Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2009, 2(3), 305-311

УДК 517.9

Приближения множеств решений параметрическими множествами

Борис С.Добронец*

Институт космических и информационных технологий,
Сибирский федеральный университет,
Киренского 26, Красноярск, 660074,
Россия

Получена 21.05.2009, окончательный вариант 20.06.2009, принята к печати 10.07.2009

В статье рассматриваются приближения множеств решений задач с интервальными входными данными специальными параметрическими множествами. Приближения основаны на объединении геометрических тел, определяемых вектором параметров. Приведены примеры приближения множества решений для системы линейных алгебраических уравнений и задачи Коши для системы ОДУ.

Ключевые слова: интервальный анализ, множества решений, параметрические множества, системы линейных алгебраических уравнений, динамические системы, эффект обертывания.

Введение

Интервальная математика традиционно использует для приближения множеств решений интервальные вектора или параллелотопы (n-мерные параллелепипеды со сторонами, параллельными координатным осям).

Интервальные вектора часто дают лишь весьма приближенное представление о виде множества решения. Невозможность представить достаточно точно множество решений снижает эффективность применения интервальных методов и приводит к таким эффектам, как "эффект обертывания" (wrapping effect). Это влечет неоправданно сильное расширение аппроксимаций множества решений задач Коши для систем ОДУ. В настоящее время существует постоянная потребность в повышении точности приближений множеств решений.

Стремление избежать подобных эффектов приводит к использованию подходов, которые для приближения множеств решений применяют различные геометрические тела: шары, эллипсоиды, параллелепипеды, многогранники и т. п.

В работе [1] рассмотрены приближения областями, зависящими от параметров, в частности параллелепипедами. В работе [2] приведено использование многогранников для построения границ ошибок решений задач Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. В работах [3, 4, 5] рассмотрены приближения множеств решений систем ОДУ эллипсоидами, в [6] для представления множеств решений используются зонотопы [zonotope]. Все рассмотренные выше множества выпуклые, однако часто необходимы более общие представления. В [7] множества решений представляются объединением параллелотопов, в [8] специальные приближения представлены как объединения геометрических объектов — шаров и параллелепипедов.

*e-mail: BDobronets@sfu-kras.ru

Возьмем примеры геометрических тел Ω из R^n. Шары S — наиболее простые из геометрических тел, они характеризуются своим центром $x_0 \in R^n$ и радиусом r: $S(x_0, r) = \{x|\ |x-x_0| \leqslant r\}$. Параллелепипеды однозначно определяются одной из вершин x_0 и ребрами e_i: $P_1 = \{x|x = x_0+\sum e_i t_i, t_i \in [0,1]\}$. Эллипсоиды задаются своим центром и симметричной, положительно определенной матрицей A и радиусом r: $S = \{x|\ (A(x-x_0),(x-x_0)) \leqslant 1\}$.

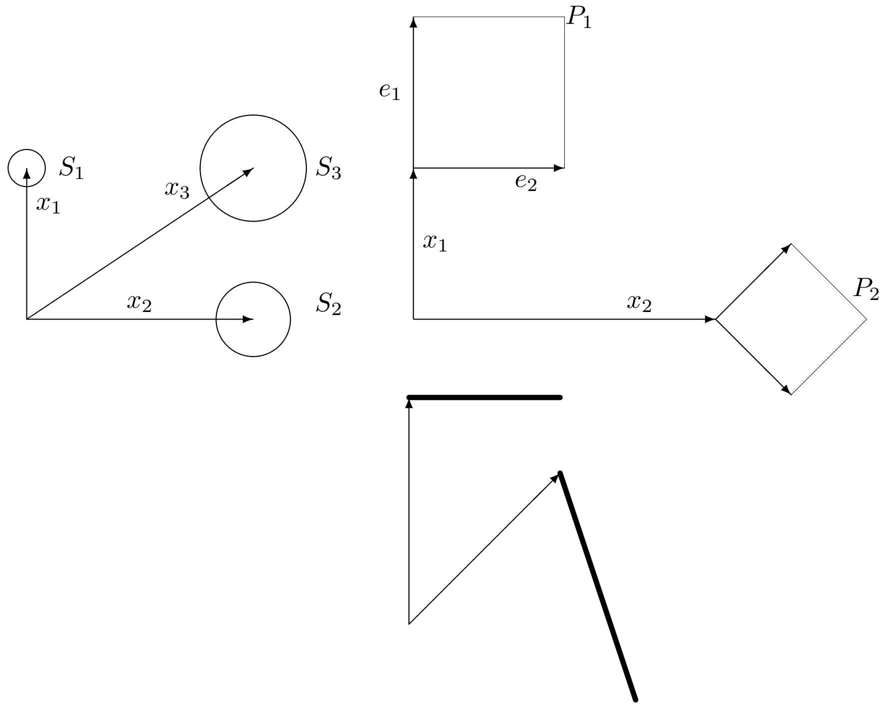

Рис. 1. Примеры параметрических множеств

Таким образом, для задания шара необходим $n+1$ параметр, для эллипсоида — $n+n(n+1)/2$ параметр и соответственно для параллелепипеда — $n(n+1)$ параметр. Далее x_0 будем называть точкой привязки геометрического тела.

Будем считать, что положение геометрического тела определяется точкой привязки и некоторым вектором параметров $p \in R^m$.

На рис. 1 представлены примеры таких множеств. Здесь вектора x_1, x_2, x_3 определяют точки привязки.

Перейдем к операциям над параметрическими множествами. Пусть $\mathcal{L}$ — линейное пространство и пусть $x, y \in \mathcal{L}$, тогда определены операции сложения и умножения на число: $\alpha x + \beta y \in \mathcal{L}$. Следовательно, можно естественным образом распространить эти операции и на параметрические множества $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathcal{L}$: $\alpha\Omega_1 + \beta\Omega_2 = \{\alpha x + \beta y | x \in \Omega_1, y \in \Omega_2\}$.

На рис. 2 приведены примеры сложения различных множеств. В случае шаров $S_i(x_i, r_i)$: $S_3(x_3, r_3) = S_1(x_1, r_1) + S_2(x_2, r_2)$, $x_3 = x_1 + x_2$, $r_3 = r_1 + r_2$, $P_3 = P_1 + P_2$.

Однако сумма двух эллипсоидов или параллелепипедов не есть эллипсоид или параллелепипед. Таким образом, множество эллипоидов, параллелепипедов и, как частный случай, множество отрезков не замкнуто относительно операции сложения.

Особо стоит вопрос о замыкании операции сложения $\Omega_1 + \Omega_2$. Результат сложения аппроксимируют элементом параметрического множества Ω_3 таким образом, чтобы $\Omega_1 + \Omega_2 \subseteq \Omega_3$ и объем Ω_3 был как можно меньше.

Заметим, что достоинством использования рассмотренных выше параметрических множеств является их достаточно простое описание, недостаток — низкая точность приближений. Стремление избавиться от этого недостатка привело к понятию *объединенного параметрического множества.*

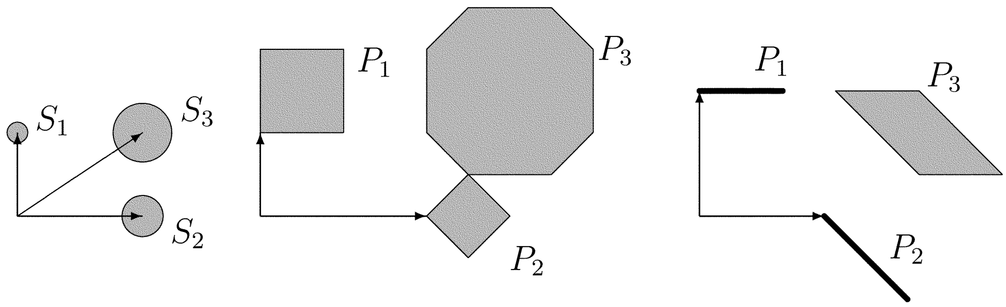

Рис. 2. Примеры сложения множеств

Рассмотрим один из возможных вариантов построения объединенного параметрического множества из R^n. Представим его в виде объединения $\Omega(z, r)$ из R^{n-1}:

$$\mathcal{X} \subseteq \bigcup_{\eta} \Omega(z(\eta), r(\eta)).$$

Здесь $z \subset R^n$ — гладкая параметрическая кривая, значения $z(\eta)$ определяют точки привязки. Для однозначного задания будем считать, что $\Omega(z(\eta), r(\eta))$ лежит в гиперплоскости Γ: $(x - z(\eta), \nu(\eta))$, в частности, можно положить $\nu(\eta) = z'(\eta)$.

Функции z, r в зависимости от представления характеризуются своими наборами параметров. Таким образом, определим понятие *параметрического множества* $\Omega(p)$:

$$\Omega(p) = \bigcup_{\eta} \Omega(z(\eta), r(\eta)),$$

где $p \in R^m$ — вектор параметров.

1. Построение объединенных параметрических множеств

В каждом конкретном случае выбор геометрического тела $\Omega(z, r)$ и кривой z определяется видом $\mathcal{X}$, свойствами аппроксимации и простотой использования.

Таким образом, на первом шаге зададим параметрическую кривую $z(\eta) \in R^n$, $\eta \in [\eta_1, \eta_2]$. Зафиксируем η, построим плоскость Γ: $(x - z(\eta), \nu)$, где $\nu = x_0'(\eta)$ — вектор, касательный к кривой z. Далее на плоскости Γ зададим систему координат с началом в точке $z(\eta)$ и базисными векторами $e_i(\eta)$. Далее, пусть $\mathcal{X}_\eta = \mathcal{X} \cap \Gamma$, и определим тело $\Omega(z, r)$ с параметрами r такое, что $\Omega(z, r) \supseteq \mathcal{X}_\eta$.

Безусловно, это самая важная часть процедуры построения приближений, и ее конкретная реализация зависит от исходной задачи. В частности, при приближении множеств решений систем линейных алгебраических уравнений можно пользоваться известными свойствами этих множеств.

Рассмотрим интервальную систему линейных алгебраических уравнений

$$\boldsymbol{A}x = \boldsymbol{b}, \tag{1}$$

где $\boldsymbol{A} \in \boldsymbol{R}^{n\times n}$, а $\boldsymbol{b} \in \boldsymbol{R}^n$. Предположим также, что интервальная матрица системы (1) регулярна.

Решением задачи (1) будем называть множество

$$\mathcal{X} = \{x | Ax = b, \quad A \in \boldsymbol{A}, b \in \boldsymbol{b}\}.$$

Множество $\mathcal{X}$ может быть описано следующим образом [9]:

$$\mathcal{X} = \{x | x \in R^n, \boldsymbol{A}x \cap \boldsymbol{b} \neq \varnothing\} \tag{2}$$

или

$$\{x | x \in R^n, 0 \in \boldsymbol{A}x - \boldsymbol{b}\}.$$

Для простоты изложения предположим, что $n = 3$ и $\mathcal{X}$ полностью содержится в одном квадранте, $\mathcal{X} \subset R^3$. В качестве геометрических тел выберем круги $S(x_0, r)$.

Будем считать, что кривая $z(\eta) \in R^3$, $\eta \in [\eta_1, \eta_2]$ задана. Зафиксируем η, построим плоскость Γ: $(x - z(\eta), \nu)$, где $\nu = x_0'(\eta)$ — вектор, касательный к кривой z. Для определения радиуса круга введем на Γ полярную систему координат: (r, φ). Тогда $z_1 = r\cos(\varphi), z_2 = r\sin(\varphi)$ и $x = z_1 e_1 + z_2 e_2$. Фиксировав φ, найдем верхнюю границу $\bar{r}(\varphi)$, при котором выполнено условие (2). Далее определим $R(\eta) = \max_{[0,2\pi]} \bar{r}(\varphi)$.

Таким образом, пара $(R(\eta), z(\eta))$ определяет параметрическое множество $\Omega(z, R) = \bigcup_\eta S(\eta, R(\eta)) \supseteq \mathcal{X}$.

Несколько иначе выглядит построение множества $\Omega(z, r)$ для задачи Коши для систем ОДУ.

Рассмотрим следующую систему:

$$\begin{aligned} x_i' &= f_i(t, x, k), \quad i = 1, ..., n, t \in (0, l), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \tag{3}$$

где $x_0 \in R^n$ — вектор начальных значений, $x_0 \in \boldsymbol{x}_0$; $k \in R^m$ — вектор параметров, $k \in \boldsymbol{k}$; $x \in R^n$ — вектор неизвестных.

Далее будем считать, что x есть функция t, k, x_0:

$$x = x(t, k, x_0). \tag{4}$$

Обозначим через $\mathcal{X}(t)$ множество решений системы ОДУ:

$$\mathcal{X}(t) = \{x(t, k, x_0) | x_0 \in \boldsymbol{x}_0, k \in \boldsymbol{k}\}.$$

Рассмотрим задачу оценки в фазовом пространстве множества решений $\mathcal{X}(t)$ системы обыкновенных дифференциальных уравнений множеством $\Omega(p(t))$. В этом случае множество Ω будет зависеть от t. Каждому множеству $\Omega(p(t))$ сопоставим вектор параметров $p(t)$.

Будем считать, что начальное состояние системы (3) можно представить $\boldsymbol{x}(0) \subseteq \Omega(p(0))$.

Предположим, что в некоторый момент времени t нам известно множество $\Omega(p(t))$, содержащее множество решений $\mathcal{X}(t)$ исходной системы ОДУ. Рассмотрим задачу построения множества $\Omega(p(t + \tau))$

$$\Omega(p(t + \tau)) \supseteq \mathcal{X}(t + \tau).$$

Построим приближенно $\mathcal{X}^\tau(t+\tau)$, используя методы численного интегрирования, например метод Эйлера:

$$\mathcal{X}^\tau(t+\tau,\boldsymbol{k},x_0) \supseteq \{x^\tau(t+\tau)|x^\tau(t+\tau) = x(t)+\tau f(t,x(t),k), x(t)\in\Omega(p(t)), k\in\boldsymbol{k}\}.$$

Ясно, что в данном случае граница $\mathcal{X}^\tau(t+\tau)$ отличается от истинной на величину, не превышающую $O(\tau^2)$. Таким образом, зная в некоторый момент времени t $\Omega(p(t)$, можем построить $\Omega(p(t+\tau))$.

Существует известный произвол при построении подобных множеств, обычно их строят таким образом, чтобы они имели наименьший объем.

Если для любых $t,\tau>0$ известны вектора $p(t)$ и $p(t+\tau)$, описывающие поведение $\Omega(p(t)$, то можно предельным переходом построить систему ОДУ, описывающую поведение p:

$$p_i'(t) = \lim_{\tau\to 0}(p_i(t+\tau)-p_i(t))/\tau = g(t,p).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} p' &= g(t,p), \\ p(0) &= p_0. \end{aligned} \tag{5}$$

2. Примеры

Пример 1. Пусть необходимо решить систему интервальных линейных алгебраических уравнений

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$

с матрицей $\boldsymbol{A}$ и правой частью $\boldsymbol{b}$.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} [0,2] \\ 0 \\ [0,2] \end{pmatrix}. \tag{6}$$

Как нетрудно убедиться, минимальный интервальный вектор, содержащий множество ее решений, — $\boldsymbol{x} = ([0,2],[0,2],[0,2])^T$.

Множество решений данной системы можно описать так. Определим параметрическую кривую z следующим образом:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} t, \quad t\in[0,1].$$

Круги в нашем случае вырождаются в отрезки, точка привязки — середина отрезка. Определим радиусы:

$$R(t) = \begin{cases} 2t, t\in[0,1/3], \\ -t+1, t\in[1/3,1]. \end{cases}$$

Множество решений системы (6) лежит в плоскости векторов $e_1=(2,2,2)$, $e_2=(-1,0,1)$ и может быть представлено в следующем виде (рис. 3).

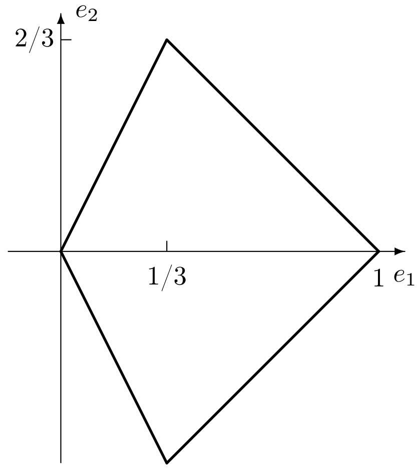

Рис. 3. Множество примера 1

Пример 2. В качестве еще одного примера рассмотрим линейную систему ОДУ с интервальным параметром $\boldsymbol{k}$:

$$x_1' = kx_2,$$
$$x_2' = -kx_1, \quad k \in \boldsymbol{k} = [1, 2],$$
$$x(0) = x_0 \in [-\varepsilon, +\varepsilon] \times [1-\varepsilon, 1+\varepsilon].$$

Для построения множества $\Omega(z, r)$ перейдем в полярную систему координат. В качестве z выберем r =const, $\varphi \in [\underline{\varphi}, \overline{\varphi}]$, геометрические тела — отрезки, перпендикулярные z, точки привязки — их середины. Представим

$$\Omega(\varphi(0), r(0)) = [\underline{\varphi_0}, \overline{\varphi_0}] \times [\underline{r_0}, \overline{r_0}].$$

Система ОДУ для $r, \underline{\varphi}, \overline{\varphi}$ выглядит так:

$$\begin{aligned} r' &= 0, \\ \underline{\varphi}' &= \underline{k}, \\ \overline{\varphi}' &= \overline{k}, \end{aligned}$$

с начальными данными

$$\begin{aligned} r(0) &= (\underline{r_0} + \overline{r_0})/2, \\ \underline{\varphi}(0) &= \underline{\varphi_0}, \\ \overline{\varphi}(0) &= \overline{\varphi_0}. \end{aligned}$$

Таким образом, хотя полученное представление множества решений отличается от оптимального, эффект упаковывания полностью отсутствует.

В заключение рассмотрим еще одно представление для множества решений $\Omega(z, r)$. В качестве z выберем r =const, $\varphi \in [\underline{\varphi}, \overline{\varphi}]$, геометрические тела — квадраты $[-h, h]^2$ со стороной, перпендикулярной z, точки привязки — середины квадратов. В этом случае система ОДУ для r, h, φ выглядит как

$$\begin{aligned} r' &= 0, \\ h' &= 0, \\ \underline{\varphi}' &= \underline{k}, \\ \overline{\varphi}' &= \overline{k}, \end{aligned}$$

с начальными данными

$$\begin{aligned} r(0) &= 1, \\ h(0) &= \varepsilon, \\ \underline{\varphi}(0) &= \pi/2 \\ \overline{\varphi}(0) &= \pi/2. \end{aligned}$$

В этом случае получено оптимальное представление для множества решений.

Список литературы

[1] B.S.Dobronets, On some two-sided methods for solving systems of ordinary differential equations, *Interval Computations,* **1(3)**(1992), 6-19.

[2] D.P.Davey, N.F.Stewart, Guaranteed error bounds for the initial value problem using polytope arithmetic, *BIT*, **16**(1976), 257-268.

[3] K.G.Guderley, C.L.Keller, A basic theorem in the computation of ellipsoidal error bounds, *Numer. Math.,* **19**(1972), 218-229.

[4] A.Neumaier, The wrapping effect, ellipsoid arithmetic, stability and confidence regions, *Computing [Suppl.]*, **9**(1993), 175-190.

[5] Ф.Л.Черноусько, Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов, М., Наука, 1988.

[6] W.Kühn, Rigorously Computed Orbits of Dynamical Systems without the Wrapping Effect, *Computing*, **61**(1998), 47-67.

[7] Л.Жолен, М.Кифер, О.Дидри, Э.Вальтер, Прикладной интервальный анализ, М.–Ижевск, Институт компьютерных исследований, 2007.

[8] Б.С.Добронец, С.Л.Рощина, Специальные приближения множеств решений систем ОДУ с интервальными параметрами, *Вопросы математического анализа,* Красноярск, КГТУ, (2002), №5, 12-17.

[9] H.Beeck, Über die Struktur und Abschätzungen der Lösungsmenge von linearen Gleichungssystemen mit Intervallkoeffizienten, *Computing,* **10**(1972), 231-244.

Approximation of the Sets of Solutions by Parametric Sets

Boris S.Dobronets

We consider approximation of the sets of solutions of problems with interval initial data by special parametric sets. The approximations are based on the union of geometric bodies determined by a vector of parameters. Examples of approximation are given for the sets of solutions to a system of linear algebraic equations and dynamical systems.

Keywords: interval analysis, sets of solutions, parametric sets, systems of linear algebraic equations, dynamical systems, wrapping effect.