О спектральных свойствах одной некоэрцитивной смешанной задачи ассоциированной $\overline{\partial}$-оператором

Полковников А.Н.,

научный руководитель Шлапунов А.А.

Сибирский Федеральный Университет

Пусть D - область в $\mathbb{C}^n$ с Липшицевой границей ∂D, обозначим через $\nu(z) = (\nu_1(z), \ldots, \nu_{2n}(z))$ единичный вектор нормали к ∂D. Рассмотрим следующую задачу, дана функция $f(z)$ в области D, найти функцию $u(z)$ такую, что

$$\begin{cases} -\Delta_{2n} u(z) + \sum\limits_{j=1}^{n} a_j(z) \frac{\partial u(z)}{\partial \overline{z}_j} + a_0(z) u(z) = f(z) & \text{в области } D, \\ b_0(z) u(z) + b_1(z) \overline{\partial}_\nu u(z) = 0 & \text{на } \partial D, \end{cases}$$

где $\overline{\partial}_\nu = \sum_{j=1}^{n} (\nu_j - \sqrt{-1}\nu_{j+n}) \overline{\partial}_j$. Пусть теперь $S \subset \partial D$ открытое связное множество, на котором $u(z) = 0$. Тогда обозначим через $H^s(D, S)$ пространство Соболева, то есть замыкание гладких функций $u(z) \in C^s(D, S)$, исчезающих на S. Так же представим a_0 и $b_0 b_1^{-1}$ в виде

$$\begin{aligned} a_0 =& a_{0,0} + \delta a_0, \\ b_0 b_1^{-1} =& b_{0,0} + \delta b_0, \end{aligned}$$

где $a_{0,0} > 0$ и $b_{0,0} > 0$.

Рассмотрим следующую форму

$$(u, v)_{H^+} = \sum_{j,k=1}^{n} (a_{jk} \overline{\partial}_j u, \overline{\partial}_k v)_{L^2(D)} + (a_{0,0} u, v)_{L^2(D)} + (b_{0,0} u, v)_{L^2(\partial D \setminus S)}, \tag{1}$$

где H^+ есть пополнение пространства $H^1(D, S)$ по норме, порожденной скалярным произведением (1).

Переходя к обобщенной постановке задачи, получаем

$$\sum_{j,k=1}^{n} (a_{jk} \overline{\partial}_j u, \overline{\partial}_k v)_{L^2(D)} + \sum_{j=1}^{n} (a_j \partial u / \partial \overline{z}_j, v)_{L^2(D)} + (a_0 u, v)_{L^2(D)} + (b_0 u, v)_{L^2(\partial D \setminus S)} =< f, v >_{H^-}, \tag{2}$$

$v \in H^1(D, S)$, где H^- есть пополнение пространства $H^1(D, S)$ по следующей норме

$$\| g \|_{H_-} = \sup_{v \neq 0} \frac{\left|(g, v)_{L^2(D)}\right|}{\| v \|_{H_+}}, \tag{3}$$

$v \in H^1(D, S)$. С помощью выражения $< f, v >_{H^-}$ мы обозначили спаривание,

$$< f, v >_{H^-} = \lim_{k \to \infty} \int\limits_D u(z) f_k(z) dx.$$

Далее, через $h^s(D)$ обозначим гармонические функции класса $H^s(D)$. Для поставленной задачи верна следующая теорема вложения

Теорема 1. *Пусть граница области ∂D является Липшицевой. Тогда*

1) пространство $H^1(D, S)$ непрерывно вложено в $H_+(D)$ при $b_{0,0} \in L^\infty(\partial D \cup S)$;

2) элементы пространства $H_+(D)$ принадлежат $H^1_{\mathrm{loc}}(D \cup S, S)$; в частности, если $S = \partial D$, тогда пространство $H_+(D)$ непрерывно вложено в $H^1_0(D)$;

3) пространство $H_+(D)$ непрерывно вложено в $L^2(D)$, если

$$a_{0,0} \geq c_0 \text{ в } \overline{D} \text{ с некоторой константой } c_0 > 0; \tag{4}$$

4) пространство $L^2(D)$ непрерывно вложено в $H_-(D)$, если выполнено условие (4);

5) пространство $H_+(D)$ непрерывно вложено в $h^{1/2-\varepsilon}(D) \oplus H_0^1(D)$ с некоторым $\varepsilon > 0$, если

$$b_{0,0} \geq c_1 \text{ в } \overline{D} \text{ с некоторой константой } c_1 > 0. \tag{5}$$

Более того, если $\partial D \in C^2$, тогда, при выполнении условия (5), пространство $H_+(D)$ непрерывно вложено в $h^{1/2}(D) \oplus H_0^1(D)$. В частности, если (5) выполнено, тогда вложение 3) компактно.

Обозначим теперь через ι и ι' операторы вложения,

$$\begin{cases} \iota : H_+(D) \to L^2(D), \\ \iota' : L^2(D) \to H_-(D), \end{cases}$$

а через L_0 обозначим оператор $(u, v)_{H^+} =< L_0 u, v >_{H^-}$. Пусть у нас

$$\begin{aligned} |\delta a_0| &\leqslant \hat{c}_1 |a_{0,0}|, \\ |\delta b_0| &\leqslant \hat{c}_2 |b_{0,0}|, \end{aligned}$$

где $\hat{c}_1, \hat{c}_2$ некоторые положительные константы. Тогда обозначим через L оператор в нашей задаче, который образует непрерывный линейный функционал, то есть

$$F(v) =< Lu, v >_{H^-} .$$

Заметим, что оператор L_0 непрерывно обратим, а оператор L тогда является Фредгольмовым. Таким образом верна следующая теорема о спектре оператора L_0, следующая из теоремы Гильберта-Шмидта.

Теорема 2. *Предположим, что условие (4) или (5) выполнено. Тогда оператор L_0^{-1} индуцирует положительные самосопряженные операторы*

$$\iota' \iota \, L_0^{-1} : H^-(D) \to H^-(D), \quad \iota \, L_0^{-1} \, \iota' : L^2(D) \to L^2(D), \quad L_0^{-1} \, \iota' \iota : H^+(D) \to H^+(D)$$

имеющие одинаковые системы собственных значений и собственных векторов; кроме того, собственные значения положительные. Более того, если выполнено условие (5), тогда это компактные операторы конечного порядка и существуют ортонормальные базисы в $H^+(D)$, $L^2(D)$ и $H^-(D)$ состоящие из собственных векторов.

Следующая теорема следует из теоремы Келдыша о слабом возмущении компактного оператора.

Теорема 3. *Пусть оценка (5) верна и $\delta b_0 = 0$. Тогда для любого обратимого оператора $L : H^+(D) \to H^-(D)$ система корневых функций компактного оператора $(\iota' \iota \, L^{-1}) : H^-(D) \to H^-(D)$ полна в пространствах $H^-(D)$, $L^2(D)$ и $H^+(D)$.*

Список использованных источников

[1] M. V. Keldysh, *On the characteristic values and characteristic functions of certain classes of non-selfadjoint equations*, Dokl. AN SSSR **77** (1951), 11–14 (Russian).

[2] M. S. Agranovich, *Spectral Problems in Lipschitz Domains*, Modern Mathematics, Fundamental Trends **39** (2011), 11–35 (Russian).

[3] O. A. Ladyzhenskaya, and N. N. Uraltseva, *Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type*, Nauka, Moscow, 1973.

[4] J.J. Kohn and L. Nirenberg, *Non-coercive boundary value problems*, Comm. Pure Appl. Math. **18** (1965), 443–492.