

## ДИСКРЕТНАЯ МАТЕМАТИКА. ТЕОРИЯ ОТНОШЕНИЙ В ПРИМЕРАХ И ЗАДАЧАХ

Селантьев П.С.,

Научный руководитель: д.пед.наук Осипова С.И.

*Сибирский федеральный университет*

### Введение

Дискретная, или конечная, математика – это раздел математики, занимающийся изучением свойств объектов конечного характера. Дискретная математика всегда оставалась наиболее динамичной областью знаний. В настоящее время наиболее широко методы дискретной математики применяются в компьютерных технологиях.

Одним из разделов дискретной математики является теория отношений которая описывает объекты из самых разных наук.

Итак, рассмотрим эти отношения.

### Отношение эквивалентности

Слово эквивалентно в обычном языке означает “одинаково”, “равносильно”. Обычно для обозначения эквивалентности используется знак “ $\sim$ ”. Можно заметить, что свойства трех первых групп выполняются без отрицательных приставок.

Действительно, если  $a \sim b$ , то и  $b \sim a$  (симметрия). Если  $a \sim b$  и  $b \sim c$ , то и  $a \sim c$  (транзитивность). Каждый элемент эквивалентен самому себе (рефлексивность).

**Определение 1.** Отношение, заданное на носителе  $A$ , называется *эквивалентностью*, если оно рефлексивно, симметрично и транзитивно.

*Например*, отношение “жить в одном городе” на множестве людей – эквивалентность.

Самое наглядное и всем знакомое отношение эквивалентности — разделение контингента учащихся конкретной школы на классы.

Более сложный пример, но совершенно жизненно важный: Когда врач выписывает вам лекарство, он, фактически в рецепте указывает класс эквивалентных лекарств, он не может указать совершенно конкретный экземпляр упаковки таблеток или ампул. То есть всевозможные лекарства разбиты на классы отношением эквивалентности. Если бы не этот факт, современная медицина просто не была бы возможна. Таким образом, всевозможные рецепты салатов и коктейлей, ГОСТы и классификаторы также определяют жизненно важные отношения эквивалентности. Отношения эквивалентности заполняют всю нашу жизнь, а не являются абстрактной забавой математиков.

### Отношение толерантности

Эквивалентные объекты можно считать похожими, но само понятие “сходство” не есть эквивалентность. Проверим это по определению. Сходство рефлексивно (объект похож на самого себя), симметрично (если  $a$  похоже на  $b$ , то и  $b$  похоже на  $a$ ). Но вот с транзитивностью – проблемы. Простой этому пример, в цепочке КИТ-КОТ-КОМ-ДОМ соседние слова похожи друг на друга (отличаются одной буквы), но крайние не имеют ничего общего.

Отношение толерантности часто используется для описания отношения сходства между реальными объектами, отношений знакомства или дружбы между людьми. Во всех этих случаях свойство транзитивности не предполагается обязательно быть выполненным. В самом деле, Иванов может быть знаком с Петровым, Петров — с Сидоровым, но при этом Иванов и Сидоров могут быть не знакомы между собой.

**Определение 2.** Отношение, заданное на носителе  $A$ , называется *толерантностью*, если оно рефлексивно и симметрично. Обозначают толерантность буквой  $T$ .

Примеры толерантности: сходство, дружба, родство.

В толерантности мы видим, что элементы уже не разбиваются на классы, как в случае эквивалентности. Однако они по-прежнему группируются в подмножества, внутри которых все элементы взаимосвязаны.

**Определение 3.** Пусть на носителе  $A$  задана толерантность  $T$ . Подмножество  $Z$  с  $A$  называется *ядром* данной толерантности, если все его элементы попарно связаны между собой.

Простейшие ядра состоят из одного элемента, так как в силу рефлексивности каждый такой элемент связан с самим собой.

**Определение 4.** Ядро называется *максимальным*, если оно не входит ни в какое другое ядро той же толерантности.

Ядра для толерантности - то же, что классы для эквивалентности. Однако, в отличие от классов, они пересекаются между собой и не образуют разбиения.

**Определение 5.** Набор множеств  $\{A_i\}$  образует *покрытие* множества  $A$ , если  $A$  входит в объединение  $A_i$ .

### Порядок отношений

Порядок, в отличие от предыдущих отношений, называется обычным словом русского языка. С одной стороны это удобно, так как сразу ясно о чем речь. С другой стороны, не все то, что считается порядком в теории отношений, воспринимается таковым в обыденном сознании.

**Определение 6.** Отношение заданное на носителе  $A$ , называется *строгим порядком*, если оно асимметрично и транзитивно. Обозначать порядок будем буквой  $\pi$ .

Самый известный пример строгого порядка – отношение “ $>$ ” для чисел. Другой пример – понятие “предок”.

**Определение 7.** Отношение, заданное на носителе  $A$ , называется *нестрогим порядком*, если оно антисимметрично и транзитивно. Примерами нестрогих порядков являются “ $\leq$ ” или “ $\geq$ ”.

### Максимальные и наибольшие элементы

**Определение 8.** Пусть на множестве  $A$  задан порядок “ $>$ ” (читается “предпочтительнее”). Говорят, что элемент  $a \in A$  является *максимальным* относительно этого порядка, если не существует элемента, более предпочтительного, чем он.

Элемент называется *наибольшим* относительно “ $>$ ”, если он предпочтительнее любого другого элемента из  $A$ .

### Вложенные отношения

Мы рассмотрели каждое отношение отдельно от других. Теперь сравним отношения между собой. Самый простой способ – рассматривать их как множества (пар элементов). Ну а множества могут быть вложены друг в друга.

Например, отношение “мать”, заданное на множестве людей, входит в отношение “родители”, а “меньше” – в “меньше или равно”. Если  $r \subset T$ , То будем говорить, что  $r$ -сужение  $T$ , а  $T$ -расширение  $r$ .

Подчеркнем, что при сравнении отношений мы учитываем не элементы носителя, а пары. Например, каждый учитель был чьим-то учеником, но это не значит, что отношение “учитель” входит в отношение “ученик”.

**Задачи (В докладе приводится решение ряда задач).**

Задача 1. (Эквивалентность). Дан граф некоторого отношения (рис.1). Дополните его минимальным числом стрелок так, чтобы оно превратилось в эквивалентность.

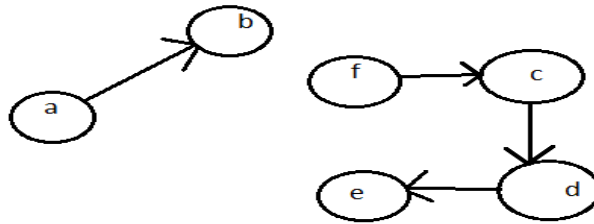


Рисунок 1.

Задача 2. (Толерантность). Покажите, что отношение “быть синонимами” является толерантностью. Является ли оно эквивалентностью?

Задача 3. (Сколько ядер?). Толерантность (Т) задана таблицей. Перечислите все ее ядра.

Т	a	b	c	d	e	f	g
a	+	+	+	+			+
b	+	+		+		+	+
c	+		+	+			
d	+	+	+	+		+	+
e					+		
f		+		+		+	
g	+	+		+			+

Задача 4. (Порядок). Что такое опушка? Это край леса. Слова “край” и “лес” используются для объяснения слова “опушка”. Даны слова: учебник, школа, приобретать, учиться, знание, учащийся, начинать, школьник, иметь. Составьте схему, в которой стрелки идут от объясняющих слов к объясняемому.

Задача 5. П>Р>О<Е<К<Т<И<Р>О>В>А>Н<И>Е. Решите этот ребус, в котором каждая буква обозначает некоторую цифру (однозначное число), причем разные буквы – разные цифры.