УДК 519.2

КЛАССИЧЕСКИЙ И ЭВЕНТОЛОГИЧЕСКИЙ ПОДХОД К ЭНТРОПИИ

Темерова Е.Н.,
научный руководитель кандидат физ-мат. наук, доцент Баранова И. В.
Сибирский Федеральный Университет
Институт математики и фундаментальной информатики

В работе рассматривается понятие энтропии для ряда предметных областей. Приводятся примеры термодинамической, статистической, информационной, вероятностной, экономической и эвентологической энтропии. Особое внимание уделяется понятию эвентологической энтропии двудольного множества случайных событий.

Введение

Понятие энтропии впервые возникло в термодинамике и получило распространение в различных областях знаний: статистике, лингвистике, математике, химии, биологии и других. Соответственно, понятие энтропия имеет множество трактовок.

Так, в термодинамике энтропия является мерой необратимого рассеивания энергии, в теории информации энтропия понимается как мера неопределенности некоторой ситуации, в теории вероятностей − как мера неопределенности испытаний с различными исходами. В рамках эвентологического подхода, применяемого для изучения множества событий, О.Ю. Воробьевым было предложено понятие эвентологической энтропии, которая рассматривается как мера неопределенности эвентологического распределения множества событий. Для более сложных систем, поведение которых описывается числовыми и множественными данными, И. В. Барановой было построено обобщение понятия энтропии для случая двудольных множеств событий.

Энтропия в термодинамике

Впервые понятие энтропии было введено Р. Ю. Клаузиусом в 1865 г. Введение этого понятие связано с поиском координаты теплообмена, т.е. физической величины, неизбежно изменяющейся в процессе теплообмена и остающейся неизменной в его отсутствие.

Формула для **термодинамической энтропии** имеет вид:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q}{T},$$

здесь ΔS – изменении энтропии, ΔS – изменение теплоты, T – абсолютная термодинамическая температура.

Статистическая энтропия

Л. Больцман, полагая, что возрастание энтропии в необратимых процессах отражает стремление природы к более вероятному состоянию, пришел к выводу, что зависимость между энтропией S и термодинамической вероятностью W имеет вид:

$$S = k \cdot \ln|W|,$$

где k – константа, названная впоследствии его именем, а W – термодинамическая вероятность, выражающая число микросостояний, посредством которых может быть реализовано макросостояние какой-либо термодинамической системы. Величину W иногда называют ***статистическим весом*** или ***статистической вероятностью состояний***.

Возрастание энтропии системы обусловлено ее переходом из менее вероятного состояние в более вероятное

Энтропия Больцмана выведена для идеального газа и трактуется как мера беспорядка, хаотичности, однородности молекулярных систем.

Информационная энтропия

В теории информации ***энтропия*** – мера хаотичности информации или мера внутренней неупорядоченности системы. Энтропия увеличивается при хаотическом распределении информационных ресурсов и уменьшается при их упорядочении.

Пусть для дискретной случайной величины ξ, имеющей конечное число значений, задано её распределение $P(\xi_i) = \{p_i,\ p_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\}$.

Клод Шеннон ввел меру *энтропии дискретной случайной величины* ξ на множестве её альтернативных состояний и информацию, как уменьшение энтропии при получении сообщения:

$$H(x) = -\sum_{i=1}^{n} \log(p_i).$$

Эта величина также называется ***средней энтропией сообщения***.

Энтропия в экономике

Энтропийный закон в замкнутой экономической системе характеризует меру хозяйственного порядка – беспорядка за временный цикл взаимодействия через реализуемые стабильные и дестабилизированные режимы экономического обмена.

Количественно экономическая энтропия выражается произведение величины инфляционного ожидания δ на величину девальвации платежных средств 1/(1-δ):

$$Э = \delta/(1-\delta),$$

где $0 \leq \delta \leq 1$, тогда $0 \leq Э \leq \infty$.

Таким образом, энтропия в экономике является естественным показателем объективных эволюционных изменений состояния объекта (системы) и характеризует меру полезности обменного процесса для любого рассматриваемого объекта.

Экономически энтропия зависит от изменения функции полезности. Если за временной интервал (цикл) изменение функции полезности происходит с положительным градиентом, то энтропия положительно растущая. Когда же изменение функции полезности приобретает отрицательный градиент роста, т.е. преобразуется в энтропию с противоположным знаком (отрицательную энтропию), последняя именуется негативной энтропией, сокращенно негэнтропией (понятие введено Э. Шредингером).

Эвентологическая энтропия

Пусть (Ω, F, P) – вероятностное пространство, где F – алгебра событий, случайные события $x, y \in F$ – элементы алгебры событий, на которой определена вероятность $\boldsymbol{P}$. Множество избранных случайных событий – $\mathrm{X} \in F$. Множество Х характеризуется набором из 2^N вероятностей:

$$p(\mathrm{X}) = \{P(ter(X)),\ X \subseteq \mathrm{X}\}, \quad (1)$$

где $ter(X) = \bigcap_{x \subseteq X} x \bigcap_{x \subseteq X^c} x^c$.

Данный набор множества событий X мощности N (|X|=N) называется его эвентологическим распределением.

О. Ю. Воробьевым было введено понятие эвентологической энтропии.

Энтропией множества событий X (или ***энтропией эвентологического распределения множества событий*** X) называется величина

$$s(\mathrm{X}) = -\sum_{X \subseteq \mathrm{X}} p(X) \log(p(X)), \tag{2}$$

где $p(\mathrm{X})$ – вероятности из эвентологического распределения (1).

Известно, что абсолютного максимума энтропия S достигает на равномерном эвентологическом распределении:

$$p(\mathrm{X}) = \left\{ \frac{1}{2^{\mathrm{X}}}, X \subseteq \mathrm{X} \right\}.$$

Энтропия – это теоретико-информационная мера степени неопределенности случайного множества. Данное понятие можно проинтерпретировать следующим образом: она представляет собой математическое ожидание информации, полученной в результате соответствующего случайного эксперимента.

Энтропия двудольных множеств

Довольно часто на практике, особенно в прикладных областях, встречаются сложные системы, поведение которых характеризуется разнотипными данными: числовыми и множественными. Основные трудности при проведении анализа подобных сложных систем заключаются в сложной структуре зависимости между элементами системы, большом числе элементов и их разнотипности. Особенно остро стоит эта проблема в тех прикладных областях, которые связаны с анализом социальных, экономических и природных систем. Поэтому для устранения трудностей, связанных с анализом подобных систем, И.В. Барановой был предложен метод двудольных множеств случайных событий. Его основная идея заключается в представлении любой сложной системы с помощью двудольной эвентологической модели, в которой поведение каждого элемента системы характеризуется двудольным множеством случайных событий. Двудольное множество событий представляет собой объединение двух множеств событий, первая доля которого определяется случайными величинами, а вторая – случайными множествами.

Измеримое отображение $K : (\Omega, F, P) \to \left(2^{\mathrm{X}}, 2^{2^{\mathrm{X}}}\right)$, значениями которого являются подмножества конечного множества $\mathrm{X} \in F$, называется ***случайным множеством событий***. Оно определяется с помощью задания на конечном множестве событий $\mathrm{X} \in F$ вероятностного распределения $p(X) = \mathrm{P}(K = X)$, $X \in 2^{\mathrm{X}}$.

Множество случайных элементов $\{\xi, \mathrm{K}\}$, представимое в виде объединения двух множеств: множества случайных величин ξ и множества K случайных событий, будем называть ***двудольным множеством случайных элементов***:

$$\{\xi, \mathrm{K}\} = \xi \cup K = \{\xi_a, a \in A, K_\beta, \beta \in B\}. \tag{3}$$

Здесь A – множество индексов случайных величин, B – множество индексов случайных множеств событий.

Двудольному множеству случайных элементов $\{\xi, \mathrm{K}\}$ было поставлено в соответствие двудольное множество случайных событий, описывающее поведение элемента системы.

Двудольное множество случайных событий представляет собой объединение двух множеств – множества событий, которое определяется случайными величинами, и множества событий, которое определяется случайными множествами событий:

$$Z = \{Y, X\} = \{Y_a, X_\beta, a \in A, \beta \in B\}. \quad (4)$$

Пусть задано двудольное множество случайных событий z, являющееся подмножеством двудольного множества событий Z (т.е. $z \subseteq Z$): $z = \{Y_{s_A}, X_{s_B}\} = \{Y_a, X_\beta, s_A \subseteq A, s_B \subseteq B\}$.

Событие-терраска двудольного множества событий s представляет собой набор непересекающихся событий, где каждое событие является подмножеством соответствующего множества событий Y_a или X_β:

$$ter(z) = \{Y_{s_A}, X_{s_B}\} = \bigcap_{a \in s_A} ter(Y_a) \bigcap_{\beta \in s_B} ter(X_\beta) = \bigcap_{a \in s_A} Y_a(r_a) \bigcap_{\beta \in s_B} \left(\bigcap_{x_\beta \in X_\beta} x_\beta \bigcap_{x_\beta \in X_\beta^c} x_\beta^c \right), \quad (5)$$

где $s_A \subseteq A, s_B \subseteq B, r_a \in \Re_a, X \in X_\beta$. Множество $\Re_a$ представляет собой множество возможных значений случайной величины ξ_a: $\Re_a = \{r_{a_1}, \ldots, r_{a_{Na}}\} \subset R$.

Вероятность события-терраски двудольного множества вычисляется по следующей формуле:

$$p(ter(z)) = P(\{Y_{s_A}, X_{s_B}\}) = P\left(\bigcap_{a \in s_A} Y_a(r_a) \bigcap_{\beta \in s_B} \left(\bigcap_{x_\beta \in X_\beta} x_\beta \bigcap_{x_\beta \in X_\beta^c} x_\beta^c \right) \right). \quad (6)$$

Обобщая вышеприведенное понятие эвентологической энтропии множества событий, было введено понятие энтропии для двудольного множества событий. **Энтропией двудольного множества случайных событий** $z \subseteq Z$ является величина

$$H(z) = -\sum_{ter(z) \subseteq z} p(ter(z)) \log(p(ter(z))), \quad (7)$$

где ter(z) – события-терраски двудольного множества событий z, а p(ter(z)) – их вероятности, вычисляемые по формуле (5).

В этом случае энтропия понимается как мера хаотичности множества z (неопределенность появления какого-либо события из двудольного множества z). Таким образом, данную разновидность энтропии можно интерпретировать как меру неопределенности двудольного множества событий.

Единицей измерения энтропии двудольного множества является нат (сокращение от англ. natural digit (натуральная единица)).

Своего максимума энтропия H(z) достигает в случае равномерного эвентологического распределения. Максимальная энтропия будет равна:

$$H_{\max}(z) = -\sum_{n=1}^{2^{|z|}} \frac{1}{2^{|z|}} \ln \frac{1}{2^{|z|}} = -\ln \frac{1}{2^{|z|}}.$$

Минимум энтропии достигается в случае, когда система находится в одном состоянии, т.е. вероятность только одного из подмножеств двудольного множества событий равна 1.

$$H_{\min}(z) = -1 \cdot \ln 1 - \sum_{n=1}^{2^{|z|}-1} 0 \cdot \ln 0 = 0.$$

В этом случае энтропия равна 0 (так как неопределенности нет, когда система находится в одном из состояний с максимальной вероятностью).