Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2009, 2(3), 288-297

УДК 517.9

Задача идентификации коэффициентов при младших членах в системе составного типа

Полина Ю.Вячеслалова
Роман В.Сорокин*
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный 79, Красноярск, 660041
Россия

Получена 18.04.2009, окончательный вариант 20.05.2009, принята к печати 30.06.2009

В работе доказана однозначная разрешимость задачи идентификации четырех коэффициентов при младших членах в системе составного типа в случае данных Коши.

Ключевые слова: задачи идентификации коэффициентов, обратные задачи, уравнения в частных производных, системы составного типа, метод слабой аппроксимации.

В работе исследуется задача идентификации коэффициентов при младших членах в системе составного типа. Системы такого вида описывают колебания среды с учетом влияния теплопроводности [1, 2], различные линеаризованные задачи механики неоднородных жидкостей. Задачи идентификации функции источника в системах составного типа исследовались в работах Ю.Я.Белова, Т.Н.Шипиной, Р.В.Сорокина [3, 4, 5], при этом результаты были получены в классах функций, быстро убывающих на бесконечности по выделенной пространственной переменной. В данной работе результат получен в классах гладких ограниченных функций.

В полосе $G_{[0,T]} = \{(t,x) \mid 0 \leqslant t \leqslant T,\, x \in E_1\}$ рассматривается задача определения действительнозначных функций $\big(u^1(t,x), u^2(t,x), b_{11}(t), b_{12}(t), b_{21}(t), b_{22}(t)\big)$, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} u^1_t(t,x) + a_{11}(t)u^1_x(t,x) + \sum\limits_{k=1}^{2} b_{1k}(t)u^k(t,x) = \nu(t)u^1_{xx}(t,x) + f_1(t,x), \\ u^2_t(t,x) + a_{22}(t)u^2_x(t,x) + \sum\limits_{k=1}^{2} b_{2k}(t)u^k(t,x) = f_2(t,x), \end{cases} \tag{1}$$

начальному условию

$$u^k(0,x) = u^k_0(x), \qquad k = 1,2, \tag{2}$$

и условиям переопределения

$$u^k(t,0) = \alpha_k(t), \qquad u^k(t,l) = \beta_k(t), \quad k = 1,2. \tag{3}$$

Считаем, что выполнены условия согласования

$$u^k_0(0) = \alpha_k(0), \qquad u^k_0(l) = \beta_k(0), \quad k = 1,2. \tag{4}$$

Здесь $a_{kk}(t)$, $f_k(t,x)$, $u^k_0(x)$, $\alpha_k(t)$, $\beta_k(t)$ $(k = 1,2)$, $\nu(t)$ — заданные действительнозначные непрерывные в $G_{[0,T]}$ функции.

*e-mail: rsor@mail.ru

Пусть выполняется соотношение:

$$|\alpha_1(t)\beta_2(t)-\alpha_2(t)\beta_1(t)|\geqslant\delta>0,\quad t\in[0,T],\quad \delta-\mathrm{const}. \tag{5}$$

Приведем обратную задачу (1)–(3) к некоторой вспомогательной прямой задаче. Для этого положим в системе (1) $x=0$, а затем $x=l$.

$$\begin{cases} b_{11}(t)\alpha_1(t)+b_{12}(t)\alpha_2(t)=\nu(t)u^1_{xx}(t,0)+f_1(t,0)-a_{11}(t)u^1_x(t,0)-\alpha_1'(0),\\ b_{21}(t)\alpha_1(t)+b_{22}(t)\alpha_2(t)=f_2(t,0)-a_{22}(t)u^2_x(t,0)-\alpha_2'(0),\\ b_{11}(t)\beta_1(t)+b_{12}(t)\beta_2(t)=\nu(t)u^1_{xx}(t,l)+f_1(t,l)-a_{11}(t)u^1_x(t,l)-\beta_1'(l),\\ b_{21}(t)\beta_1(t)+b_{22}(t)\beta_2(t)=f_2(t,l)-a_{22}(t)u^2_x(t,l)-\beta_2'(l). \end{cases} \tag{6}$$

Рассмотрим (6) как систему линейных алгебраических уравнений относительно $b_{11}(t)$, $b_{12}(t)$, $b_{21}(t)$, $b_{22}(t)$ с определителем

$$\begin{vmatrix} \alpha_1(t) & \alpha_2(t) & 0 & 0\\ 0 & 0 & \alpha_1(t) & \alpha_2(t)\\ \beta_1(t) & \beta_2(t) & 0 & 0\\ 0 & 0 & \beta_1(t) & \beta_2(t) \end{vmatrix}=(\alpha_1(t)\beta_2(t)-\alpha_2(t)\beta_1(t))^2.$$

Условие (5) гарантирует существование единственного решения $(b_{11}(t), b_{12}(t), b_{21}(t), b_{22}(t))$ системы (6) при всех t. Разрешая (6) методом Крамера, получаем

$$\begin{aligned} b_{11}(t)&=A_1u^1_{xx}(t,l)+A_2u^1_x(t,l)+A_3u^1_{xx}(t,0)+A_4u^1_x(t,0)+A_5,\\ b_{12}(t)&=B_1u^1_{xx}(t,0)+B_2u^1_x(t,0)+B_3u^1_{xx}(t,l)+B_4u^1_x(t,l)+B_5.\\ b_{21}(t)&=C_1u^2_x(t,l)+C_2u^2_x(t,0)+C_3,\\ b_{22}(t)&=D_1u^2_x(t,0)+D_2u^2_x(t,l)+D_3. \end{aligned}$$

Здесь

$$\gamma(t)=\alpha_1(t)\beta_2(t)-\alpha_2(t)\beta_1(t),$$

$$A_1(t)=\frac{\nu(t)\beta_2(t)}{\gamma(t)},\qquad A_2(t)=\frac{-a_{11}(t)\beta_2(t)}{\gamma(t)},$$

$$A_3(t)=\frac{-\nu(t)\beta_4(t)}{\gamma(t)},\qquad A_4(t)=\frac{a_{11}(t)\beta_4(t)}{\gamma(t)},$$

$$A_5(t)=\frac{(f_1(t,l)-\beta_3'(l))\beta_2(t)-(f_1(t,0)-\beta_1'(0))\beta_4(t)}{\gamma(t)},$$

$$B_1(t)=\frac{\nu(t)\beta_3(t)}{\gamma(t)},\qquad B_2(t)=\frac{-a_{11}(t)\beta_3(t)}{\gamma(t)},$$

$$B_3(t)=\frac{-\nu(t)\beta_1(t)}{\gamma(t)},\qquad B_4(t)=\frac{a_{11}(t)\beta_1(t)}{\gamma(t)},$$

$$B_5(t)=\frac{(f_1(t,0)-\beta_1'(0))\beta_3(t)-(f_1(t,l)-\beta_3'(l))\beta_1(t)}{\gamma(t)},$$

$$C_1(t)=\frac{-a_{22}(t)\beta_2(t)}{\gamma(t)},\qquad C_2(t)=\frac{a_{22}(t)\beta_4(t)}{\gamma(t)},$$

$$C_3(t)=\frac{(f_2(t,l)-\beta_4'(l))\beta_2(t)-(f_2(t,0)-\beta_2'(0))\beta_2(t)}{\gamma(t)},$$

$$D_1(t) = \frac{-a_{22}(t)\beta_3(t)}{\gamma(t)}, \qquad D_2(t) = \frac{a_{22}(t)\beta_1(t)}{\gamma(t)},$$

$$D_3(t) = \frac{(f_2(t,0) - \beta_2'(0))\beta_3(t) - (f_2(t,l) - \beta_4'(l))\beta_2 1t)}{\gamma(t)}.$$

Заметим, что $A_k(t), B_k(t), C_k(t), D_k(t)$ — известные функции.

Подставляя полученые выражения в (1), приходим к следующей прямой задаче:

$$\begin{cases} u_t^1(t,x) + a_{11}(t)u_x^1(t,x) + \big(A_1 u_{xx}^1(t,l) + A_2 u_x^1(t,l) + A_3 u_{xx}^1(t,0) + \\ \qquad + A_4 u_x^1(t,0) + A_5\big)u^1(t,x) + (B_1 u_{xx}^1(t,0) + B_2 u_x^1(t,0) + \\ \qquad\quad + B_3 u_{xx}^1(t,l) + B_4 u_x^1(t,l) + B_5) u^2(t,x) = \nu(t) u_{xx}^1(t,x) + f_1(t,x), \\ u_t^2(t,x) + a_{22}(t)u_x^2(t,x) + \big(C_1 u_x^2(t,l) + C_2 u_x^2(t,0) + C_3\big)u^1(t,x) + \\ \qquad\qquad + \big(D_1 u_x^2(t,0) + D_2 u_x^2(t,l) + D_3\big)u^2(t,x) = f_2(t,x), \end{cases} \tag{7}$$

$$u^k(0,x) = u_0^k(x), \qquad k = 1,2. \tag{8}$$

Ниже докажем классическую разрешимость задачи (7)–(8).

Для доказательства существования решения задачи (7)–(8) применим метод слабой аппроксимации [6, 7]. Расщепим задачу и линеаризуем ее сдвигом по времени на $\dfrac{\tau}{2}$ на втором дробном шаге.

$$\begin{cases} u_t^{1\tau}(t,x) + 2a_{11}(t)u_x^{1\tau}(t,x) = 2\nu(t)u_{xx}^{1\tau}(t,x), \\ u_t^{2\tau}(t,x) + 2a_{22}(t)u_x^{2\tau}(t,x) = 0, \qquad n\tau < t \leqslant (n+\frac{1}{2})\tau, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} u_t^{1\tau}(t,x) + 2\big(A_1 u_{xx}^1(t-\frac{\tau}{2},l) + A_2 u_x^1(t-\frac{\tau}{2},l) + A_3 u_{xx}^1(t-\frac{\tau}{2},0) + \\ \qquad + A_4 u_x^1(t-\frac{\tau}{2},0) + A_5\big)u^{1\tau}(t,x) + 2(B_1 u_{xx}^1(t-\frac{\tau}{2},0) + B_2 u_x^1(t-\frac{\tau}{2},0) + \\ \qquad\quad + B_3 u_{xx}^1(t-\frac{\tau}{2},l) + B_4 u_x^1(t-\frac{\tau}{2},l) + B_5) u^{2\tau}(t,x) = 2f_1(t,x) \\ u_t^{2\tau}(t,x) + 2\big(C_1 u_x^2(t-\frac{\tau}{2},l) + C_2 u_x^2(t-\frac{\tau}{2},0) + C_3\big)u^{1\tau}(t,x) + \\ \qquad\qquad + 2\big(D_1 u_x^2(t-\frac{\tau}{2},0) + D_2 u_x^2(t-\frac{\tau}{2},l) + D_3\big)u^{2\tau}(t,x) = 2f_2(t,x), \\ \qquad\qquad\qquad (n+\frac{1}{2})\tau < t \leqslant (n+1)\tau, \end{cases} \tag{10}$$

$$u^k(t,x)|_{t\leqslant 0} = u_0^k(x), \qquad k = 1,2, \tag{11}$$

здесь $n = \overline{0, N-1}$, $\tau N = T$.

Отметим, что на первом дробном шаге решается задача Коши для параболического уравнения и уравнения первого порядка в частных производных. На втором дробном шаге решается система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений. Введем следующие обозначения:

$$U^\tau(t) = \sum_{k=1}^{2}\sum_{s=0}^{4} U_s^{k\tau}(t), \tag{12}$$

$$U_s^{k\tau}(t) = \sup_{0\leqslant\eta\leqslant t}\sup_{x\in E_1}\left|\frac{\partial^s}{\partial x^s}u^{k\tau}(\eta,x)\right|, \tag{13}$$

$$U_s^k(0) = \sup_{x\in E_1}\left|\frac{\partial^s}{\partial x^s}u_0^k(x)\right|. \tag{14}$$

Функции $U^\tau(t)$ и $U^{k\tau}(t)$ являются неубывающими.

Относительно входных данных предполагаем, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующие соотношения, и удовлетворяют им:

$$|a_{jj}(t)| \leqslant C, \quad (j=1,2), \tag{15}$$

$$\left|\frac{\partial^s}{\partial x^s} f^k(t,x)\right| \leqslant C, \qquad (s=\overline{0,4}, k=1,2), \tag{16}$$

$$\left|\frac{\partial^s}{\partial x^s} u_0^k(x)\right| \leqslant C, \qquad (s=\overline{0,4}, k=1,2), \tag{17}$$

$$|\beta_i(t)| + |\alpha_i(t)| + |\beta_i'(t)| + |\alpha_i'(t)| \leqslant C, \quad (i=\overline{0,2}) \tag{18}$$

$$|\nu(t)| \leqslant C. \tag{19}$$

Получим априорные оценки, которые гарантируют компактность семейства решений $\big(u^{1\tau}(t,x),\, u^{2\tau}(t,x)\big)$ задачи (9)–(11) в классе непрерывных функций.

Рассмотрим нулевой целый шаг по времени ($n=0$).

На первом дробном шаге имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} u_t^{1\tau}(t,x) + 2a_{11}(t)u_x^{1\tau}(t,x) = 2\nu(t)u_{xx}^{1\tau}(t,x), \\ u_t^{2\tau}(t,x) + 2a_{22}(t)u_x^{2\tau}(t,x) = 0, \qquad 0 < t \leqslant \frac{\tau}{2}. \end{cases} \tag{20}$$

Рассматривая первое уравнение системы, в силу принципа максимума получим, что

$$\left|u^{1\tau}(t,x)\right| \leqslant \sup_{x\in E_1}\left|u_0^1(x)\right|, \quad \text{при } 0 < t \leqslant \tfrac{\tau}{2}.$$

Второе уравнение системы (9) — уравнение первого порядка в частных производных, и его решение известно: $u^{2\tau}(t,x) = u_0^2(x-\varphi(t))$, где $\varphi'(t) = a_{22}(t)$, $\varphi(t)|_{t=0} = 0$.
Отсюда получаем

$$\left|u^{2\tau}(t,x)\right| \leqslant \sup_{x\in E_1}\left|u_0^2(x)\right|, \qquad \text{при} \quad 0 < t \leqslant \frac{\tau}{2}.$$

Сложив полученные оценки, приходим к неравенству

$$\left|u^{1\tau}(t,x)\right| + \left|u^{2\tau}(t,x)\right| \leqslant \sup_{x\in E_1}\left|u_0^1(x)\right| + \sup_{x\in E_1}\left|u_0^2(x)\right|, \qquad 0 < t \leqslant \frac{\tau}{2}. \tag{21}$$

Аналогично, дифференцируя (9)–(11) по x от одного до четырех раз и повторяя рассуждения, получим оценки

$$\left|\frac{\partial^s}{\partial x^s}u^{1\tau}(t,x)\right| + \left|\frac{\partial^s}{\partial x^s}u^{2\tau}(t,x)\right| \leqslant$$
$$\leqslant \sup_{x\in E_1}\left|\frac{\partial^s}{\partial x^s}u_0^1(x)\right| + \sup_{x\in E_1}\left|\frac{\partial^s}{\partial x^s}u_0^2(x)\right|, \quad 0 < t \leqslant \frac{\tau}{2}, \quad s=\overline{1,4}. \tag{22}$$

Возьмем от левых частей неравенств (21),(22) $\sup\limits_{0\leqslant\eta\leqslant t}\sup\limits_{x\in E_1}$ и сложим полученные пять неравенств. Учитывая обозначения (12)–(14), получим

$$U^\tau(t) \leqslant U(0), \qquad 0 < t \leqslant \frac{\tau}{2}. \tag{23}$$

На втором дробном шаге, проинтегрировав уравнения системы (10) в пределах от $\dfrac{\tau}{2}$ до t, получаем:

$$\begin{cases} \left|u^{1\tau}(t,x)\right| \leqslant \left|u^{1\tau}\left(\frac{\tau}{2},x\right)\right| + 2\displaystyle\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} \big(|f_1(\eta,x)| + \big(|A_1|\left|u^1_{xx}(\eta-\tfrac{\tau}{2},l)\right| + \\ \quad + |A_2|\left|u^1_x(\eta-\tfrac{\tau}{2},l)\right| + |A_3|\left|u^1_{xx}(\eta-\tfrac{\tau}{2},0)\right| + |A_4|\left|u^1_x(\eta-\tfrac{\tau}{2},0)\right| + \\ \quad + |A_5|\big)|u^{1\tau}(\eta,x)| + \big(|B_1|\left|u^1_{xx}(\eta-\tfrac{\tau}{2},0)\right| + |B_2|\left|u^1_x(\eta-\tfrac{\tau}{2},0)\right| + \\ \quad + |B_3|\left|u^1_{xx}(\eta-\tfrac{\tau}{2},l)\right| + |B_4|\left|u^1_x(\eta-\tfrac{\tau}{2},l)\right| + |B_5|\big)|u^{2\tau}(\eta,x)|\big)\,d\eta, \\ \left|u^{2\tau}(t,x)\right| \leqslant \left|u^{2\tau}\left(\frac{\tau}{2},x\right)\right| + 2\displaystyle\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} \big(|f_2(\eta,x)| + \big(|C_1|\left|u^2_x(\eta-\tfrac{\tau}{2},l)\right| + \\ \quad + |C_2|\left|u^2_x(\eta-\tfrac{\tau}{2},0)\right| + |C_3|\big)|u^{1\tau}(\eta,x)| + \big(|D_1|\left|u^2_x(\eta-\tfrac{\tau}{2},0)\right| + \\ \quad + |D_2|\left|u^2_x(\eta-\tfrac{\tau}{2},l)\right| + |D_3|\big)|u^{2\tau}(\eta,x)|\big)\,d\eta, \quad \tfrac{\tau}{2} < t \leqslant \tau. \end{cases}$$

Возьмем $\sup\limits_{0\leqslant\eta\leqslant t}\ \sup\limits_{x\in E_1}$ от правых, а затем левых частей неравенств. Учитывая обозначения (12)–(14), получим:

$$\begin{cases} U_0^{1\tau}(t) \leqslant U_0^{1\tau}\left(\frac{\tau}{2}\right) + 2C\displaystyle\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} \big[1 + \big(1 + U_2^{1\tau}(\eta-\tfrac{\tau}{2}) + U_1^{1\tau}(\eta-\tfrac{\tau}{2})\big)U_0^1(\eta) + \\ \qquad + \big(1 + U_1^{1\tau}(\eta-\tfrac{\tau}{2}) + U_2^{1\tau}(\eta-\tfrac{\tau}{2})\big)U_0^2(\eta)\big]\,d\eta \\ U_0^{2\tau}(t) \leqslant U_0^{2\tau}\left(\frac{\tau}{2}\right) + 2C\displaystyle\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} \big[1 + \big(1 + U_1^{2\tau}(\eta-\tfrac{\tau}{2})\big)U_0^1(\eta) + \\ \qquad + \big(1 + U_1^{2\tau}(\eta-\tfrac{\tau}{2})\big)U_0^2(\eta)\big]\,d\eta, \quad \tfrac{\tau}{2} < t \leqslant \tau. \end{cases} \tag{24}$$

Сложив неравенства (24), получаем

$$\begin{aligned} U_0^{1\tau}(t) + U_0^{2\tau}(t) \leqslant U_0^{1\tau}\left(\tfrac{\tau}{2}\right) + U_0^{2\tau}\left(\tfrac{\tau}{2}\right) + \\ + 2C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} \big[1 + \big(1 + U_1^{1\tau}(\eta-\tfrac{\tau}{2}) + U_2^{1\tau}(\eta-\tfrac{\tau}{2}) + \\ + U_1^{2\tau}(\eta-\tfrac{\tau}{2})\big)\big(U_0^1(\eta) + U_0^2(\eta)\big)\big]\,d\eta, \quad \tfrac{\tau}{2} < t \leqslant \tau. \end{aligned} \tag{25}$$

Дифференцируя задачу (9)–(11) по x от одного до четырех раз и повторяя рассуждения, приведенные выше, получим неравенства

$$\begin{aligned} U_s^{1\tau}(t) + U_s^{2\tau}(t) \leqslant U_s^{1\tau}\left(\tfrac{\tau}{2}\right) + U_s^{2\tau}\left(\tfrac{\tau}{2}\right) + \\ + 2C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} \big[1 + \big(1 + U_1^{1\tau}(\eta-\tfrac{\tau}{2}) + U_2^{1\tau}(\eta-\tfrac{\tau}{2}) + \\ + U_1^{2\tau}(\eta-\tfrac{\tau}{2})\big)\big(U_s^1(\eta) + U_s^2(\eta)\big)\big]\,d\eta, \\ \tfrac{\tau}{2} < t \leqslant \tau, \quad s = \overline{1,4}. \end{aligned} \tag{26}$$

Суммируя неравенства (25)–(26), получаем

$$U^\tau(t) \leqslant U^\tau(\tfrac{\tau}{2}) + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} \left(1 + \left(1 + U^\tau(\eta - \tfrac{\tau}{2})\right) U^\tau(\eta)\right)\, d\eta, \quad \tfrac{\tau}{2} < t \leqslant \tau.$$

В силу неотрицательности и монотонности функции $U^\tau(t)$ на любом полуинтервале $(j\tau, (j+1)\tau]$ приходим к неравенству

$$U^\tau(t) \leqslant U^\tau(\tfrac{\tau}{2}) + C\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} \left(1 + \left(1 + U^\tau(\tfrac{\tau}{2})\right) U^\tau(\eta)\right)\, d\eta \leqslant$$

$$\leqslant U^\tau(\tfrac{\tau}{2}) + C\left(1 + U^\tau(\tfrac{\tau}{2})\right)\int\limits_{\frac{\tau}{2}}^{t} \left(1 + U^\tau(\eta)\right)\, d\eta, \quad \tfrac{\tau}{2} < t \leqslant \tau.$$

Учитывая неравенство (23), на нулевом временном шаге получим

$$U^\tau(t) \leqslant U(0) + C\left(1 + U(0)\right)\int\limits_{0}^{t} \left(1 + U^\tau(\eta)\right)\, d\eta, \quad 0 < t \leqslant \tau.$$

Отсюда, используя неравенство Гронуолла,

$$U^\tau(t) \leqslant (U(0)+1)e^{C(1+U(0))t} - 1 \leqslant (U(0)+1)e^{C(1+U(0))\tau} - 1, \quad 0 < t \leqslant \tau. \tag{27}$$

Оценка функции $U^\tau(t)$ на нулевом целом шаге получена.

Повторяя рассуждения, приведенные выше, и учитывая (27) на первом дробном шаге ($\tau < t \leqslant 2\tau$), нетрудно показать, что

$$U^\tau(t) \leqslant \left[(U(0)+1)e^{C(U(0)+1)\tau}\right] e^{C\left[(U(0)+1)e^{C(U(0)+1)\tau}\right]\tau} - 1, \quad 0 < t \leqslant 2\tau.$$

Предполагая, что τ достаточно мало и выполняется неравенство

$$e^{C(U(0)+1)\tau} \leqslant 2,$$

получим

$$U^\tau(t) \leqslant (U(0)+1)e^{3C(U(0)+1)\tau} - 1, \quad 0 < t \leqslant 2\tau.$$

На втором дробном шаге ($j = 2$) при условии $e^{3C(U(0)+1)\tau} \leqslant 2$ имеет место оценка

$$U^\tau(t) \leqslant (U(0)+1)e^{5C(U(0)+1)\tau} - 1, \quad 0 < t \leqslant 3\tau,$$

и так далее.

На j-м шаге ($j < N$)

$$U^\tau(t) \leqslant (U(0)+1)e^{C(U(0)+1)(2j+1)\tau} - 1, \quad 0 < t \leqslant (j+1)\tau.$$

Рассмотрим постоянную t^*, $0 < t^* \leqslant T$, удовлетворяющую неравенству

$$e^{2C(U(0)+1)t^*} \leqslant 2.$$

Заметим, что t^* не зависит от τ, поскольку константы C и $U(0)$ не зависят от τ.

Таким образом, справедлива оценка

$$U^\tau(t) \leqslant (U(0)+1)e^{C(U(0)+1)2t^*} - 1 \leqslant C, \quad 0 < t \leqslant t^*.$$

Получили равномерно по τ

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{s=0}^{4}\left|\frac{\partial^s}{\partial x^s}u^{k\tau}(t,x)\right| \leqslant C,\ (t,x)\in G_{[0,t^*]}. \tag{28}$$

Легко заметить, что в силу (15)–(19),(28) правые части уравнений (9), (10) ограничены равномерно по τ на любом временном шаге, попадающем в отрезок $[0,t^*]$, следовательно, справедлива равномерная по τ оценка

$$|u_t^{1\tau}(t,x)| + |u_t^{2\tau}(t,x)| \leqslant C,\ (t,x)\in G_{[0,t^*]}.$$

Дифференцируя уравнения (9), (10) по переменной x и используя оценки (15)–(19), (28), получим равномерно по τ:

$$|u_{tx}^{1\tau}(t,x)| + |u_{tx}^{2\tau}(t,x)| \leqslant C,\ (t,x)\in G_{[0,t^*]}.$$

Дифференцируя уравнения (9), (10) по переменной x дважды и используя оценки (15)–(19),(28), получим равномерно по τ:

$$|u_{txx}^{1\tau}(t,x)| + |u_{txx}^{2\tau}(t,x)| \leqslant C,\ (t,x)\in G_{[0,t^*]}. \tag{29}$$

Оценки (28),(29) гарантируют равномерную по τ ограниченность и равностепенную непрерывность семейства решений $u^{k\tau}(t,x)$ в $G_{[0,t^*]}$ вместе с их производными по x до второго порядка включительно.

В силу теоремы Арцела о компактности и теоремы сходимости метода слабой аппроксимации [6] некоторая подпоследовательность $u^{k\tau_l}(t,x)$ последовательности $u^{k\tau}(t,x)$ решений задачи (9)–(11) сходится вместе со своими производными по x до второго порядка включительно к решению задачи (7)–(8).

Таким образом, доказана разрешимость задачи (7)–(8).

Покажем, что решение задачи (7)–(8) удовлетворяет условиям переопределения (3).

Положим $x=0$ в системе (7), получим

$$\begin{cases} u_t^1(t,0) + a_{11}(t)u_x^1(t,0) + \big(A_1u_{xx}^1(t,l) + A_2u_x^1(t,l) + A_3u_{xx}^1(t,0) + A_4u_x^1(t,0) + \\ \qquad +A_5\big)(u^1(t,0)\pm\beta^1(t)) + (B_1u_{xx}^1(t,0) + B_2u_x^1(t,0) + B_3u_{xx}^1(t,l) + \\ \qquad\qquad +B_4u_x^1(t,l) + B_5)(u^2(t,0)\pm\beta^2(t)) = \nu(t)u_{xx}^1(t,0) + f_1(t,0), \\ u_t^2(t,0) + a_{22}(t)u_x^2(t,0) + \big(C_1u_x^2(t,l) + C_2u_x^2(t,0) + \\ \qquad\qquad +C_3\big)(u^1(t,0)\pm\beta^1(t)) + \big(D_1u_x^2(t,0) + D_2u_x^2(t,l) + \\ \qquad\qquad\qquad\qquad +D_3\big)(u^2(t,0)\pm\beta^2(t)) = f_2(t,x). \end{cases}$$

Введем обозначения

$$k_1 = u^1(t,0) - \alpha_1(t),$$

$$k_2 = u^2(t,0) - \alpha_2(t).$$

С учетом условий согласования (4) функции $k_1(t), k_2(t)$ являются решением задачи Коши

$$\begin{cases} \lambda^1(t)k_1 + \gamma^1(t)k_2 = k_1'(t), \\ \lambda^2(t)k_1 + \gamma^2(t)k_2 = k_2'(t), \end{cases}$$

$$k_1(0) = 0, \qquad k_2(0) = 0,$$

где $\lambda^j(t), \gamma^j(t), j = 1,2$ — функции, выражающиеся через коэффициенты системы (1) и производные по x функций $u^j(t,x)$ при $x = 0$ и $x = l$.

Очевидно, что $k_j(t) \equiv 0$ является единственным решением системы, следовательно, $u^1(t,0) = \alpha^1(t)$, $u^2(t,0) = \alpha^2(t)$ при $t \in [0,T]$, и мы доказали выполнение первой пары условий переопределения (3).

Полагая $x = l$ в системе (7) и повторяя рассуждения приведенные выше, с учетом условий согласования (4), получаем, что $u^1(t,l) = \beta^1(t)$, $u^2(t,l) = \beta^2(t)$ при $t \in [0,T]$. Таким образом, доказали выполнение второй пары условий переопределения (3).

В результате доказано, что решение прямой задачи (7)–(8) является решением обратной задачи (1)–(3).

Покажем, что решение задачи (1)-(3) единственно.

Пусть $U = (u^1(t,x), u^2(t,x), b_{11}(t), b_{12}(t), b_{21}(t), b_{22}(t))$, $\widetilde{U} = (\widetilde{u}^1(t,x), \widetilde{u}^2(t,x), \widetilde{b}_{11}(t), \widetilde{b}_{12}(t), \widetilde{b}_{21}(t), \widetilde{b}_{22}(t))$ — два различных решения задачи (1)-(3).

Введем функции:

$$\omega^1(t,x) = u^1(t,x) - \widetilde{u}^1(t,x), \qquad \omega^2(t,x) = u^2(t,x) - \widetilde{u}^2(t,x),$$

$$\varphi_{11}(t) = b_{11}(t) - \widetilde{b}_{11}(t), \qquad \varphi_{12}(t) = b_{12}(t) - \widetilde{b}_{12}(t),$$

$$\varphi_{21}(t) = b_{21}(t) - \widetilde{b}_{21}(t), \qquad \varphi_{22}(t) = b_{22}(t) - \widetilde{b}_{22}(t).$$

Нетрудно получить, что $(\omega^1(t,x), \omega^2(t,x), \varphi_{11}(t), \varphi_{12}(t), \varphi_{21}(t), \varphi_{22}(t))$ есть решение задачи:

$$\begin{cases} \omega_t^1(t,x) + a_{11}(t)\omega_x^1(t,x) + b_{11}(t)\omega^1(t,x) + \varphi_{11}(t)\widetilde{u}^1(t,x) + \\ \qquad + b_{12}(t)\omega^2(t,x) + \varphi_{12}(t)\widetilde{u}^2(t,x) = \nu(t)\omega_{xx}^1(t,x), \\ \omega_t^2(t,x) + a_{22}(t)\omega_x^2(t,x) + b_{21}(t)\omega^1(t,x) + \varphi_{21}(t)\widetilde{u}^1(t,x) + \\ \qquad + b_{22}(t)\omega^2(t,x) + \varphi_{22}(t)\widetilde{u}^2(t,x) = 0, \end{cases} \tag{30}$$

$$\omega^k(0,x) = 0, \quad x \in E_1, \tag{31}$$

$$\omega^k(t,0) = 0, \qquad \omega^k(t,l) = 0, \quad t \in [0,T], k = \overline{1,2}. \tag{32}$$

Рассмотрим уравнения системы (30) при $x = 0$ и $x = l$ с учетом (31)–(32). Разрешим систему полученных четырех уравнений относительно $\varphi_{11}(t)$, $\varphi_{12}(t)$, $\varphi_{21}(t)$, $\varphi_{22}(t)$. Подставляя полученные выражения в (30), приходим к прямой задаче определения пары функций $\big(\omega^1(t,x), \omega^2(t,x)\big)$:

$$\begin{cases} \omega_t^1 + a_{11}(t)\omega_x^1 + b_{11}(t)\omega^1 + \big((\nu(t)\omega_{xx}^1|_{x=l} - a_{11}(t)\omega_x^1|_{x=l})\varphi_2 - \\ \qquad - (\nu(t)\omega_{xx}^1|_{x=0} - a_{11}(t)\omega_x^1|_{x=0})\beta_2\big)\gamma(t)^{-1}\widetilde{u}^1 + b_{12}(t)\omega^2 + \\ \qquad + \big((\nu(t)\omega_{xx}^1|_{x=0} - a_{11}(t)\omega_x^1|_{x=0})\beta_1 - \\ \qquad - (\nu(t)\omega_{xx}^1|_{x=l} - a_{11}(t)\omega_x^1|_{x=l})\varphi_1\big)\gamma(t)^{-1}\widetilde{u}^2 = \nu(t)\omega_{xx}^1, \\ \omega_t^2 + a_{22}(t)\omega_x^2 + b_{21}(t)\omega^1 + \big(a_{22}(t)\omega_x^2|_{x=0}\beta_2 - a_{22}(t)\omega_x^2|_{x=l}\varphi_2\big)\gamma(t)^{-1}\widetilde{u}^1 + \\ \qquad + b_{22}(t)\omega^2 + \big(a_{22}(t)\omega_x^2|_{x=l}\varphi_1 - a_{22}(t)\omega_x^2|_{x=0}\beta_1\big)\gamma(t)^{-1}\widetilde{u}^2 = 0, \end{cases} \tag{33}$$

$$\omega^k(0,x) = 0, \qquad x \in E_1, \qquad k = \overline{1,2}. \tag{34}$$

Покажем, что $\omega^1(t,x) = \omega^2(t,x) = 0$. Рассмотрим неотрицательные, неубывающие на отрезке $[0,t^*]$ функции.

$$\Phi_s^k(t) = \sup_{0 \leqslant \theta \leqslant t} \sup_{x \in E_1} \left| \frac{\partial^s}{\partial x^s} \omega^k(\theta, x) \right|, \qquad k = \overline{1,2}. \tag{35}$$

Применив принцип максимума к первому и второму уравнениям системы (33), учитывая при этом (34) и монотонное возрастание функций $\Phi_s^1(t), \Phi_s^2(t)$, получим

$$\begin{cases} |\omega^1(t,x)| \leqslant C(\Phi_1^1(t) + \Phi_2^1(t) + \Phi_0^1(t) + \Phi_0^2(t))t, \\ |\omega^1(t,x)| \leqslant C(\Phi_0^1(t) + \Phi_0^2(t) + \Phi_1^2(t)), \qquad 0 \leqslant t \leqslant t^*. \end{cases} \tag{36}$$

Продифференцировав уравнения системы (33) по x, аналогичным образом получим неравенства:

$$\begin{cases} |\omega_x^1(t,x)| \leqslant C(\Phi_1^1(t) + \Phi_2^1(t) + \Phi_1^1(t) + \Phi_1^2(t))t, \\ |\omega_x^1(t,x)| \leqslant C(\Phi_1^1(t) + \Phi_1^2(t) + \Phi_1^2(t)), \qquad 0 \leqslant t \leqslant t^*. \end{cases} \tag{37}$$

Продифференцировав уравнения системы (33) по x дважды, приходим к неравенствам:

$$\begin{cases} |\omega_{xx}^1(t,x)| \leqslant C(\Phi_1^1(t) + \Phi_2^1(t) + \Phi_2^1(t) + \Phi_2^2(t))t, \\ |\omega_{xx}^1(t,x)| \leqslant C(\Phi_2^1(t) + \Phi_2^2(t) + \Phi_1^2(t)), \qquad 0 \leqslant t \leqslant t^*. \end{cases} \tag{38}$$

Возьмем от левых частей неравенств (36)–(38) $\sup\limits_{0 \leqslant \theta \leqslant t} \sup\limits_{x \in E_1}$ и просуммируем их одновременно, усилив неравенство:

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{l=0}^{2} |\Phi_l^k(t)| \leqslant C \sum_{k=1}^{2} \sum_{l=0}^{2} |\Phi_l^k(t)| t, \qquad 0 \leqslant t \leqslant t^*.$$

Из последнего неравенства следует, что при $t \in [0,\varepsilon]$, где $\varepsilon < \frac{1}{C}$, выполнено соотношение $\sum\limits_{k=1}^{2} \sum\limits_{l=0}^{2} |\Phi_l^k(t)| \equiv 0$, следовательно, $\omega^k(t,x) = 0$ при $(t,x) \in G_{[0,\varepsilon]}$.

Повторяя рассуждения для $t \in [\varepsilon, 2\varepsilon]$, получим , что $\omega^k(t,x) = 0$ в $G_{[\varepsilon,2\varepsilon]}$. Через конечное число шагов докажем, что $\omega^k(t,x) \equiv 0$ в $G_{[0,t^*]}$, на основании чего легко доказать, что $U \equiv \widetilde{U}$ в $G_{[0,t^*]}$.

Доказана теорема:

Теорема 1. *Пусть выполняются условия (4),(5), (15)–(19). Тогда задача (1)–(3) имеет единственное решение* $\big(u^1(t,x),\ u^2(t,x),\ b_{11}(t),\ b_{12}(t),\ b_{21}(t),\ b_{22}(t)\big)$, *где* $u^k(t,x) \in C_{t,x}^{1,2}(G_{[0,t^*]}), k = 1,2$, $b_{ij}(t) \in C(G_{[0,t^*]}), i,j = 1,2$. *При этом в* $G_{[0,t^*]}$ *справедливо соотношение:*

$$\sum_{k=1}^{2} \sum_{s=0}^{2} \left| \frac{\partial^s}{\partial x^s} u^k(t,x) \right| + \sum_{i,j=1}^{2} |b_{ij}(t)| \leqslant C.$$

Список литературы

[1] Р.Рихтмайер, Звук и теплопроводность, *Некоторые вопросы вычислительной и прикладной математики,* Новосибирск, Наука, 1966, 183-185.

[2] Р.Рихтмайер, К.Мортон, Разностные методы решения краевых задач, М., Мир, 1972.

[3] Р.В.Сорокин, О стабилизации решения одной обратной задачи для системы составного типа, *Вестник Красноярского гос. университета, серия физ.-мат. науки*, (2005), №1, 167-178.

[4] Р.В.Сорокин, Т.Н.Шипина, О разрешимости одной обратной задачи для системы составного типа, *Вычислительные технологии*, **8**(2003), №3, 139-146.

[5] Yu.Ya.Belov, T.N.Shipina, The problem of determining the source function for a system of composite type, *J. Inv. Ill-Posed Problems*, (1998), №4, 287-308.

[6] Ю.Я.Белов, С.А.Кантор, Метод слабой аппроксимации, Красноярск, КрасГУ, 1999.

[7] Н.Н.Яненко, Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосибирск, Наука, 1967.

The Problem of Identification of Coefficients by the Lowest Terms for a Composite Type System

Polina Yu.Vyacheslavova
Roman V.Sorokin

We prove unique solvability of the problem of identification of four coefficients by the lowest terms for a composite type system with Cauchy data.

Key words: the problem of identification of coefficients, inverse problem, partial differential equations, composite type system, method of weak approximation.