УДК 517.55

О мероморфных решениях двумерных разностных уравнений

Павел В.Тришин*
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 18.04.2009, окончательный вариант 20.05.2009, принята к печати 10.06.2009

Изучается структура мероморфных решений двумерного разностного уравнения с постоянными коэффициентами, строятся интегральные представления мероморфных решений.

Ключевые слова: разностные уравнения, специальные функции, гипергеометрические функции.

1. Постановка задачи

Двумерным разностным уравнением (относительно функции u, определенной на множестве $M \subset \mathbb{C}^2$) с постоянными коэффициентами называется уравнение вида

$$\sum_{\alpha \in A} C(\alpha_1, \alpha_2) u(z_1 + \alpha_1, z_2 + \alpha_2) = 0 \,, \tag{1}$$

где A — конечное подмножество из $\mathbb{Z}^2_+$ ($\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$), $C(\alpha) \in \mathbb{C}$. Поскольку функция $u(z)$ входит в уравнение при различных значениях аргумента, то следует разделить понятия множества определения функции и множества, на котором функция удовлетворяет уравнению. С этой целью определим множество E:

$$E := M - A = \{z \in \mathbb{C}^2 : z + A \in M\}$$

($z + A$ — сдвиг множества A на вектор z). Функцию $u : M \to \mathbb{C}$ будем называть *решением уравнения* (1) тогда и только тогда, когда $E \neq \varnothing$ и $u(z)$ удовлетворяет данному уравнению для любого z из E. Если в качестве M взять $\mathbb{Z}^2$, $\mathbb{Z}^2_+$, $\mathbb{R}^2_+$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}^2$, то, независимо от A, множество E не пусто и $M \subseteq E$.

В случае $M = \mathbb{C}^2$ все решения (в классе целых функций экспоненциального типа) уравнения (1) описаны В.М. Трутневым и А.К. Цихом [1]. В случае $M = \mathbb{Z}^2_+$ множество решений описано Е. К. Лейнартасом [2].

Таким образом, естественно возникает задача поиска решений разностных уравнений в других классах функций, например, в классе мероморфных в $\mathbb{C}^2$ функций. Интерес к мероморфным решениям разностных уравнений можно объяснить тем, что многие специальные функции являются мероморфными и удовлетворяют некоторым разностным уравнениям. Например, некоторые гипергеометрические функции удовлетворяют разностным уравнениям, в одномерном случае гамма-функция $\Gamma(z)$ удовлетворяет уравнению $\Gamma(z+1) - z\Gamma(z) = 0$,

*e-mail: ptrishin@sfu-kras.ru

а в примере 2 указана простая гипергеометрическая функция, удовлетворяющая двумерному разностному уравнению.

Всякая мероморфная в $\mathbb{C}^2$ функция $u(z)$ голоморфна вне некоторого аналитического множества $\mathfrak{S}$ и представима как отношение $u = \xi/\eta$ двух целых функций (см. [3]). Если M есть дополнение $\mathbb{C}^2 \setminus \mathfrak{S}$, то множеством E будет дополнение до $\mathbb{C}^2$ аналитического множества

$$\mathfrak{S} - A = \bigcup_{\alpha \in A} \{z \in \mathbb{C}^2 : \eta(z + \alpha) = 0\} .$$

Дополнение до $\mathbb{C}^2$ аналитического множества всегда не пусто, поэтому термин решения разностного уравнения можно применять к любой мероморфной в $\mathbb{C}^2$ функции.

Дадим несколько определений. Полином

$$P(w_1, w_2) = \sum_{\alpha \in A} C(\alpha) w^{\alpha}$$

называется *характеристическим полиномом*, а множество $V = \{w \in \mathbb{C}^2 : P(w) = 0\}$ нулей этого полинома называется *характеристическим множеством* уравнения (1). Введем также некоторые обозначения: $\mathcal{N}_P$ — *многоугольник Ньютона* полинома P (выпуклая оболочка множества A), $\mathfrak{N}_P$ — множество внешних нормалей к сторонам многоугольника Ньютона $\mathcal{N}_P$ полинома P. Для векторов $z, w \in \mathbb{C}^2$ будем обозначать $w^z = w_1^{z_1} \cdot w_2^{z_2}$, $z + w = (z_1 + w_1, z_2 + w_2)$, $\langle z, w \rangle = z_1 w_1 + z_2 w_2$, $z + I = (z_1 + 1, z_2 + 1)$. Через $\mathbb{T}$ будем обозначать комплексный тор $\mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Как показывают примеры, известные мероморфные решения — функции, голоморфные в полупространстве или пересечении полупространств, поэтому нас будут интересовать решения, голоморфные в трубчатой области $G(U) = U + i\mathbb{R}^2$. На область $G(U)$ наложим ограничение:

(*) $G(U)$ такая, что ее основание U содержит некоторый сдвиг $\mathcal{N}_P + x^0$, $x^0 \in \mathbb{R}^2$ многоугольника Ньютона характеристического полинома уравнения (1).

Оказывается, что свойство мероморфной функции быть решением уравнения (1) накладывает ограничения на структуру особого множества.

Теорема 1. *Пусть мероморфная в $\mathbb{C}^2$ функция $u(z) \in \mathcal{O}(\mathbb{C}^2 \setminus \mathfrak{S})$ служит решением уравнения* (1). *Если ее полярное множество $\mathfrak{S}$ локально алгебраично и $\mathfrak{S} \cap G(U) = \varnothing$, то множество $\mathfrak{S}$ является объединением комплексных прямых вида*

$$\langle z, q \rangle = \chi \ , q \in \mathfrak{N}_P, \chi \in \mathbb{C}, \tag{2}$$

где $\operatorname{Re} \chi > \sup_{x \in U} \langle x, q \rangle$.

Замечание 1. *Фактически теорема утверждает, что любое мероморфное решение может быть аналитически продолжено (как решение) на любую особую кривую, не являющуюся прямой вида* (2). *Феномен продолжения решений разностных уравнений и уравнений свертки (частным случаем которых служат разностные уравнения) отмечался неоднократно (см., например, [4, 5, 6]). Однако в многомерном случае (работы [5, 6]) продолжались голоморфные решения, заданные в выпуклых областях, в некоторые большие выпуклые области.*

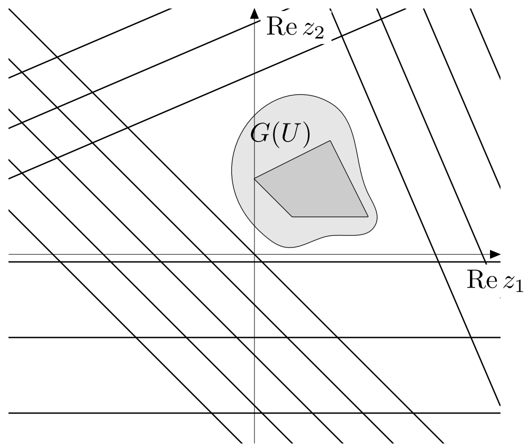

Рис. 1. Пример расположения особенностей мероморфного решения

На рис. 1 изображено возможное расположение особенностей решения уравнения с характеристическим полиномом вида $C(1,0)w_1 + C(3,0)w_1^3 + C(2,2)w_1^2w_2^2 + C(0,1)w_2$.

Доказательство теоремы 1.

Для доказательства необходимо следующее утверждение.

Лемма 1. *Неприводимая алгебраическая кривая $\mathcal{S}$, лежащая в полупространстве*

$$\Pi_q = \{z \in \mathbb{C}^2 : \operatorname{Re}\langle z, q\rangle < p\},\ q \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},\ p \in \mathbb{R},$$

может быть лишь комплексной прямой, определяемой уравнением $\langle z, q\rangle = \chi$, $\chi \in \mathbb{C}$, $\operatorname{Re}\chi < p$.

Доказательство. Кривая $\mathcal{S}$ есть, по определению, множество $\{z \in \mathbb{C}^2 : p(z) = 0\}$, где $p(z)$ — полином. Не ограничивая общности, можно считать, что $q = (0,1)$. Тогда условие пересечения $\mathcal{S}$ и $\partial\Pi_q$ заключается в разрешимости уравнения $p(z_1, x_2) = \chi$, где $x_2 \in \mathbb{R}$. А уравнение

$$p(z_1, x_2) - \chi = \widetilde{p}_d(x_2)z_1^d + \ldots + \widetilde{p}_1(x_2)z_1 + \widetilde{p}_0(x_2) = 0$$

неразрешимо тогда и только тогда, когда $\widetilde{p}_i(x_2) \equiv 0$, $\forall i = 1, \ldots, d$, что влечет (по теореме единственности) $\widetilde{p}_i(z_2) \equiv 0$, то есть $p(z_1, z_2)$ имеет вид

$$p(z_1, z_2) = c_{d'}z_2^{d'} + \ldots + c_1z_2 + c_0\ ,$$

а по предположению неприводимости $d' = 1$ и $\mathcal{S}$ — прямая $z_2 = -c_0/c_1$. □

Пусть $u(z)$ — мероморфное решение уравнения (1), $\mathfrak{S}$ — полярное множество функции u, область $\mathbb{C}^2 \setminus \mathfrak{S}$ обозначим через D. Пусть $\widetilde{\mathfrak{S}} \subset \mathfrak{S}$ — множество полюсов функции $u(z)$, которые не являются комплексными прямыми вида $\{z : \langle z, q\rangle = \chi\}$, $q \in \mathfrak{N}_P$, $\chi \in \mathbb{C}$. Покажем, что мероморфное решение $u(z)$ можно продолжить на любую особую кривую $\widetilde{\mathcal{S}} \in \widetilde{\mathfrak{S}}$. Для этого, как и в одномерном случае (см. [4]), используем метод шагов, заключающийся в продолжении функции $u(z)$ в окрестность особой точки z^0 функцией

$$\widetilde{u}(z) = -\sum_{\alpha \in A\setminus\alpha^0} \frac{C(\alpha)}{C(\alpha^0)} u(z + \alpha - \alpha^0)\ , \qquad (3)$$

где $\alpha^0 \in A$. Эта функция совпадает с $u(z)$ в $\mathcal{U}(z^0) \cap D$ и голоморфна в $\mathcal{U}(z^0)$, если все точки $z^0 + \alpha - \alpha^0$, $\alpha \in A \setminus \alpha^0$ лежат в D. Таким образом, для стирания всех особенностей $\widetilde{\mathfrak{S}}$ необходимо показать, что для любой алгебраической кривой $\widetilde{\mathcal{S}} \in \widetilde{\mathfrak{S}}$ можно указать вектор $\alpha^0 \in A$, что все точки $z^0 + \alpha - \alpha^0$, $\alpha \in A \setminus \alpha^0$, $z^0 \in \widetilde{\mathcal{S}}$ лежат в D. На самом деле, в силу теоремы единственности [7], это достаточно показать лишь для z^0 из открытого непустого подмножества $\widetilde{\mathcal{S}}$.

Продолжение в любую точку $z^0 \in \widetilde{\mathcal{S}}$ невозможно только в том случае, если $u(z)$ имеет также своим полюсом кривую вида $\widetilde{\mathcal{S}}' = \widetilde{\mathcal{S}} + \alpha^0 - \alpha', \alpha^0 \in A, \alpha' \in A \setminus \alpha^0$. В этом случае продолжение следует сперва осуществить на все кривые такого вида, чему также могут служить препятствием кривые вида $\widetilde{\mathcal{S}}'' = \widetilde{\mathcal{S}} + \alpha^0 - \alpha' + \alpha^1 - \alpha''$, где $\alpha^0, \alpha^1 \in A$, $\alpha' \in A \setminus \alpha^0$, $\alpha'' \in A \setminus \alpha^1$. Но поскольку все $\widetilde{\mathfrak{S}}$ пересекают вещественную плоскость $\partial\Pi_q = \{z : \mathrm{Re}\langle z, q\rangle = p\}$, где $p \in \mathbb{R}$ выбрано так, что $\partial\Pi_q$ пересекает $G(U)$, то среди всех кривых $\widetilde{\mathfrak{S}}$ все же найдутся допускающие продолжение. Эти кривые являются "ближайшими" к области $G(U)$, и, начиная с продолжения на эти кривые, функцию $u(z)$ можно продолжить на все $\widetilde{\mathfrak{S}}$.

Таким образом, мы показали, что решение $u(z)$ может быть продолжено на любую особую кривую, не являющуюся прямой вида $\{z : \langle z, q\rangle = \chi\}$, $q \in \mathfrak{N}_P$, $\chi \in \mathbb{C}$, причем можно заметить, что прямые (2), порождающие $\mathfrak{S}$ не могут располагаться произвольно в $\mathbb{C}^2$, а их расположение должно зависеть от векторов A и „мешать“ продолжению решения на $\mathfrak{S}$. $\square$

Следующим шагом служит построение мероморфных решений. Такие решения будем искать в классе функций, представимых в виде несобственного интеграла

$$I[\Gamma](z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\pi(\Gamma)} \frac{1}{P(w_1, w_2)}\, w_1^{z_1 - 1} w_2^{z_2 - 1}\, dw \,, \tag{4}$$

где $\pi(\Gamma)$ — проекция двумерной цепи, определенной на римановом накрытии многозначной функции w^z.

2. Мероморфные решения

Рассматриваемые интегралы вида (4) — частный случай общих гипергеометрических интегралов

$$\int\limits_{\Delta} f_1^{z_1} \cdot \ldots \cdot f_k^{z_k} dw_1 \cdot \ldots \cdot dw_n \,, \tag{5}$$

где f_j — полиномы, а Δ — сингулярная цепь на накрытии, разветвленном в множестве нулей функций f_j, рассмотренных в работах И.М.Гельфанда [8], В.А.Васильева [9] и других авторов.

Самым простым накрытием, униформизирующим функцию $w_1^{z_1} \cdot w_2^{z_2}$, $w \in \mathbb{T}^2$, служит $\mathbb{C}^2$ — произведение римановых поверхностей логарифма; проекция из накрытия в базу осуществляется отображением $\mathrm{Exp} : (\zeta_1, \zeta_2) \to (e^{\zeta_1}, e^{\zeta_2})$. Кривая $V = \{w \in \mathbb{C}^2 : P(w) = 0\}$ особая для подынтегрального выражения в (4), поэтому цепь Γ следует выбирать таким образом, чтобы она не пересекала множество $\mathrm{Ln}\, V := \{\zeta : P(e^{\zeta_1}, e^{\zeta_2}) = 0\}$. При этом под значением интеграла по цепи Γ, определенной на накрытии, следует понимать значение интеграла

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\Gamma} \frac{e^{\langle \zeta, z\rangle}}{P(e^{\zeta_1}, e^{\zeta_2})}\, d\zeta \,. \tag{6}$$

Особый интерес представляют неограниченные цепи в $\mathbb{C}^2 \setminus \operatorname{Ln} V$, так как интегралы по этим цепям несобственные, т. е. общие гипергеометрические. Кроме того, цепи Γ будем предполагать трубками (кограницами Лере) над одномерными контурами на множестве $\operatorname{Ln} V^\circ$ (V° — кривая V с выколотыми точками самопересечения). Иначе говоря, если Γ — кограница Лере над одномерной кривой $\gamma \subset \operatorname{Ln} V^\circ$, то

$$I[\Gamma](z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \operatorname{Res} \left[\frac{e^{\langle \zeta, z \rangle}}{P(e^{\zeta_1}, e^{\zeta_2})} \, d\zeta \right]_{\operatorname{Ln} \widetilde{V}} =: R[\gamma](z) \, , \tag{7}$$

где $\operatorname{Res}[\cdot]$ — форма-вычет Лере (см. [10, 11]), $\operatorname{Ln} \widetilde{V}$ — неприводимая компонента множества $\operatorname{Ln} V^\circ$, содержащая γ. В качестве таких одномерных контуров можно взять элементы группы гомологий $H_1(\operatorname{Ln} V^\circ \cup \{\infty\})$, но для исследования сходимости удобнее рассмотреть группу относительных гомологий $H_1(\operatorname{Ln} V^\circ \cup \{\infty\}, \{\operatorname{Ln} a^j\}_{j=1}^m \cup \{\infty\})$, где $a^j \in V_j^\circ$ — точки на неприводимых компонентах, задаваемых нулями неприводимых полиномов $P_j(w) = 0$ таких, что $P = P_1^{d_1} \cdot \ldots \cdot P_m^{d_m}$. Здесь V_j° — кривая V_j без точек самопересечения и без точек пересечения с кривыми V_k, $k \in \{1, \ldots, m\} \setminus \{j\}$.

Однако образующими группы $H_1(\operatorname{Ln} V^\circ \cup \{\infty\}, \{\operatorname{Ln} a^j\}_{j=1}^m \cup \{\infty\})$ служит счетное число циклов, поэтому рассмотрим ее фактор-группу. Для этого определим группу сдвигов (автоморфизмов $\mathbb{C}^2$):

$$T = \langle T_1, T_2 : T_1 w = (w_1 + 2\pi i, w_2), T_2 w = (w_1, w_2 + 2\pi i) \rangle$$

и в $H_1(\operatorname{Ln} V^\circ \cup \{\infty\}, \{\operatorname{Ln} a^j\}_{j=1}^m \cup \{\infty\})$ введем отношение эквивалентности: будем говорить, что два цикла $\gamma_1, \gamma_2 \in H_1(\operatorname{Ln} V^\circ \cup \{\infty\}, \{\operatorname{Ln} a_j\}_{j=1}^m \cup \{\infty\})$ *T-эквивалентные* и писать $\gamma_1 \overset{T}{\sim} \gamma_2$ в том случае, если в классе $[\gamma_1]$ циклов, гомологичных циклу γ_1, найдется цикл γ_1' такой, что под действием некоторой последовательности сдвигов из группы T он перейдет в γ_2. Обозначим через $H_1^T(\widetilde{\operatorname{Ln} V}, a)$ фактор-группу $H_1(\operatorname{Ln} V^\circ \cup \{\infty\}, \{\operatorname{Ln} a^j\}_{j=1}^m \cup \{\infty\}) / \overset{T}{\sim}$. Изучение этой фактор-группы оправдано двумя соображениями: во-первых, если для двух циклов γ_1 и γ_2 существуют такие $k_1 \in \mathbb{Z}$ и $k_2 \in \mathbb{Z}$, что справедливо равенство

$$\gamma_1 = (T_1^{k_1} + T_2^{k_2}) \gamma_2 \, ,$$

то

$$R[\gamma_1](z) = R[(T_1^{k_1} + T_2^{k_2}) \gamma_2](z) = e^{(z_1 k_1 + z_2 k_2) 2\pi i} R[\gamma_2](z) \, ,$$

т. е. значения интеграла (4) на T-эквивалентных циклах легко отследить, и во-вторых, группа $H_1^T(\widetilde{\operatorname{Ln} V}, a)$ приводит к естественному обобщению понятия фундаментальной системы решений одномерного разностного уравнения.

Следующий шаг — поиск образующих группы $H_1^T(\widetilde{\operatorname{Ln} V}, a)$. Справедлива теорема.

Теорема 2. *Размерность группы $H_1^T(\widetilde{\operatorname{Ln} V}, a)$ равна*

$$K + N + 2 \sum_{j=1}^{m} \rho_j \, ,$$

где K — количество компонент, сходящихся в точках самопересечения кривой V, N — число точек пересечения кривой V с координатными плоскостями $w_1 = 0$, $w_2 = 0$ плюс число компонент кривой V, сходящихся в бесконечно удаленной точке, ρ_j — род неприводимой кривой V_j, $\bigcup\limits_{j=1}^{m} V_j = V$.

Замечание 2. *Данная теорема есть небольшая вариация теоремы А.П.Южакова [11] о гомологиях компактифицированной алгебраической кривой, и основные моменты ее доказательства повторяют доказательство упомянутой теоремы.*

Доказательство. Всякая компактифицированная неприводимая алгебраическая кривая V_j гомеоморфна сфере с ρ ручками (ρ — род кривой V_j), у которой отождествлены некоторые точки, соответствующие точкам самопересечения кривой V_j. Поэтому каждая кривая V_j° с выколотыми точками самопересечения гомеоморфна сфере S_j° с ρ_j ручками, у которой выколоты некоторые точки; обозначим эти гомеоморфизмы ψ_j, $j = 1, \ldots, m$. Пусть $\{b^i\}_{i=1}^{N_j}$ — точки на сфере S_j°, соответствующие точкам пересечения кривой V_j с координатными плоскостями $w_1 = 0$, $w_2 = 0$, и точки, соответствующие бесконечно удаленным элементам. Точке a^j на $V_j^\circ \cap \mathbb{T}^2$ соответствует точка $\widetilde{a}^j = \psi_j(a^j)$ на $S_j^\circ \setminus \{b_i\}_{i=1}^{N_j}$. Сконструируем множество $M_j(\widetilde{a}^j)$ контуров на $\operatorname{Ln} V_j$ как образ следующих контуров на сфере S_j°:

1) $2\rho_j$ негомологичных циклов, порожденных ρ_j ручками;

2) K_j циклов, гомологичных $\partial\mathcal{U}(\psi_j(c^i))$, где $\{c^i\}_{i=1}^{K_j}$ — точки самопересечения кривой V_j, а также точки пересечения V_j с кривыми V_k, $k \neq j$;

3) N_j циклов, соединяющих точку $\widetilde{a}^j$ с точками $\{b^i\}_{i=1}^{N_j}$ под действием отображения $\ln \circ \psi_j^{-1} : S_j \to \operatorname{Ln} V$ ($\ln$ — одно из значений комплексного логарифма Ln).

Определим множество циклов $M(a) := \bigcup\limits_{j=1}^{m} M_j(\widetilde{a}^j)$, оно конечно и состоит из $N + K + 2\sum\limits_{j=1}^{m} \rho_j$ циклов, где K — количество компонент, сходящихся в точках самопересечения кривой V, N — число точек пересечения кривой V с координатными плоскостями $w_1 = 0$, $w_2 = 0$ плюс число компонент кривой V, сходящихся в бесконечно удаленной точке, ρ_j — род кривой V_j. Число элементов множества $M(a)$ обозначим через $\sharp M(a)$.

Лемма 2. *Множество циклов* $M(a) = \bigcup\limits_{j=1}^{m} M_j(\widetilde{a}^j)$ *является образующими фактор-группы* $H_1^T(\widetilde{\operatorname{Ln} V}, a)$, *то есть любой цикл* γ *группы* $H_1(\operatorname{Ln} V^\circ \cup \{\infty\}, \{\operatorname{Ln} a^j\}_{j=1}^m \cup \{\infty\})$ *можно представить как сумму*

$$\gamma = \sum_{j=1}^{\sharp M(a)} (T_1^{k_1^j} + T_2^{k_2^j})\gamma_j\ , \gamma_j \in M(a)\ ,\ k_1^j, k_2^j \in \mathbb{Z}.$$

Доказательство. Поверхность $\operatorname{Ln} V^\circ$ — объединение непересекающихся поверхностей $\operatorname{Ln} V_j^\circ$, поэтому утверждение достаточно доказать для случая, когда V задается нулями неприводимого полинома P. В этом случае поверхность $\operatorname{Ln} V^\circ$ гомеоморфна счетному числу сфер S_J, $J \in \mathbb{Z}^2$, склеенных по берегам разрезов (O, b^i), соединяющих какую-либо точку $O \in S_J$ с точками $\{b^i\}_{i=1}^N$. Их можно считать непересекающимися. Когда цикл $\gamma \in H_1(\operatorname{Ln} V^\circ \cup \{\infty\}, \operatorname{Ln} a \cup \{\infty\})$ лежит только на одной сфере $\psi(S_J)$, он, очевидно, выражается через циклы группы $M(a)$, иначе цикл $\gamma \in \{\psi(S_J)\}_{J \in \mathbb{Z}^2}$ можно разбить на циклы, каждый из которых лежит только на одной сфере, это осуществляется деформацией цикла γ по разрезам (O, b^i) в точки $\{b^i\}_{i=1}^N$. □

Из леммы 2 вытекает справедливость теоремы 2. □

Исследуем интеграл (6) на сходимость. Основной принцип теории амеб гласит [12]: асимптотическое поведение множества $\operatorname{Log} V = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_j = \ln |z_j|, j = 1, 2, z \in V\}$ (амебы алгебраической кривой V) на бесконечности определяется нормалями к граням многогранника Ньютона полинома, задающего множество V. Другими словами, предел

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ z\in V}} [\ln|z_1| : \ln|z_2|]$$

равен (как элемент $\mathbb{RP}_1$) одному из векторов $[q_1 : q_2] \in \mathfrak{N}_P$. Поэтому каждому относительному некомпактному циклу γ множества $M(a)$ поставим в соответствие вектор $q(\gamma) \in \mathfrak{N}_P$ по правилу

$$q(\gamma) := \lim_{\substack{|\zeta|\to\infty \\ \zeta\in\gamma}} [\operatorname{Re}\zeta_1 : \operatorname{Re}\zeta_2].$$

Форма-вычет в интеграле (7) может быть посчитана по методу, предложенному в [11]. Если, например, $P = P_1 \cdot \ldots \cdot P_m$, где P_j — неприводимые полиномы, то

$$\operatorname{Res}\left[\frac{e^{\langle\zeta,z\rangle}}{P(e^{\zeta_1}, e^{\zeta_2})}\, d\zeta\right]_{\operatorname{Ln} V_j} = \frac{e^{\langle\zeta,z\rangle} d\zeta_2}{(P_1 \cdot \ldots \cdot \frac{\partial}{\partial\zeta_1} P_j \cdot \ldots \cdot P_m)(e^{\zeta_1}, e^{\zeta_2})} =$$

$$= -\frac{e^{\langle\zeta,z\rangle} d\zeta_1}{(P_1 \cdot \ldots \cdot \frac{\partial}{\partial\zeta_2} P_j \cdot \ldots \cdot P_m)(e^{\zeta_1}, e^{\zeta_2})}$$

и, в предположении, что $\frac{\partial}{\partial\zeta_1} P_j(e^{\zeta_1}, e^{\zeta_2}) \neq 0$ либо $\frac{\partial}{\partial\zeta_2} P_j(e^{\zeta_1}, e^{\zeta_2}) \neq 0$ в бесконечно удаленной точке ($\operatorname{Sing} V \subset \mathbb{T}^2$), имеет место оценка

$$\left|\operatorname{Res}\left[\frac{e^{\langle\zeta,z\rangle}}{P(e^{\zeta_1}, e^{\zeta_2})}\, d\zeta\right]_{\gamma_j}\right| \leqslant e^{\operatorname{Re}\langle q(\gamma_j), z\rangle} d\mu(\zeta)\ ,$$

где $d\mu(\zeta) \leqslant C$ при $\zeta \in \gamma_j$. Таким образом, интеграл (7) сходится в полупространстве $\Pi_{q(\gamma_j)} = \{z : \operatorname{Re}\langle q(\gamma_j), z\rangle < 0\}$, представляет там голоморфную функцию и, как интеграл по характеристическому множеству уравнения (1), служит решением этого уравнения в указанном полупространстве.

Неоднократно отмечалось, что интегралы вида (5) — мероморфные функции параметра z (см., например, [13]), но нам удобнее использовать теорему мероморфности в формулировке В.А.Васильева [9]. По этой теореме, интеграл (5) является мероморфной в $\mathbb{C}^n$ функцией, имеющей полюса вида $\langle z, \beta\rangle = np$, $\beta \in \mathbb{Z}^n$, $p \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. В применении этого результата к интегралу

$$\frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\pi(\delta\gamma)} \frac{1}{P(w_1, w_2)}\, w_1^{z_1-1} w_2^{z_2-1}\, dw$$

мы получим, что $R[\gamma](z)$ — мероморфная функция, имеющая особенности вида $\langle z, \beta\rangle - 1\beta_0 = np, p \in \mathbb{Q}$, $n \in \mathbb{Z}_+$. Но функция $R[\gamma](z)$ голоморфна в полупространстве $\Pi_{q(\gamma_j)}$, а в это полупространство не попадают только прямые вида $\langle z, q(\gamma_j)\rangle = np + \beta_0$. Мероморфное продолжение осуществляется интегралом по регуляризованным циклам, поэтому мероморфное решение, представляемое интегралом (7) в полупространстве, удовлетворяет уравнению (1) на всей области определения. Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Пусть характеристический полином $P(w)$ уравнения* (1) *имеет вид*

$$P(w) = P_1(w) \cdot \ldots \cdot P_m(w)\ ,$$

где P_k — неприводимые полиномы и $\operatorname{Sing} V \subset \mathbb{T}^2$. *А* $\gamma \subset V_k$ *— один из* N *некомпактных циклов группы* $H_1^T(\widetilde{\operatorname{Ln} V}, a)$, *тогда интеграл*

$$R[\gamma](z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma} \operatorname{Res} \left[\frac{e^{\langle \zeta, z \rangle}}{P(e^{\zeta_1}, e^{\zeta_2})} \, d\zeta \right]_{\operatorname{Ln} V_k}$$

представляет мероморфное решение уравнения (1), *имеющее особенности вида*

$$\langle z, q(\gamma) \rangle = pn + p' \ ,$$

где $q(\gamma) \in \mathfrak{N}_P$, $p \in \mathbb{Q}_+$ *и* $p' \in \mathbb{Z}$ *фиксированы, а* n *пробегает все значения* $\mathbb{Z}_+$.

3. Примеры

Пример 1. Рассмотрим уравнение $u(z_1, z_2) - u(z_1 + 1, z_2 + 1) = 0$. Его характеристический полином имеет вид $1 - w_1 w_2 = 0$, а характеристическое множество является гладкой поверхностью рода 0, не пересекающей координатных плоскостей, имеющей две компоненты, которые сходятся в бесконечно удаленной точке. По теореме 2, размерность группы $H_1^T(\widetilde{\operatorname{Ln} V}, a)$ равна 2. Построим образующие этой группы. Выберем на V точку $a = (1, 1)$ и рассмотрим два цикла на V:

$$\gamma_1 = \{w : w_1 = t, w_2 = 1/t, t \in [1, \infty]\}$$
$$\gamma_2 = \{w : w_1 = -1/t, w_2 = -t, t \in [-\infty, -1]\} \ .$$

Образы этих циклов при отображении $\ln : (\mathbb{C} \setminus [0, \infty])^2 \to \mathbb{C}^2$ служат образующими группы $H_1^T(\widetilde{\operatorname{Ln} V}, (1, 1))$. Вычислим интеграл (4) по кограницам $\delta\gamma_1$ и $\delta\gamma_2$ циклов γ_1 и γ_2:

$$I[\delta\gamma_1](z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma_1} \operatorname{Res} \left[\frac{w^{z-I}}{1 - w_1 w_2} \, dw \right]_{w_1 w_2 = 1} = \frac{C}{z_2 - z_1} \ ,$$
$$I[\delta\gamma_2](z) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \int\limits_{\gamma_2} \operatorname{Res} \left[\frac{w^{z-I}}{1 - w_1 w_2} \, dw \right]_{w_1 w_2 = 1} = \frac{-C}{z_2 - z_1} \ .$$

Функции $u_1(z) = I[\delta\gamma_1](z)$ и $u_2(z) = I[\delta\gamma_2](z)$, очевидно, мероморфные (даже рациональные) решения уравнения $u(z_1, z_2) - u(z_1 + 1, z_2 + 1) = 0$.

Пример 2. Рассмотрим уравнение $u(z_1, z_2) - u(z_1 + 1, z_2) - u(z_1, z_2 + 1) = 0$. Его характеристический полином имеет вид $1 - w_1 - w_2 = 0$, а характеристическое множество — гладкая поверхность рода 0, пересекающая координатные плоскости в двух точках $(1, 0)$ и $(0, 1)$, имеющая одну компоненту, сходящуюся в бесконечно удаленной точке. По теореме 2, размерность группы $H_1^T(\widetilde{\operatorname{Ln} V}, a)$ равна 3. Построим образующие этой группы. Выберем на V произвольную точку a и рассмотрим три произвольных цикла на V такие, что: $\partial\gamma_1 = \infty - a$, $\partial\gamma_1 = (0, 1) - a$, $\partial\gamma_3 = (1, 0) - a$. Удобнее всего вычислить интеграл (4) по суммам кограниц $\delta\gamma_i - \delta\gamma_j$, $i \neq j$:

$$I[\delta\gamma_1] - I[\delta\gamma_3] = \frac{\Gamma(z_2)\Gamma(1 - z_1 - z_2)}{\Gamma(1 - z_1)},$$
$$I[\delta\gamma_1] - I[\delta\gamma_2] = \frac{\Gamma(z_1)\Gamma(1 - z_1 - z_2)}{\Gamma(1 - z_2)},$$
$$I[\delta\gamma_2] - I[\delta\gamma_3] = \frac{\Gamma(1 - z_1 - z_2)}{\Gamma(1 - z_1)\Gamma(1 - z_2)} \left[\frac{\pi}{\sin(\pi z_2)} - \frac{\pi}{\sin(\pi z_1)} \right] \ ,$$

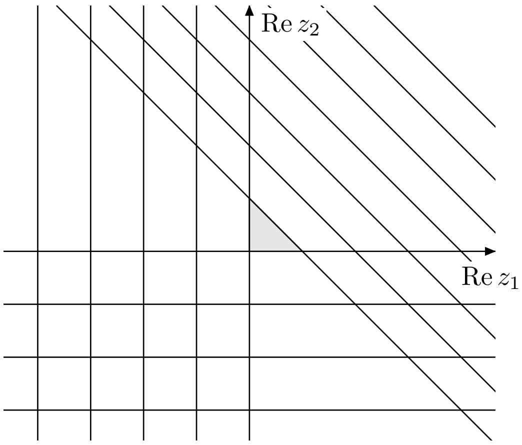

Рис. 2. Особенности функций $I[\delta\gamma_1]$, $I[\delta\gamma_2]$ и $I[\delta\gamma_3]$

где равенства справедливы с точностью до множителей вида $Ce^{2\pi i(k_1z_1+k_2z_2)}$. Полученные функции — мероморфные решения исходного уравнения. Особенности функций $I[\delta\gamma_1]$, $I[\delta\gamma_2]$ и $I[\delta\gamma_3]$ изображены на рис. 2. Вспоминая выражение бета-функции Эйлера через гамма-функцию, получаем

Лемма 3. *Справедливо интегральное представление*

$$\frac{1}{B(z_1+1,z_2+1)} = \pm\frac{e^{2\pi i(k_1z_1+k_2z_2)}(1+z_1+z_2)}{4\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{dw_1-dw_2}{w_1^{z_1+1}w_2^{z_2+1}},$$

где $\gamma=\{w:1-w_1-w_2=0\}\cap\{w:|w_1|=|w_2|\}$ *(рис. 3),* $B(\cdot,\cdot)$ *— бета-функция, где* $k_1,k_2\in\mathbb{Z}$ *зависят от выбранной ветви многозначной функции* w^{z+I}*, а знак — от ориентации цикла* γ*.*

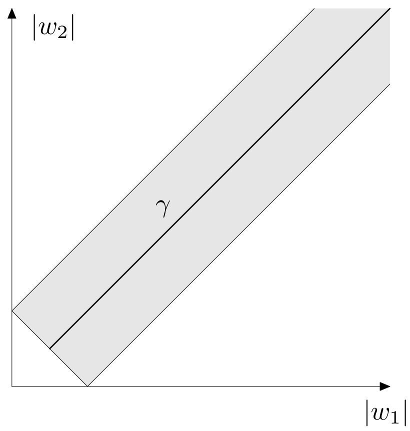

Рис. 3. Прямая $1-w_1-w_2$ и цикл γ на диаграмме Рейнхарта

Список литературы

[1] В.М.Трутнев, А.К.Цих, О структуре вычетных потоков и функционалов, ортогональных идеалам в пространстве голоморфных функций, *Изв. РАН. Сер. матем.*, **59**(1995), №5, 203-224.

[2] Е.К.Лейнартас, Кратные ряды Лорана и разностные уравнения, *Сиб. мат. журн.*, **45**(2004), №2, 387-393.

[3] Б.В.Шабат, Введение в комплексный анализ, Ч. 2, М., Наука, 1985.

[4] А.А.Миролюбов, М.А.Солдатов, Линейные однородные разностные уравнения, М., Наука, 1981.

[5] А.С.Кривошеев, В.В.Напалков, Комплексный анализ и операторы свертки, *Успехи мат. наук*, **47**(1992), №6, 3-58.

[6] В.М.Трутнев, Продолжение голоморфных решений разностных уравнений, *Многомерный комплексный анализ,* Краснояр. гос. ун-т, Красноярск, 2002, 172-177.

[7] Е.М.Чирка, Комплексные аналитические множества, М., Наука, 1985.

[8] И.М.Гельфанд, Общая теория гипергеометрических функций, *Докл. АН СССР*, **290**(1986), №1, 14-18.

[9] В.А.Васильев, Ветвящиеся интегралы, М., МЦНМО, 2000.

[10] Ж.Лере, Дифференциальное и интегральное исчисление на комплексном аналитическом многообразии, М., Иностр. лит., 1961.

[11] Л.А.Айзенберг, А.П.Южаков, Интегральные представления и вычеты в многомерном комплексном анализе, Новосибирск, Наука, 1979.

[12] M.Forsberg, M.Passare, A.Tsikh, Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas, *Adv. in Math.*, **151**(2000), 54-70.

[13] M.F.Atiyah, Resolution of singularities and division of distributions, *Comm. Pure Appl. Math.*, **23**(1970), №2, 145-150.

On Meromorphic Solutions of Two-Dimensional Difference Equations

Pavel V.Trishin

We study the structure of meromorphic solutions to difference equations by means of integral representations.

Keywords: difference equations, special functions, hypergeometric functions.