УДК 530.12:531.51

ЭВОЛЮЦИЯ РЕЛЯТИВИСТСКОЙ СФЕРЫ С ОДНОРОДНЫМ ДАВЛЕНИЕМ

Полукеев С.И.,
научный руководитель канд. физ.-мат. наук Паклин Н.Н.
Сибирский федеральный университет

Исследуется гравитационное поле для нестационарного сферически симметричного распределения материи. Гравитационное поле определяет геометрические свойства пространства-времени и описывается в терминах метрического тензора g_{ik}. Физические свойства вещества описываются тензором энергии-импульса T_{ik}. Связь между гравитацией и материей определяется уравнениями Эйнштейна

$$G_{ik} = -8\pi G c^{-4} T_{ik} \ , \tag{1}$$

где величина G_{ik} – тензор Эйнштейна выражается через метрический тензор и его производные, G – постоянная тяготения Ньютона, c – скорость света, индекс i пробегает значения 0,1,2,3. Вещество описывается простой моделью с тензором энергии-импульса идеальной жидкости

$$T_{ik} = (\varepsilon + p)u_i u_k - p g_{ik} \ , \tag{2}$$

здесь $\varepsilon = \varepsilon(t,r)$ – плотность энергии, $p = p(t)$ – давление и 4-скорость $u^i = dx^i/ds$.

В работе используются сферические координаты $x^i = (ct, r, \theta, \varphi)$ и сопутствующая система отсчета, т.е. радиальная скорость вещества $v = dr/dt$, обращается в ноль. Далее будем использовать геометрическую систему единиц: $G = c = 1$. Производные по переменным t и r будем обозначать точкой и штрихом соответственно. Выражение (точка с запятой обозначает ковариантную производную)

$$T^{ik}{}_{;k} = 0, \tag{3}$$

является следствием уравнений Эйнштейна, для случая $p = p(t)$ из него следует, что $g_{00} = g_{00}(t)$. Воспользуемся свободой преобразования времени $t = t(\overline{t}\,)$ и сделаем выбор $g_{00} = 1$, т.е. введем синхронно-сопутствующую систему отсчета с метрикой

$$ds^2 = dt^2 - F^2 dr^2 - R^2(d\theta^2 + sin^2\theta d\varphi^2), \tag{4}$$

где $F = F(t,r)$, $R = R(t,r)$. При сферической симметрии система уравнений Эйнштейна состоит из четырех уравнений, но только три из них являются независимыми. Уравнение $G_{01} = -8\pi T_{01}$ элементарно интегрируется, а результат удобно представить как

$$F = R'/\sqrt{1 - q(r)} \ , \tag{5}$$

где $q(r)$ – произвольная функция. Теперь уравнения $G_{00} = -8\pi T_{00}$ и $G_{11} = -8\pi T_{11}$ имеют вид

$$8\pi\varepsilon(t,r) \cdot R^2 R' = [R(q(r) + \dot{R}^2)]' \ , \tag{6}$$

$$8\pi p(t)\cdot R^2 + q(r) + \dot{R}^2 + 2R\ddot{R} = 0\ . \tag{7}$$

Для интегрирования этой не замкнутой системы уравнений необходимо привлечь дополнительные физические или математические условия, например, уравнение состояния для вещества. Дополнительные условия должны отражать физическую интерпретацию модели. Имеет смысл рассмотреть частные случаи, допускающие аналитическое решение или упрощающие анализ модели.

Анализ уравнения (7) показывает, что при $p > 0$ именно коллапс является конечным результатом эволюции модели. Если $q(r)$ неотрицательно, то модель ведет себя подобно пылевому шару в вакууме с «замкнутой» геометрией. В случае $q(r) < 0$ поведение модели существенно зависит от начальных условий и вида функции $p(t)$.

В частности, обнаружено, что существует осциллирующий режим с возрастающей амплитудой, когда амплитуда становится сравнимой с начальным значением R, шар коллапсирует. Условия появления осциллирующего решения можно проанализировать аналитически при медленном изменении давления $p(t)$.

Если давление можно считать постоянным, то уравнение (7) интегрируется

$$R\dot{R}^2 = a(r) - q(r)\cdot R - \frac{1}{3}8\pi p(t)\cdot R^3\ , \tag{8}$$

где $a(r)$ – произвольная функция, при этом выражение плотности упрощается

$$8\pi\varepsilon(t,r) = a'/R^2R' - 8\pi p\ . \tag{9}$$

Колебательный режим возможен, если скорость обращается в ноль при двух значениях R, т.е. если правая часть (8) (кубического уравнение) имеет два различных действительных положительных корня. При $8\pi p\cdot 9a^2 < -4q^3$ существует три действительных корня и один из них всегда отрицательный, следовательно, это и есть условие колебательного режима. Поскольку в неравенстве присутствуют функции $a(r)$ и $q(r)$, то условия колебания могут нарушаться для некоторых слоев шара, в результате часть вещества будет монотонно сжиматься, а часть будет осциллировать пред коллапсом.

В случае $q = 0$, для уравнения (8) возможно точное решение

$$R = (3a/8\pi p)^{1/3}\sin^{2/3}\left(\sqrt{6\pi p}\cdot t + b(r)\right)\ , \tag{10}$$

здесь $b(r)$ – произвольная функция. В общем случае решение уравнения (8) можно представить в виде квадратуры

$$\int\left[1 - z^2 - q\cdot(3/8\pi p a^2)^{1/3}z^{2/3}\right]^{-1/2}dz = \sqrt{6\pi p}\cdot t + b(r);\quad z^2 = (8\pi p/3a)R^3\ . \tag{11}$$

Данная модель может отражать некоторые свойства реальных тел, например, явление отскока при коллапсе. Не осциллирующие решения можно интерпретировать как пылевой шар (темная материя), погруженный в однородную жидкость (темная энергия), т.е. эволюцию крупномасштабной неоднородности на однородном космологическом фоне.