg\Diamond M_1$, $\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_3 \wedge \neg\Diamond M_2$, $\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \neg\Diamond M_3$ и, следовательно, заключение формулы будет выполняться в корне и формула истинна.

4. (f_4.3) $\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2' \to [\Diamond(\Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2') \vee \Diamond(\neg\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2') \vee \Diamond(\neg\Diamond M_1' \wedge$ $\wedge \neg\Diamond M_2')]$.

Данная формула опровергается на e_3 при означивании $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$. (Доказано в п. 5.4)

При этом формула истинна на f_8, так как при любом означивании из точки b_1 достижима только одна точка c_1 и в ней не могут быть истинными M_1' и M_2' ввиду их несовместности.

Приведённое выше доказывает следующую лемму.

Лемма 9 *Набор формул: A1-A16, формула (1.8) из раздела 4,* f_8.1,

$f_5.2$, $f_4.2$ и $f_4.3$ – аксиоматизирует логику замкнутого класса, порождённого фреймом f_8, т.е. формулы истинны на данном фрейме и фреймах, принадлежащих его замкнутому классу, в то время как на фреймах, не лежащих в замкнутом классе опровергается хотя бы одна формула из набора.

5.9 Аксиоматизация класса $\mathcal{F}_9$

Фрейм f_9 имеет p-морфные образы: e_{13} ($c_2 \to c_3$), e_{17} ($b_2 \to b_3$), e_9, e_6, e_4 и содержит открытый подфрейм e_2. В классе $\mathcal{F}_9$ не содержатся фреймы e_{10}, e_{11}, e_{14}, e_{15}, e_{16}, e_{18}, e_{19}, e_8, e_5, e_7, e_3. Имеются следующие p-морфизмы внутри последнего списка: $e_{10} \to e_5$, $e_{14} \to e_7$, $e_{15} \to e_5$, $e_{16} \to e_7$, $e_{18} \to e_7$, $e_{19} \to e_7$, $e_8 \to e_3$, $e_7 \to e_3$. Таким образом, достаточно указать формулы, отделяющие класс $\mathcal{F}_9$ от фреймов e_{11}, e_5, e_3.

1. $\Diamond N_1 \wedge \Diamond N_2 \wedge \Diamond N_3 \wedge \Diamond(N_2 \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2') \to (\Diamond(N_1 \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2') \vee$ $\vee \Diamond(N_3 \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2')$.

Положим $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$. Если положить $V(n_1) = \{b_2\}$, $V(n_2) = \{b_1\}$, $V(n_3) = \{b_3\}$, то формула опровергается на e_{11}.

Покажем, что формула истинна на f_9. Посылка формулы может быть выполняться на f_9 только при условии, что формула N_2 истинна на одной из точек b_2 или b_3. Но в этом случае одна из формул N_1, N_3 будет выполняться на второй из точек b_2, b_3. При этом на b_2 и на b_3 выполняется формула $\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$. Следовательно, формула истинна.

2. ($f_5.2$) $\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2' \wedge \Box^2(M_1' \vee M_2') \to \Diamond(\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2')$.

Данная формула опровергается на e_5 (доказано в п.5.5).

Докажем, что формула истинна на f_9. Если посылка данной формулы выполняется в корне фрейма f_9, то формулы M_1', M_2' выполняются в точках множества c_1, c_2, c_3. Поскольку весь первый слой достижим из точек b_2, b_3, то формула $\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$ выполняется в b_2 и b_3, следовательно, формула истинна на f_9.

3. (f_4.3) $\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2' \to [\Diamond(\Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2') \vee \Diamond(\neg\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2') \vee \Diamond(\neg\Diamond M_1' \wedge$ $\wedge \neg\Diamond M_2')]$.

Данная формула опровергается на e_3 при означивании $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$ (доказано в п.5.4). Также формула истинна на f_9 так как при любом означивании из точки b_1 достижима только одна точка c_1 и в ней не могут быть истинными M_1' и M_2' ввиду их несовместности.

Приведённое выше доказывает следующую лемму.

Лемма 10 *Набор формул: A1-A16, формула (1.9) из раздела 4, f_9.1, f_5.2 и f_4.3 – аксиоматизирует логику замкнутого класса, порождённого фреймом f_9, т.е. формулы истинны на данном фрейме и фреймах, принадлежащих его замкнутому классу, в то время как на фреймах, не лежащих в замкнутом классе опровергается хотя бы одна формула из набора.*

5.10 Аксиоматизация класса $\mathcal{F}_{10}$

Фрейм f_{10} имеет p-морфные образы: e_{13} ($c_2 \to c_3$), e_{14} ($c_1 \to c_3$), e_9, e_6, e_7, e_4, e_3 и содержит открытый подфрейм e_2. В классе $\mathcal{F}_{10}$ не содержатся фреймы e_{10}, e_{11}, e_{12}, $e_{15} - e_{19}$, e_8, e_5. Внутри последнего списка имеются следующие p-морфизмы: $e_{10} \to e_5$, $e_{15} \to e_5$, $e_{19} \to e_8$. Таким образом, для характеризации класса $\mathcal{F}_{10}$ достаточно фреймов e_{11}, e_{12}, e_{16}, e_{17}, e_{18}, e_8, e_5.

1. $\Diamond^2 M_1' \wedge \Diamond^2 M_2' \wedge \Box^2(M_1' \vee M_2') \to \neg\Diamond(\Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2') \vee \neg\Diamond(\neg\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2')$.

Данная формула опровергается на e_{12} при означивании $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$, так как при этом означивании справедливы утверждения $b_1 \Vdash \Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2'$, $b_3 \Vdash \neg\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$.

Предположим, что на фрейме f_{10} при некотором означивании формула опровергается. Тогда на точках первого слоя выполняются формулы M_1' и M_2', причём одна из них выполняется в двух точках, а на точках второго слоя выполняются формулы $\Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2'$ и $\neg\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$. Поскольку из точки b_3 достижим весь первый слой, то ни одна из этих формул не может выполняться в b_3. Если $\Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2'$ выполняется в b_1, то $c_1, c_2 \nVdash M_2'$, но тогда $c_3 \Vdash M_2'$, $c_1, c_2 \Vdash M_1'$ и $b_2 \nVdash \neg\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$. Во втором случае из условия

$b_1 \Vdash \neg\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$ следует $_1, c_2 \Vdash M_2'$, $c_3 \Vdash M_1'$, $b_2 \nVdash \Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2'$. Итак наше предположение приводит к противоречию. Следовательно, формула истинна на f_{10}.

2. $\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3 \to [\Diamond(\Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3 \wedge \neg\Diamond M_1) \vee \Diamond(\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_3 \wedge$ $\wedge \neg\Diamond M_2) \vee \Diamond(\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \neg\Diamond M_3)]$.

Формула опровергается на e_{17} и e_8 при означивании $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$, $V(m_3) = \{c_3\}$. Если посылка формулы выполняется на f_{10}, то формулы M_1, M_2, M_3 выполняются на точках c_1, c_2, c_3 взятых в некотором порядке. Поскольку из точек b_1, b_2 достижимы только две из трёх точек c_1, c_2, c_3, то на каждой из точек b_1, b_2 будет выполняться одна из формул $\Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3 \wedge \neg\Diamond M_1$, $\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_3 \wedge \neg\Diamond M_2$, $\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \neg\Diamond M_3$ и, следовательно, заключение формулы будет выполняться в корне.

3. $\Diamond(\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2) \wedge \Diamond(\Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3) \to \Diamond(\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3)$.

Формула опровергается на e_{16} при означивании $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$, $V(m_3) = \{c_3\}$ поскольку на данном фрейме нет точки во втором слое, из которой достижим весь первый слой.

На фрейме f_{10} формула истинна, так как при выполнении посылки на первом слое будут выполняться все формулы M_1, M_2, M_3 и первый слой достижим из b_3.

4. $\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3 \wedge \Diamond(\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \neg\Diamond M_3) \to [\Diamond(\Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3 \wedge$ $\wedge \neg\Diamond M_1) \vee \Diamond(\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_3 \wedge \neg\Diamond M_2)]$.

Формула опровергается на фрейме e_{18} при означивании $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$, $V(m_3) = \{c_3\}$, т.к. во втором слое только одна точка, из которой достижимы ровно две точки первого слоя.

Покажем, что формула истинна на фрейме f_{10}. Если на нём выполняется посылка, то формула $\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \neg\Diamond M_3$ выполняется либо в b_1, либо в b_2. Если $\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \neg\Diamond M_3$ выполняется в b_1, то $c_3 \Vdash M_3$ и либо $b_2 \Vdash \Diamond M_2 \wedge$

$\wedge\Diamond M_3 \wedge \neg\Diamond M_1$, либо $b_2 \Vdash \neg\Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3 \wedge \Diamond M_1$. Если $\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \neg\Diamond M_3$ выполняется в b_2, то рассуждения аналогичны.

5.(f_7.1) $\Diamond(N_1 \wedge \Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2') \wedge \Diamond(N_2 \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2') \wedge \Diamond N_3 \to \neg\Diamond(N_3 \wedge \wedge \Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2')$.

Формула опровергается на фрейме e_{11} при означивании $V(m_1) = \{c_2\}$, $V(m_2) = \{c_1\}$, $V(n_1) = \{b_2\}$, $V(n_2) = \{b_1\}$, $V(n_3) = \{b_3\}$. (доказано в п.5.7).

Предположим, при некотором означивании посылка формулы выполняется на f_{10}, а заключение не выполняется, т.е. $a \Vdash \Diamond(N_3 \wedge \Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2')$. Так как посылка выполняется, то $a \Vdash \Diamond(N_2 \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2')$. Поскольку из b_3 достижим весь первый слой, то при выбранном означивании $b_3 \Vdash \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$ и поэтому $b_3 \nVdash N_3$, иначе заключение формулы выполняется на f_{10}, т.е. N_3 должно выполняться на одной из точек b_1, b_2. Если для некоторой точки x второго слоя справедливо утверждение $x \Vdash N_1 \wedge \Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2'$, то $x \in \{b_1, b_2\}$. Таким образом на одной из точек b_1, b_2 выполняется формула $N_3 \wedge \Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2'$, а на другой формула $N_1 \wedge \Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2'$, т.е. формула $\Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2'$ должна выполняться на обеих точках b_1, b_2. Так как из b_1 достижимы c_1, c_2, то ни на одной из них не выполняется M_2'. Точно так же M_2' не может выполняться на c_2, c_3. Получаем противоречие с утверждением $a \Vdash \Diamond(N_2 \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2')$. То есть формула истинна на f_{10} при любом означивании.

6. (f_5.2) $\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2' \wedge \Box^2(M_1' \vee M_2') \to \Diamond(\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2')$.

Формула опровергается на e_5 (доказано в п.5.5).

Докажем, что формула истинна на f_{10}. Если посылка формулы выполняется в корне фрейма f_{10}, то $b_3 \Vdash \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$ и формула истинна на f_{10}.

Приведённое выше доказывает следующую формулу.

Лемма 11 *Набор формул: A1-A16, формула (1.10) из раздела 4, f_{10}.1, f_{10}.2, f_{10}.3, f_{10}.4, f_7.1 и f_5.2 – аксиоматизирует логику замкнутого класса, порождённого фреймом f_{10}, т.е. формулы истинны на данном фрейме и фреймах, принадлежащих его замкнутому классу, в то время как на фреймах, не лежащих в замкнутом классе опровергается хотя бы одна формула*

из набора.

5.11 Аксиоматизация класса $\mathcal{F}_{11}$

Фрейм f_{11} имеет p-морфные образы e_{11} ($c_1 \to c_2$), e_{14} ($c_2 \to c_3$), e_{18} ($b_1 \to b_2$), e_9, e_6, e_7, e_4, e_3 и содержит открытый подфрейм e_2. В классе $\mathcal{F}_{11}$ не содержатся фреймы e_{10}, e_{12}, e_{13}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{19}, e_8, e_5. Внутри последнего списка имеются следующие p-морфизмы: $e_{10} \to e_5$, $e_{15} \to e_5$, $e_{19} \to e_8$. Для характеризации класса $\mathcal{F}_{11}$ достаточно фреймов e_{12}, e_{13}, e_{16}, e_{17}, e_8, e_5.

1. $\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2' \wedge \Diamond(N_1 \wedge \Box M_1') \wedge \Diamond N_2 \wedge \Diamond N_3 \to \Diamond(\neg N_1 \wedge \Box M_1')$.

Данная формула опровергается на e_{12} при означивании $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$, $V(n_1) = \{b_2\}$, так как при этом означивании справедливы утверждения $b_1 \Vdash \Box M_1'$, $b_3 \Vdash \Box M_2'$. Также опровергается на e_{13} при означивании $V(m_2) = \{c_1\}$, $V(m_1) = \{c_2\}$, $V(n_1) = \{b_3\}$ так как в этом случае $b_1, b_2 \Vdash \neg N_1 \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$.

Предположим, что на фрейме f_{11} при некотором означивании посылка формулы выполняется. Так как в первом слое выполняются M_1' и M_2' и из b_3 достижим весь первый слой, то формула $N_1 \wedge \Box M_1'$ выполняется либо на b_1, либо на b_2. Так как каждая из формул N_1, N_2, N_3 выполняется выполняется точно в одной точке, то на одной из b_1, b_2 N_1 не выполняется. Поскольку из обеих точек b_1, b_2 достижимы только c_1, c_2, то на обеих точках выполняется формула $\Box M_1'$, т.е. формула истинна на f_{11}.

2. $\Diamond(\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2) \wedge \Diamond(\Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3) \to \Diamond(\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3)$.

Формула 2 опровергается на фрейме e_{16} при означивании $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$, $V(m_3) = \{c_3\}$. На фрейме f_{11} формула истинна, так как при выполнении посылки на первом слое будут выполняться все формулы M_1, M_2, M_3 и первый слой достижим из b_3.

3. (f_4.2) $\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3 \to [\Diamond(\Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3 \wedge \neg\Diamond M_1) \vee \Diamond(\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_3 \wedge \wedge \neg\Diamond M_2) \vee \Diamond(\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \neg\Diamond M_3)]$.

Данная формула опровергается на e_{17} (п.5.4) и e_8 при означивании $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$, $V(m_3) = \{c_3\}$, поскольку на данных фреймах нет точки во втором слое, из которой достижимы ровно 2 точки первого слоя.

Покажем, что при этом формула истинна на f_{11}. Если посылка формулы выполняется на f_{11}, то формулы M_1, M_2, M_3 выполняются на точках c_1, c_2, c_3 взятых в некотором порядке. Поскольку из обеих точек b_1, b_2 достижимы только точки c_1, c_2, то на обеих точках b_1, b_2 будет выполняться одна из формул $\Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3 \wedge \neg\Diamond M_1$, $\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_3 \wedge \neg\Diamond M_2$, $\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \neg\Diamond M_3$ и, следовательно, заключение формулы будет выполняться в корне.

4. $(f_5.2) \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2' \wedge \Box^2(M_1' \vee M_2') \to \Diamond(\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2')$.

Формула опровергается на фрейме e_5 (доказано в п.5.5).

Покажем, что формула истинна на f_{11}. Если посылка формулы выполняется в корне фрейма f_{11}, то одна из формул M_1', M_2' выполняется в двух точках множества c_1, c_2, c_3, а вторая только в одной. Если $b_1, b_2 \nVdash \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$, то либо в c_1, c_2 выполняется M_1' и тогда $c_3 \Vdash M_2'$, следовательно, $b_3 \Vdash \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$ и формула истинна на f_{11}, либо в c_1, c_2 выполняется M_2' и тогда $c_3 \Vdash M_1'$, следовательно, $b_3 \Vdash \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$ и формула истинна на f_{11}.

Приведённое выше доказывает следующую лемму.

Лемма 12 *Набор формул: A1-A16, формула (1.11) из раздела 4, $f_{11}.1$, $f_{11}.2$, $f_4.2$ и $f_5.2$ – аксиоматизирует логику замкнутого класса, порождённого фреймом f_{11}, т.е. формулы истинны на данном фрейме и фреймах, принадлежащих его замкнутому классу, в то время как на фреймах, не лежащих в замкнутом классе опровергается хотя бы одна формула из набора.*

5.12 Аксиоматизация класса $\mathcal{F}_{12}$

Фрейм f_{12} имеет p-морфные образы e_{11} $(c_1 \to c_2)$, e_{13} $(c_2 \to c_3)$, e_{14} $(c_1 \to c_3)$, e_{16} $(b_1 \to b_2)$, e_9, e_6, e_7, e_4, e_3. В классе $\mathcal{F}_{12}$ не содержатся фреймы e_{10}, e_{12}, e_{15}, e_{17}, e_{18}, e_{19}, e_8, e_5, e_2. Фреймы e_{17}, e_{18}, e_{19}, e_8 содержат открытый подфрейм e_2 из этого же списка. Для фреймов e_{10}, e_{15} фрейм e_5 является

p-морфным образом. Следовательно, в списке достаточно оставить e_{12}, e_5, e_2.

1. $\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2' \wedge \Diamond(N_1 \wedge \Box M_1') \wedge \Diamond N_2 \wedge \Diamond N_3 \to \neg\Diamond(\neg N_1 \wedge \Box M_2')$.

Формула опровергается на фрейме e_{12} при означивании $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$, $V(n_1) = \{b_2\}$, так как при этом означивании справедливы утверждения $b_1 \Vdash \Box M_1'$, $b_3 \Vdash \neg N_1 \wedge \Box M_2'$.

Предположим, что на фрейме f_{12} при некотором означивании посылка формулы выполняется. Тогда в первом слое выполняются M_1' и M_2'. Если формула $N_1 \wedge \Box M_1'$ выполняется либо на b_1, либо на b_2, то $c_3 \Vdash M_2'$. Так как каждая из формул N_1, N_2, N_3 выполняется выполняется точно в одной точке, то на b_3 N_1 не выполняется. Поскольку из обеих точек b_1, b_2 достижимы только c_1, c_2, то на обеих точках выполняется формула M_1', т.е. $b_3 \Vdash \neg N_1 \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$ и формула истинна на f_{12}. Если формула $N_1 \wedge \Box M_1'$ выполняется на b_3, то на c_1, c_2 выполняется M_1', а $b_1, b_2 \Vdash \neg N_1 \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$, т.е. исходная формула истинна на f_{12}.

2. (f_5.2) $\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2' \wedge \Box^2(M_1' \vee M_2') \to \Diamond(\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2')$.

Формула опровергается на фрейме e_5 (доказано в п.5.5).

Докажем, что формула истинна на f_{12}. Если посылка формулы выполняется в корне фрейма f_{12}, то одна из формул M_1', M_2' выполняется в двух точках множества c_1, c_2, c_3, а вторая только в одной. Если $b_1, b_2 \nVdash \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$, то либо в c_1, c_2 выполняется M_1' и тогда $c_3 \Vdash M_2'$, следовательно, $b_3 \Vdash \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$ и формула истинна на f_{12}, либо в c_1, c_2 выполняется M_2' и тогда $c_3 \Vdash M_1'$, следовательно, $b_3 \Vdash \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$ и формула истинна на f_{12}. Аналогична ситуация в случае $b_1, b_2 \nVdash \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$.

3. (f_2.1.) $[\Diamond p_1 \wedge \Diamond p_2 \wedge \Diamond p_3 \to (\Diamond(p_1 \wedge p_2) \vee \Diamond(p_1 \wedge p_3) \vee \Diamond(p_2 \wedge p_3)] \vee \Diamond^2\Box\bot$.

Формула f_2.1 опровергается на e_2 при означивании $V(p_1) = \{c_1\}$, $V(p_2) = \{c_2\}$, $V(p_3) = \{c_3\}$. А также она истинна на f_{12}, так как e_2 не является открытым подфреймом f_{12}.

Приведённое выше доказывает следующую лемму.

Лемма 13 *Набор формул: A1-A16, формула (1.12) из раздела 4,* $f_{12}.1$, $f_5.2$ *и* $f_2.1$ *– аксиоматизирует логику замкнутого класса, порождённого фреймом* f_{12}*, т.е. формулы истинны на данном фрейме и фреймах, принадлежащих его замкнутому классу, в то время как на фреймах, не лежащих в замкнутом классе опровергается хотя бы одна формула из набора.*

5.13 Аксиоматизация класса $\mathcal{F}_{13}$

Фрейм f_{13} имеет p-морфные образы e_{13} $(c_2 \to c_3)$, e_9, e_6, e_4. В классе $\mathcal{F}_{13}$ не содержатся фреймы e_{10}, e_{11}, e_{12}, $e_{14} - e_{19}$, e_8, e_5, e_7, e_3, e_2. Фреймы e_{17}, e_{18}, e_{19}, e_8 содержат открытый подфрейм e_2 из этого же списка. Внутри списка фреймов, не содержащихся в $\mathcal{F}_{13}$, существуют p-морфизмы: $e_{10} \to e_5$, $e_6 \to e_5$, $e_{16} \to e_7$, $e_{18} \to e_7$, $e_{19} \to e_7$, $e_8 \to e_3$, $e_7 \to e_3$. Следовательно, в списке достаточно оставить e_{11}, e_{12}, e_{14}, e_{17}, e_5, e_3, e_2.

1. $\Diamond N_1 \wedge \Diamond N_2 \wedge \Diamond N_3 \wedge \Diamond(N_2 \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2') \wedge \Box^2(M_1' \vee M_2') \to (\Diamond(N_1 \wedge$ $\wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2') \vee \Diamond(N_3 \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2')$.

Положим $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$. Если положить $V(n_1) = \{b_2\}$, $V(n_2) = \{b_1\}$, $V(n_3) = \{b_3\}$, то формула опровергается на e_{11}. Если положить $V(n_1) = \{b_1\}$, $V(n_2) = \{b_2\}$, $V(n_3) = \{b_3\}$, то формула опровергается на e_{12}. Посылка формулы может выполняться на f_{13} только при условии, что формулы N_1, N_2, N_3 выполняются на точках b_1, b_2, b_3, не важно в каком порядке. Можно предполагать $b_i \Vdash N_i$. Пусть $b_2 \Vdash N_2 \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$. Тогда на c_2, c_3 выполняются M_1', M_2'. На c_1 выполняется либо M_1', либо M_2'. Если $c_1 \Vdash M_1'$, $c_2 \Vdash M_2'$, то $b_1 \Vdash N_1 \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$ и формула истинна на f_{13}. Если $c_1 \Vdash M_1'$, $c_3 \Vdash M_2'$, то $b_3 \Vdash N_3 \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$. Если $c_1 \Vdash M_2'$, $c_2 \Vdash M_1'$, то $b_1 \Vdash N_1 \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$ – формула истинна на f_{13}. Если $c_1 \Vdash M_2'$, $c_3 \Vdash M_1'$, то $b_3 \Vdash N_3 \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$ – формула истинна на f_{13}. Итак формула истинна на f_{13} при любых означиваниях.

2. $\Diamond(\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2') \wedge \Box^2(M_1' \vee M_2') \to [\Diamond\Box M_1' \vee \Diamond\Box M_2']$.

При означивании $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$ данная формула опровергается на e_{14}. Так как для любых двух точек первого слоя существует точка второго слоя, из которой достижимы только точки этой пары и при выполнении посылки на f_{13} существует пара точек, на которых выполняется только одна из формул M_1', M_2', то заключение формулы также выполняется на f_{13}.

3. $\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2' \wedge \Box^2(M_1' \vee M_2') \to [\Diamond(\Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2') \vee \Diamond(\neg\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2') \vee$ $\vee \Diamond(\neg\Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2')]$.

Формула 3 опровергается на фрейме e_3 при означивании $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$, поскольку во втором слое содержится только одна точка и из неё достижим весь первый слой.

Если посылка истинна на f_{13}, то в первом слое при любом означивании существует пара точек c_i, c_j, на которых одновременно выполняются либо M_1', либо M_2'. Если ко-накрытием этой пары является элемент b_k, то будет выполняться, соответственно, либо $b_k \Vdash \Diamond M_1' \wedge \neg\Diamond M_2'$, либо $b_k \Vdash \neg\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$. Следовательно, данная формула на f_{13} истинна.

4. (f_4.2) $\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3 \to [\Diamond(\Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3 \wedge \neg\Diamond M_1) \vee \Diamond(\Diamond M_1 \wedge$ $\wedge \Diamond M_3 \wedge \neg\Diamond M_2) \vee \Diamond(\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \neg\Diamond M_3)]$.

Данная формула опровергается на e_{17} (п.5.4).

Покажем, что формула истинна на f_{13}. Если посылка формулы выполняется на f_{13}, то формулы M_1, M_2, M_3 выполняются на точках c_1, c_2, c_3, взятых в некотором порядке. Поскольку из любой из точек b_1, b_2, b_3 достижимы только две точки из c_1, c_2, c_3, то на каждой из точек b_1, b_2, b_3 будет выполняться одна из формул $\Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3 \wedge \neg\Diamond M_1$, $\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_3 \wedge \neg\Diamond M_2$, $\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \neg\Diamond M_3$ и, следовательно, заключение формулы будет выполняться в корне.

5. (f_2.1) $[\Diamond p_1 \wedge \Diamond p_2 \wedge \Diamond p_3 \to (\Diamond(p_1 \wedge p_2) \vee \Diamond(p_1 \wedge p_3) \vee \Diamond(p_2 \wedge p_3)] \vee \Diamond^2\Box\bot$.

Данная формула опровергается на e_2 (п.5.2) и истинна на f_{13}, так как $e_2 \notin \mathcal{F}_{13}$.

6. (f_5.2) $\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2' \wedge \Box^2(M_1' \vee M_2') \to \Diamond(\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2')$.

Данная формула опровергается на фрейме e_5 (доказано в п.5.5).

Докажем, что формула истинна на f_{13}. Если посылка формулы выполняется в корне фрейма f_{13}, то одна из формул M_1', M_2' выполняется в двух точках множества c_1, c_2, c_3, а вторая только в одной. Если $b_1 \nVdash \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$, то либо в c_1, c_2 выполняется M_1' и тогда $c_3 \Vdash M_2'$, следовательно $b_2 \Vdash \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$ и формула истинна на f_{13}, либо в c_1, c_2 выполняется M_2' и тогда $c_3 \Vdash M_1'$, следовательно, $b_2 \Vdash \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2'$ и формула истинна на f_{13}. Все другие ситуации идентичны разобранной.

Приведённое выше доказывает следующую лемму.

Лемма 14 *Набор формул: A1-A16, формула (1.13) из раздела 4,* f_{13}.1, f_{13}.2, f_{13}.3, f_4.2, f_2.1 *и* f_5.2 *– аксиоматизирует логику замкнутого класса, порождённого фреймом* f_{13}*, т.е. формулы истинны на данном фрейме и фреймах, принадлежащих его замкнутому классу, в то время как на фреймах, не лежащих в замкнутом классе опровергается хотя бы одна формула из набора.*

5.14 Аксиоматизация класса $\mathcal{F}_{14}$

Фрейм f_{14} имеет p-морфные образы e_{13} ($c_1 \to c_2$), e_{14} ($c_2 \to c_3$), e_{18} ($b_2 \to b_3$), e_9, e_6, e_7, e_4, e_3. Фрейм e_2 является открытым подфреймом фрейма f_{14}. Следовательно в $\mathcal{F}_{14}$ не содержатся фреймы e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{19}, e_8 и e_5. Внутри последнего списка фреймов существуют p-морфизмы: $e_1 \to e_5$, $e_{15} \to e_5$, $e_{19} \to e_8$. В списке остаются e_{11}, e_{12}, e_{16}, e_{17}, e_8, e_5.

1. $\Diamond N_1 \wedge \Diamond N_2 \wedge \Diamond N_3 \wedge \Diamond(N_2 \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2') \to (\Diamond(N_1 \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2') \vee$
$\vee \Diamond(N_3 \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2')$.

Положим $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$. Если положить $V(n_1) = \{b_2\}$, $V(n_2) = \{b_1\}$, $V(n_3) = \{b_3\}$, то формула опровергается на e_{11}. Если положить

$V(n_1) = \{b_1\}$, $V(n_2) = \{b_2\}$, $V(n_3) = \{b_3\}$, то формула опровергается на e_{12}. Если посылка формулы выполнена на f_{14}, то в первом слое выполняются формулы M_1' и M_2'. Так как во втором слое есть по крайней мере две точки, из которых достижим весь первый слой, то заключение формулы также выполняется.

2. $\Diamond(\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2) \wedge \Diamond(\Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3) \to \Diamond(\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3)$.

Формула опровергается на фрейме e_{16} при означивании $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$, $V(m_3) = \{c_3\}$. В то время как на f_{14} формула истинна, так как при выполнении посылки на первом слое будут выполняться все формулы M_1, M_2, M_3 и первый слой достижим из b_3.

3. (f_4.2) $\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3 \to [\Diamond(\Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3 \wedge \neg\Diamond M_1) \vee \Diamond(\Diamond M_1 \wedge$ $\wedge \Diamond M_3 \wedge \neg\Diamond M_2) \vee \Diamond(\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \neg\Diamond M_3)]$.

Данная формула опровергается на e_{17} и e_8 (п.5.4 и п.5.11). Покажем, что формула истинна f_{14}. Если посылка формулы выполняется на f_{14}, то формулы M_1, M_2, M_3 выполняются на точках c_1, c_2, c_3 взятых в некотором порядке. Поскольку из точки b_1 достижимы только точки c_1, c_2, то на ней будет выполняться одна из формул $\Diamond M_2 \wedge \Diamond M_3 \wedge \neg\Diamond M_1$, $\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_3 \wedge \neg\Diamond M_2$, $\Diamond M_1 \wedge \Diamond M_2 \wedge \neg\Diamond M_3$ и, следовательно, заключение формулы будет выполняться в корне.

4. (f_5.2) $\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2' \wedge \Box^2(M_1' \vee M_2') \to \Diamond(\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2')$.

Формула опровергается на фрейме e_5 (п.5.5). Докажем, что данная формула также истинна на фрейме f_{14}. Если посылка формулы выполняется в корне фрейма f_{14}, то обе формулы M_1', M_2' выполняются в первом слое c_1, c_2, c_3, который достижим из двух точек второго слоя.

Приведённое выше доказывает следующую лемму.

Лемма 15 *Набор формул: A1-A16, формула (1.14) из раздела 4,* f_{14}.1, f_{14}.2, f_4.2 *и* f_5.2 *– аксиоматизирует логику замкнутого класса, порождён-*

ного фреймом f_{14}, т.е. формулы истинны на данном фрейме и фреймах, принадлежащих его замкнутому классу, в то время как на фреймах, не лежащих в замкнутом классе опровергается хотя бы одна формула из набора.

5.15 Аксиоматизация класса $\mathcal{F}_{15}$

Фрейм f_{15} имеет p-морфные образы e_{14} ($c_1 \to c_2$), e_{19} ($b_1 \to b_2$), e_9, e_7, e_8, e_4, e_3. Фрейм e_2 является открытым подфреймом фрейма f_{15}. Следовательно в $\mathcal{F}_{15}$ не содержатся следующие фреймы: e_{10}, e_{11}, e_{12}, e_{13} e_{15}, e_{16}, e_{17}, e_{18}, e_5, e_6. Внутри последнего списка фреймов существуют p-морфизмы: $e_{10} \to e_5$, $e_{11} \to e_6$, $e_{13} \to e_6$, $e_{15} \to e_6$, $e_{16} \to e_6$, $e_{17} \to e_6$, $e_{18} \to e_6$. В списке остаются e_{12}, e_5, e_6.

1. $\Diamond N_1 \wedge \Diamond N_2 \wedge \Diamond N_3 \wedge \Diamond(N_2 \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2') \to (\Diamond(N_1 \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2') \vee$ $\vee \Diamond(N_3 \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2')$.

Если ввести означивание $V(m_1) = \{c_1\}$, $V(m_2) = \{c_2\}$, $V(n_1) = \{b_1\}$, $V(n_2) = \{b_2\}$, $V(n_3) = \{b_3\}$, то формула опровергается на e_{12}. Посылка формулы может быть выполнена на f_{15} при условии, что формулы M_1', M_2' выполняются в первом слое. Но поскольку первый слой достижим из всех точек второго слоя, то заключение также будет выполняться.

2. $\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2' \wedge \Diamond N_1' \wedge \Diamond N_2' \to [\Diamond(N_1' \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2') \wedge \Diamond(N_2' \wedge \Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2')]$.

Данная формула опровергается на e_6, так как из точек второго слоя этого фрейма достижима только одна из точек первого слоя. Истинна на f_{15}, так как из точек второго слоя этого фрейма достижим весь первый слой и формулы N_1', N_2' выполняются в различных точках второго слоя.

3. (f_5.2) $\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2' \wedge \Box^2(M_1' \vee M_2') \to \Diamond(\Diamond M_1' \wedge \Diamond M_2')$.

Формула опровергается на фрейме e_5 (п.5.5).

Покажем, что данная формула в то же время истинна на f_{15}. Если посылка формулы выполняется в корне фрейма f_{15}, то формул M_1', M_2' вы-

полняются в первом слое, который достижим из всех точек второго слоя. Следовательно, формула истинна на f_{15}.

Приведённое выше доказывает следующую лемму.

Лемма 16 *Набор формул: A1-A16, формула (1.15) из раздела 4,* $f_{15}.1$, $f_{15}.2$ *и* $f_5.2$ *– аксиоматизирует логику замкнутого класса, порождённого фреймом* f_{15}*, т.е. формулы истинны на данном фрейме и фреймах, принадлежащих его замкнутому классу, в то время как на фреймах, не лежащих в замкнутом классе опровергается хотя бы одна формула из набора.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе были получены следующие результаты:

1. Построены замкнутые классы фреймов глубины 3 и ширины 3, порядка 7;

2. Введены дополнительные формулы, аксиоматизирующие логики, порождаемые каждым из построенных классов;

3. Доказаны леммы об аксиоматизации рассмотренных классов;

Полученные результаты имеют теоретическое значение и могут быть использованы при дальнейшем изучении расширений логики GL.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Chagrov A., Zacharyaschev M. Modal Logic, Oxford University Press. 1997. 624 p.

2. Чагров А.В. Алгоритмическая проблема аксиоматизации табличной нормальной модальной логики, Логические исследования. 2002. №9. с.251-263.

3. Rybakov, V.V. Admissibility of logical inference rules, Krasnoyarsk: KSU. 1996. 624 p.

Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
«СИБИРСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и фундаментальной информатики
Базовая кафедра вычислительных и информационных технологий

УТВЕРЖДАЮ
Заведующий кафедрой
_____ / В. В. Шайдуров

«17» июня 2019 г.

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

АКСИОМАТИЗАЦИЯ ТАБЛИЧНЫХ ЛОГИК ГЁДЕЛЯ-ЛЁБА

Направление 02.04.01 Математика и компьютерные науки

Магистерская программа 02.04.01.01 Математическое и компьютерное моделирование

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент _____ / М.И. Голованов
17.06.19

Выпускник _____ / И.А. Марковская
17.06.19

Красноярск 2019