519.145

Полуполевые плоскости нечетного порядка, допускающие подгруппу автотопизмов, изоморфную A_5

Кравцова О. В., Дураков Б. К. *

В статье развивается подход к построению и классификации полуполевых проективных плоскостей с использованием регулярного множества. Обсуждается известная гипотеза о разрешимости полной группы коллинеаций конечной недезарговой полуполевой плоскости. Построено матричное представление регулярного множества полуполевой плоскости нечетного порядка, допускающей подгруппу автотопизмов, изоморфную знакопеременной группе A_5. Выделена серия полуполевых плоскостей нечетного порядка, не допускающих A_5.

Введение

Рассмотрим конечную проективную плоскость, координатизируемую полуполем и обладающую, вследствие этого, большими группами центральных коллинеаций (автоморфизмов). Известна гипотеза [1, с. 178] о разрешимости полной группы коллинеаций всякой полуполевой недезарговой плоскости конечного порядка (см. также [2], вопрос 11.76, 1990 г.). К настоящему моменту эта гипотеза подтверждена лишь для некоторых классов полуполевых плоскостей ([3, 4, 5] и др.). Как доказано в [1], гипотеза о разрешимости полной группы автоморфизмов для недезарговой полуполевой плоскости редуцируется к разрешимости группы автотопизмов (коллинеаций, фиксирующих треугольник). Далее, если группа автотопизмов имеет нечетный порядок, то она разрешима по теореме Фейта–Томпсона. Поэтому при обсуждении вопроса о разрешимости следует рассматривать лишь полуполевые плоскости, допускающие автотопизмы порядка 2.

В предположении неразрешимости полной группы коллинеаций простые композиционные факторы должны быть изоморфны известным простым группам. Непосредственный перебор всех вариантов из списка простых неабелевых групп приводит к очень большому количеству исследований. Предлагается проверить существование подгруппы полной группы коллинеаций, изоморфной знакопеременной группе A_5 (подгруппе значительного количества простых неабелевых групп).

С другой стороны, значительный интерес представляет построение и классификация плоскостей трансляций, допускающих определенные подгруппы коллинеаций (см., например, [6, 7]). Построение и исследование таких плоскостей в настоящее время часто выполняется методами компьютерной алгебры, как с использованием комбинаторного подхода, так и с помощью методов линейной алгебры.

Известен способ построения полуполевых плоскостей, как и других плоскостей трансляций, на основе векторного пространства четной размерности и регулярного множества, т.е. семейства линейных преобразований, определяющих согласованное расщепление. Матричное представление регулярного множества определяет геометрические свойства плоскости и алгебраические свойства координатизирующего полуполя.

В работе [8] получено матричное представление регулярного множества полуполевой плоскости произвольного нечетного порядка p^N, допускающей группу автотопизмов, изоморфную знакопеременной группе A_4. Эти результаты применены авторами для построения матричного представления регулярного множества полуполевой плоскости нечетного порядка p^N, допускающей подгруппу автотопизмов, изоморфную A_5. Выделена серия полуполевых плоскостей нечетного порядка, не допускающих A_5.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 51A35, 51A40, 51E15.

*Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (16-01-00707, 15-01-04897 А).

Теорема 1. *Пусть π — полуполевая плоскость нечетного порядка p^N ($p > 2$ — простое), группа автотопизмов Λ которой содержит подгруппу $H \simeq A_5$. Тогда $N = 4n$ и плоскость π может быть задана $8n$ -мерным векторным пространством над $\mathbb{Z}_p$ так, что регулярное множество плоскости $R \subset GL_{4n}(p) \cup \{0\}$ образовано $(4n \times 4n)$ -матрицами вида*

$$\theta(V_1, U_1, V_2, U_2) = \begin{pmatrix} \mu(U_2) & -\psi(V_2) & \psi(U_1) & \varphi(V_1) \\ \psi(V_2) & \mu(U_2) & -\psi(V_1) & \varphi(U_1) \\ -\psi(U_1) & \psi(V_1) & \mu(U_2) & \varphi(V_2) \\ V_1 & U_1 & V_2 & U_2 \end{pmatrix}, \tag{1}$$

где $V_1, U_1, V_2 \in Q_1$, $U_2 \in Q_2$, Q_1, Q_2 — регулярные множества в $GL_n(p) \cup \{0\}$; ψ, μ, φ — инъективные линейные отображения из Q_1, Q_2 соответственно в $GL_n(p) \cup \{0\}$, причем

$$\mu(E) = E, \quad \varphi(E) \neq E, \quad \psi(E) = -E.$$

Теорема 2. *Полуполевая плоскость порядка p^N, где $p > 2$ — простое число и $p-1$ делится на 4, не допускает подгруппы автотопизмов, изоморфной знакопеременной группе A_5.*

Заметим, что теорема 2 справедлива для значительного количества простых чисел; в частности, для 5, 13, 17, 29 и далее. Случай $p = 5$ потребовал отдельного рассмотрения.

Результаты частично анонсированы на XI школе-конференции по теории групп, проходившей в г. Красноярске 27-30 июня 2016 г.

§ 1. Основные определения и обозначения

Приведем некоторые основные определения и обозначения, в соответствии с [1, 9].

Для точек и прямых конечной проективной плоскости можно ввести систему координат с использованием элементов некоторого *координатизирующего множества.* Свойства отношения инцидентности в проективной плоскости позволяют ввести на координатизирующем множестве операции сложения и умножения. Алгебраические свойства координатизирующего множества тесно связаны с геометрическими свойствами соответствующей проективной плоскости. Так, в частности, классическая, или *дезаргова* проективная плоскость координатизируется полем, плоскость трансляций — квазиполем. Координатизирующее множество полуполевой плоскости — кольцо с делением, или полуполе.

Известен [1, с. 160] способ построения конечной полуполевой плоскости, как и всякой плоскости трансляций, на основе линейного пространства и специального множества матриц, называемого регулярным множеством.

Пусть π — плоскость трансляций порядка q^n ($q = p^k$, p — простое число), W — линейное пространство размерности n над полем $GF(q)$. Тогда можно представить аффинные точки плоскости π векторами (x, y), $x, y \in W$, аффинные прямые — смежными классами по подгруппам

$$V_i = \{(x, xT_i) \mid x \in W\}, \quad i = 1, 2, \ldots, q^n,$$
$$V_0 = \{(0, y) \mid y \in W\}.$$

Здесь T_i — $(n \times n)$-матрицы с элементами из $GF(q)$, образующие *регулярное множество* R плоскости π (spread set, [9]).

Определение 1. *Множество R, состоящее из q^n матриц размерности $(n \times n)$ над полем $GF(q)$,*

$$R = \{T_i \mid i = 1, 2, \ldots, q^n\},$$

называется регулярным множеством, если выполнены условия:

1) *R содержит нулевую и единичную матрицы,*
2) $\det(T_i - T_j) \neq 0$ *для всех* $i \neq j$.

Таким образом, можно записать регулярное множество как

$$R = \{\theta(w) \mid w \in W\},$$

где $\theta : W \to GL(W) \cup \{0\}$, причем $\theta(0) = 0$. Определим на множестве W операцию $*$ правилом

$$x * y = x \cdot \theta(y), \quad x, y \in W.$$

Тогда $\langle W, +, * \rangle$ — квазиполе.

Как доказано в [9], если регулярное множество $R \subset GL(W) \cup \{0\}$ замкнуто по сложению, то $\langle W, +, * \rangle$ — полуполе. Поскольку в данной работе рассматриваются только полуполя, то замкнутость R по сложению всюду будет предполагаться без дополнительного упоминания.

Определение 2. *Правым, средним и левым ядрами полуполя W называются соответственно подмножества*

$$N_r = \{x \in W \mid (ab)x = a(bx)\ \forall a, b \in W\},$$
$$N_m = \{x \in W \mid (ax)b = a(xb)\ \forall a, b \in W\},$$
$$N_l = \{x \in W \mid (xa)b = x(ab)\ \forall a, b \in W\}.$$

Эти множества являются подполями в W, и известно, что полуполевую плоскость можно рассматривать как линейное пространство над любым из ядер полуполя [1, с. 169]. Как правило, удобнее использовать левое ядро N_l. Более того, удобным является представление полуполевой плоскости и, соответственно, ее регулярного множества над простым подполем полуполя W, мы будем использовать именно такое представление.

Пусть $[\infty]$ — трансляционная прямая плоскости π, (∞) — трансляционная точка. Подгруппа Λ, образованная коллинеациями, фиксирующими треугольник с вершинами P_1, $P_2 = (\infty)$, $P_3 \in [\infty]$ и сторонами l_1, $l_2 = [\infty]$, $l_3 \ni (\infty)$, называется *группой автотопизмов.* В силу $((\infty),(\infty))$-транзитивности и $([\infty],[\infty])$-транзитивности полуполевой плоскости без ограничения общности можно считать, что $P_1 = (0,0)$, $P_3 = (0)$, $l_1 = [0,0]$, $l_3 = [0]$ (обозначения в соответствии с [1]).

Как было указано во введении, гипотеза о разрешимости полной группы автоморфизмов для недезарговой полуполевой плоскости редуцируется к разрешимости группы автотопизмов. Далее, в силу теоремы Фейта–Томпсона, при обсуждении вопроса о разрешимости следует рассматривать лишь полуполевые плоскости, допускающие автотопизмы порядка 2.

§ 2. Подгруппа автотопизмов, изоморфная знакопеременной группе A_4

Используем основные результаты, полученные в [8].

Пусть π — полуполевая плоскость нечетного порядка p^{4n}, группа автотопизмов которой содержит подгруппу, изоморфную A_4. Тогда можно считать плоскость π заданной $8n$-мерным линейным пространством над $\mathbb{Z}_p$ с регулярным множеством в $GL_{4n}(p) \cup \{0\}$.

Считаем, что $H < \Lambda$ — подгруппа группы автотпизмов, изоморфная A_4, $H = \langle \tau, \sigma \rangle \leftthreetimes \langle \gamma \rangle$, где $\sigma, \gamma \in \Lambda$, $|\tau| = |\sigma| = 2$, $|\gamma| = 3$, $\sigma\tau = \tau\sigma$, $\tau^\gamma = \sigma$.

Для записи инволюций в группе автотопизмов используем обозначения

$$\tau = \begin{pmatrix} -E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$$\sigma = \begin{pmatrix} L & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где $L = \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}$, элементы матриц здесь и всюду далее представляют собой квадратные блоки-подматрицы одинаковой размерности, E — единичная матрица. Коллинеация γ имеет порядок 3 и может быть записана матрицей с использованием блоков меньшей размерности:

$$\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & J \end{pmatrix}, \tag{4}$$

здесь матрица J удовлетворяет условию $J^3 = E$. Матрицы (2), (3), (4) имеют размерность $8n \times 8n$, размерность блоков-подматриц при необходимости будет указана в тексте.

Приведем основной результат работы [8].

Теорема 3. *Пусть π — полуполевая плоскость нечетного порядка p^N ($p > 2$ — простое), группа автотопизмов Λ которой содержит подгруппу $H \simeq A_4$. Тогда $N = 4n$ и плоскость π*

может быть задана $8n$-мерным векторным пространством над $\mathbb{Z}_p$ так, что регулярное множество плоскости $R \subset GL_{4n}(p) \cup \{0\}$ образовано $(4n \times 4n)$-матрицами вида

$$\theta(V_1, U_1, V_2, U_2) = \begin{pmatrix} \mu(J^{-1}U_2J) & \nu(J^{-1}V_2) & \psi(J^{-1}U_1) & \varphi(J^{-1}V_1)J^{-1} \\ \psi(JV_2) & \mu(JU_2J^{-1}) & \nu(JV_1) & \varphi(JU_1)J^{-1} \\ \nu(U_1) & \psi(V_1) & \mu(U_2) & \varphi(V_2) \\ V_1 & U_1 & V_2 & U_2 \end{pmatrix}, \tag{5}$$

где $J^3 = E$; $\{V_1\} = Q_1$, $\{U_1\} = K_1$, $\{V_2\} = Q_2$, $\{U_2\} = K_2$ — регулярные множества в $GL_n(p) \cup \{0\}$; $J^{-1}K_2J = K_2$, $JK_1 = Q_2$, $JQ_1 = K_1$, $JQ_2 = Q_1$; ν, ψ, μ, φ — инъективные линейные отображения из K_1, Q_1, K_2, Q_2 соответственно в $GL_n(p) \cup \{0\}$, причем

$$\mu(E) = E, \quad \nu(E) = E, \quad \varphi(E) \neq E, \quad \psi(E) \neq E.$$

§ 3. Подгруппа автотопизмов, изоморфная знакопеременной группе A_5

Переход к полуполевым плоскостям, допускающим подгруппу, изоморфную A_5, выполним, учитывая генетический код A_5, приведенный, например, в [10, с.101]. Заметим, что дальнейшие расчеты приведены со значительными сокращениями, однако перечислены основные моменты, по которым полный вариант вычислений может быть восстановлен.

Используя подстановочное представление подгруппы H и полагая

$$\tau \leftrightarrow (12)(34)(5), \quad \sigma \leftrightarrow (13)(24)(5), \quad \gamma \leftrightarrow (132)(4)(5),$$

рассмотрим подстановку $(125)(3)(4)$ и обозначим α соответствующий автотопизм. Тогда

$$|\alpha| = 3, \quad (\tau\alpha)^2 = \varepsilon, \quad \alpha\gamma^2 = \gamma\alpha^2, \quad |\alpha\sigma| = 5,$$

$G = \langle \tau, \gamma, \alpha \rangle \simeq A_5$ (здесь ε — тождественное отображение). Найдем матричное представление автотопизма α, основываясь на перечисленных условиях. Обозначим $\alpha = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, и выпишем сначала условия, которым удовлетворяет блок-матрица $D = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix}$. Далее, для сокращения записи, будем использовать обозначения блоков матрицы γ:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & E & 0 \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_3 & E_1 \\ E_2 & J_4 \end{pmatrix}.$$

1. Рассмотрим равенства $(\tau\alpha)^2 = \varepsilon$ и $\alpha^3 = \varepsilon$, получим

$$\left(\begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix} \right)^2 = \begin{pmatrix} -D_1 & -D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} -D_1 & -D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -E & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix}^2.$$

Выполняя действия с матрицами, получаем систему уравнений

$$\begin{cases} D_1^2 + D_2D_3 = D_1, \\ D_1^2 - D_2D_3 = E, \\ D_1D_2 + D_2D_4 = -D_2, \\ D_1D_2 - D_2D_4 = 0, \\ D_3D_1 + D_4D_3 = -D_3, \\ -D_3D_1 + D_4D_3 = 0, \\ D_4^2 + D_3D_2 = D_4, \\ D_4^2 - D_3D_2 = E. \end{cases}$$

Перепишем систему, складывая и вычитая уравнения попарно:

$$\begin{cases} 2D_1^2 - D_1 - E = 0, \\ 2D_4^2 - D_4 - E = 0, \\ 2D_2D_3 = D_1 - E, \\ 2D_3D_2 = D_4 - E, \\ (2D_1 + E)D_2 = 0, \\ D_2(2D_4 + E) = 0, \\ (2D_4 + E)D_3 = 0, \\ D_3(2D_1 + E) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

Очевидно, характеристические корни матриц D_1 и D_4 могут быть равны только 1 или $-\frac{1}{2}$, поэтому матрицы D_1 и D_4 — невырожденные.

Если матрица D_2 или матрица D_3 является невырожденной, то $D_1 = D_4 = -\frac{1}{2}E$. В этом случае $2D_2D_3 = -\frac{3}{2}E$ и $D_3 = -\frac{3}{4}D_2^{-1}$.

Пусть $|D_2| \neq 0$, $|D_3| \neq 0$, тогда

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}E & D_2 \\ -\frac{3}{4}D_2^{-1} & -\frac{1}{2}E \end{pmatrix}, \quad D^2 = D^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}E & -D_2 \\ \frac{3}{4}D_2^{-1} & -\frac{1}{2}E \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим условие $\alpha\gamma^2 = \gamma\alpha^2$, имеем для матрицы D равенство

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}E_2 + D_2E_1 & -\frac{1}{2}E_3 + D_2J_4^2 \\ -\frac{3}{4}D_2^{-1}E_2 - \frac{1}{2}E_1 & -\frac{3}{4}D_2^{-1}E_3 - \frac{1}{2}J_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}E_3 + \frac{3}{4}E_1D_2^{-1} & -E_3D_2 - \frac{1}{2}E_1 \\ -\frac{1}{2}E_2 + \frac{3}{4}J_4D_2^{-1} & -E_2D_2 - \frac{1}{2}J_4 \end{pmatrix},$$

приравняем элементы на месте 21: $-\frac{1}{2}E_3 + D_2J_4^2 = -E_3D_2 - \frac{1}{2}E_1$. В это равенство подставим $D_2 = \begin{pmatrix} D_{21} & D_{22} \\ D_{23} & D_{24} \end{pmatrix}$, тогда

$$\begin{pmatrix} 0 & D_{22}J^2 \\ -\frac{1}{2}E & D_{24}J^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}E & 0 \\ -D_{21} & -D_{22} \end{pmatrix},$$

что невозможно. Следовательно, $|D_2| = |D_3| = 0$.

Пусть $D_2 = 0$, тогда $D_1 = D_4 = E$ и $D_3 = 0$, тогда матрица D единичная и условие $\alpha\gamma^2 = \gamma\alpha^2$ не выполняется. При $D_3 = 0$ получаем аналогичный результат. Пусть $D_1 = -\frac{1}{2}E$ или $D_4 = -\frac{1}{2}E$, тогда $2D_2D_3 = -\frac{3}{2}E$ и матрицы D_2, D_3 невырожденные. Заметим, что тот же результат получается в случае произвольных скалярных матриц D_1, D_4; оформим рассуждения леммой.

Лемма 1. *D_1 и D_4 являются невырожденными нескалярными матрицами, D_2 и D_3 — вырожденными ненулевыми матрицами.*

2. Рассмотрим равенство $\alpha\gamma^2 = \gamma\alpha^2$:

$$\begin{pmatrix} D_1 & D_2 \\ D_3 & D_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 & E_3 \\ E_1 & J_4^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_3 & E_1 \\ E_2 & J_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & -D_2 \\ -D_3 & D_4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} D_1E_2 + D_2E_1 = E_3D_1 - E_1D_3, \\ D_1E_3 + D_2J_4^2 = -E_3D_2 + E_1D_4, \\ D_3E_2 + D_1E_1 = E_2D_1 - J_4D_3, \\ D_3E_3 + D_4J_4^2 = -E_2D_2 + J_4D_4. \end{cases} \tag{7}$$

Каждый из блоков D_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ заменим на $\begin{pmatrix} D_{i1} & D_{i2} \\ D_{i3} & D_{i4} \end{pmatrix}$, тогда система (7) преобразуется в 16 равенств

$$\begin{cases} D_{21} = -D_{31}, \\ D_{11} = -D_{32}, \\ D_{23} = D_{11}, \\ D_{13} = D_{12}; \end{cases} \quad \begin{cases} D_{12} = D_{41}, \\ D_{22}J^2 = D_{42}, \\ D_{14} = -D_{21}, \\ D_{24}J^2 = -D_{22}; \end{cases} \quad \begin{cases} D_{41} = D_{13}, \\ D_{31} = D_{14}, \\ D_{43} = -JD_{33}, \\ D_{33} = -JD_{34}; \end{cases} \quad \begin{cases} D_{32} = -D_{23}, \\ D_{42}J^2 = -D_{24}, \\ D_{34} = JD_{43}, \\ D_{44}J^2 = JD_{44}. \end{cases}$$

Учитывая эти равенства, запишем матрицу D в виде

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & D_{12} & -D_{14} & D_{22} \\ D_{12} & D_{14} & D_{11} & -D_{22}J \\ D_{14} & -D_{11} & D_{12} & D_{22}J^2 \\ D_{33} & -J^2D_{33} & -JD_{33} & D_{44} \end{pmatrix}, \tag{8}$$

при условии

$$JD_{44}J = D_{44}. \tag{9}$$

Лемма 2. *Матрица D (эквивалентно, A), определяющая автотопизм α, имеет вид* (8), *причем выполнены условия* (6) *и* (9).

Далее подставим блоки D_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ в условия (6), получим при этом 32 новых матричных равенства, которые запишем в порядке, более удобном для дальнейших расчетов:

$$\begin{cases} 2D_{11}^2 + 2D_{12}^2 - D_{11} - E = 0, \\ 2D_{12}^2 + 2D_{14}^2 - D_{14} - E = 0, \\ 2D_{14}^2 + 2D_{11}^2 + D_{12} - E = 0, \\ 2D_{11}^2 - 2D_{22}D_{33} + D_{14} - E = 0, \\ 2D_{12}^2 - 2D_{22}D_{33} - D_{12} - E = 0, \\ 2D_{14}^2 - 2D_{22}D_{33} + D_{11} - E = 0; \end{cases} \tag{10}$$

$$\begin{cases} 2D_{11}D_{12} + 2D_{12}D_{14} - D_{12} = 0, \\ 2D_{12}D_{14} - 2D_{14}D_{11} - D_{11} = 0, \\ 2D_{14}D_{11} - 2D_{11}D_{12} + D_{14} = 0, \\ 2D_{11}D_{12} + 2D_{22}J^2D_{33} + D_{11} = 0, \\ 2D_{12}D_{14} + 2D_{22}J^2D_{33} + D_{14} = 0, \\ 2D_{14}D_{11} - 2D_{22}J^2D_{33} - D_{12} = 0; \end{cases} \tag{11}$$

$$\begin{cases} 2D_{12}D_{11} + 2D_{14}D_{12} - D_{12} = 0, \\ 2D_{14}D_{12} - 2D_{11}D_{14} - D_{11} = 0, \\ 2D_{11}D_{14} - 2D_{12}D_{11} + D_{14} = 0, \\ 2D_{12}D_{11} + 2D_{22}JD_{33} + D_{11} = 0, \\ 2D_{14}D_{12} + 2D_{22}JD_{33} + D_{14} = 0, \\ 2D_{11}D_{14} - 2D_{22}JD_{33} - D_{12} = 0; \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} 2D_{33}D_{11} - 2D_{44}D_{33} - JD_{33} = 0, \\ 2D_{33}D_{12} + 2JD_{44}D_{33} - D_{33} = 0, \\ 2D_{33}D_{14} - 2J^2D_{44}D_{33} - J^2D_{33} = 0, \\ 2D_{33}D_{11} - 2J^2D_{33}D_{12} + D_{33} = 0, \\ 2D_{33}D_{12} - 2J^2D_{33}D_{14} - J^2D_{33} = 0, \\ 2D_{33}D_{14} + 2J^2D_{33}D_{11} - JD_{33} = 0; \end{cases} \tag{13}$$

$$\begin{cases} 2D_{11}D_{22} - 2D_{22}D_{44} - D_{22}J^2 = 0, \\ 2D_{12}D_{22} + 2D_{22}JD_{44} - D_{22} = 0, \\ 2D_{14}D_{22} - 2D_{22}D_{44}J - D_{22}J = 0, \\ 2D_{11}D_{22} - 2D_{12}D_{22}J + D_{22} = 0, \\ 2D_{12}D_{22} - 2D_{14}D_{22}J - D_{22}J = 0, \\ 2D_{14}D_{22} + 2D_{11}D_{22}J - D_{22}J^2 = 0; \end{cases} \tag{14}$$

$$\begin{cases} 2JD_{33}D_{22}J^2 - 2D_{44}^2 + D_{44} + E = 0, \\ 2D_{33}D_{22} + 2J^2D_{33}D_{22}J - D_{44} + E = 0. \end{cases} \tag{15}$$

Решив все системы поочередно относительно произведений и квадратов матриц D_{ij}, выпишем полученные соотношения.

$$\begin{cases} D_{11}^2 = \frac{1}{4}(D_{11} - D_{12} - D_{14} + E), \\ D_{12}^2 = \frac{1}{4}(D_{11} + D_{12} + D_{14} + E), \\ D_{14}^2 = \frac{1}{4}(-D_{11} - D_{12} + D_{14} + E), \\ D_{44}^2 = \frac{1}{4}D_{44}(E + J + J^2) + \frac{1}{4}E, \\ D_{22}D_{33} = \frac{1}{4}(D_{11} - D_{12} + D_{14} - E), \\ D_{33}D_{22} = \frac{1}{4}D_{44}(E + J - J^2) - \frac{1}{4}E, \\ D_{11}D_{12} = D_{12}D_{14} = \frac{1}{4}(-D_{11} + D_{12} + D_{14}), \\ D_{12}D_{14} = D_{14}D_{12} = \frac{1}{4}(D_{11} + D_{12} - D_{14}), \\ D_{14}D_{11} = D_{11}D_{14} = \frac{1}{4}(-D_{11} + D_{12} - D_{14}), \\ D_{22}JD_{33} = D_{22}J^2D_{33} = \frac{1}{4}(-D_{11} - D_{12} - D_{14}), \\ D_{33}D_{11} = D_{33}D_{14} = \frac{1}{4}(-E + J + J^2)D_{33}, \\ D_{33}D_{12} = \frac{1}{4}(E + J + J^2)D_{33}, \\ D_{44}D_{33} = \frac{1}{4}(-E - J + J^2)D_{33}, \\ D_{11}D_{22} = D_{14}D_{22} = \frac{1}{4}D_{22}(-E + J + J^2), \\ D_{12}D_{22} = \frac{1}{4}D_{22}(E + J + J^2), \\ D_{22}D_{44} = \frac{1}{4}D_{22}(-E + J - J^2). \end{cases} \tag{16}$$

3. Рассмотрим далее условие $|\alpha\sigma| = 5$ и возведем в пятую степень матрицу

$$\overline{D} = \begin{pmatrix} -D_{11} & D_{12} & D_{14} & D_{22} \\ -D_{12} & D_{14} & -D_{11} & -D_{22}J \\ -D_{14} & -D_{11} & -D_{12} & D_{22}J^2 \\ -D_{33} & -J^2D_{33} & JD_{33} & D_{44} \end{pmatrix}.$$

Получаемые при умножении матриц попарные произведения блоков D_{ij} заменяем при помощи равенств (16). Запишем

$$\overline{D}^2 = \begin{pmatrix} -D_{14} & D_{11} & -D_{12} & -D_{22}J^2 \\ -D_{11} & -D_{12} & D_{14} & -D_{22} \\ D_{12} & D_{14} & D_{11} & -D_{22}J \\ JD_{33} & -D_{33} & -J^2D_{33} & D_{44}J^2 \end{pmatrix}, \quad \overline{D}^3 = \begin{pmatrix} -D_{14} & -D_{11} & D_{12} & -D_{22}J^2 \\ D_{11} & -D_{12} & D_{14} & D_{22} \\ -D_{12} & D_{14} & D_{11} & D_{22}J \\ JD_{33} & D_{33} & J^2D_{33} & D_{44}J^2 \end{pmatrix},$$

$$\overline{D}^5 = \begin{pmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & D_{44} \end{pmatrix}.$$

Из $D_{44} = E$ и (9) имеем $J^2 = E = J^3$ и, следовательно, $J = E$. Преобразуем систему (16):

$$\begin{cases} D_{11}^2 = \frac{1}{4}(D_{11} - D_{12} - D_{14} + E), \\ D_{12}^2 = \frac{1}{4}(D_{11} + D_{12} + D_{14} + E), \\ D_{14}^2 = \frac{1}{4}(-D_{11} - D_{12} + D_{14} + E), \\ D_{22}D_{33} = \frac{1}{4}(D_{11} - D_{12} + D_{14} - E), \\ D_{33}D_{22} = 0, \\ D_{11}D_{12} = D_{12}D_{14} = \frac{1}{4}(-D_{11} + D_{12} + D_{14}), \\ D_{12}D_{14} = D_{14}D_{12} = \frac{1}{4}(D_{11} + D_{12} - D_{14}), \\ D_{14}D_{11} = D_{11}D_{14} = \frac{1}{4}(-D_{11} + D_{12} - D_{14}), \\ D_{22}D_{33} = \frac{1}{4}(-D_{11} - D_{12} - D_{14}), \\ D_{33}D_{11} = D_{33}D_{14} = \frac{1}{4}D_{33}, \\ D_{33}D_{12} = \frac{3}{4}D_{33}, \\ D_{33} = -\frac{1}{4}D_{33}, \\ D_{11}D_{22} = D_{14}D_{22} = \frac{1}{4}D_{22}, \\ D_{12}D_{22} = \frac{3}{4}D_{22}, \\ D_{22} = -\frac{1}{4}D_{22}. \end{cases} \tag{17}$$

Если характеристика поля $p \neq 5$, то $D_{22} = D_{33} = 0$. Тогда $D_{12} = -\frac{1}{2}E$, $D_{14} = -D_{11} + \frac{1}{2}E$, $D_{11}^2 - \frac{1}{2}D_{11} - \frac{1}{4}E = 0$. Таким образом, доказана

Лемма 3. *Если $p \neq 5$, то матрица D (эквивалентно, A), определяющая автотопизм α, имеет вид*

$$D = \begin{pmatrix} D_{11} & -\frac{1}{2}E & -D11 - \frac{1}{2}E & 0 \\ -\frac{1}{2}E & -D_{11} + \frac{1}{2}E & D_{11} & 0 \\ -D_{11} + \frac{1}{2}E & -D_{11} & -\frac{1}{2}E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}, \tag{18}$$

при условии

$$D_{11}^2 - \frac{1}{2}D_{11} - \frac{1}{4}E = 0. \tag{19}$$

Случай $p = 5$ будет далее рассмотрен особо.

Выясним, какой вид имеют матрицы регулярного множества полуполевой плоскости при $p \neq 5$, допускающей подгруппу автотопизмов, изоморфную A_5. Используем полученный в работе [8] вид (5) и добавим ограничения, следующие из того, что α является коллинеацией. Для любой матрицы $\theta(x)$ из регулярного множества произведение $A^{-1}\theta(x)D$ также должно принадлежать регулярному множеству. В частности, при $\theta(x) = E$ получим $A^{-1}D \in R$, где A и D — матрицы вида (18). При умножении имеем

$$A^{-1}D = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} = E,$$

поэтому $A = D$. Далее, для сокращения обозначений, полагаем $D_{11} = Y$, $4Y^2 - 2Y - E = 0$, $\alpha = \begin{pmatrix} D & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$,

$$D = \begin{pmatrix} Y & -\frac{1}{2}E & -Y - \frac{1}{2}E & 0 \\ -\frac{1}{2}E & -Y + \frac{1}{2}E & Y & 0 \\ -Y + \frac{1}{2}E & -Y & -\frac{1}{2}E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix}. \tag{20}$$

По теореме 3 при $J = E$ получим:

$$\theta(V_1, U_1, V_2, U_2) = \begin{pmatrix} \mu(U_2) & \nu(V_2) & \psi(U_1) & \varphi(V_1) \\ \psi(V_2) & \mu(U_2) & \nu(V_1) & \varphi(U_1) \\ \nu(U_1) & \psi(V_1) & \mu(U_2) & \varphi(V_2) \\ V_1 & U_1 & V_2 & U_2 \end{pmatrix}, \tag{21}$$

матрицы V_1, U_1, V_2 принадлежат одному множеству Q_1, $U_2 \in Q_2$,

$$\mu(E) = \nu(E) = E, \quad \varphi(E) \neq E, \quad \psi(E) \neq E.$$

Далее требуем выполнения условия $D^{-1}\theta(V_1, U_1, V_2, U_2)D \in R$ для всех $V_1, U_1, V_2 \in Q_1$, $U_2 \in Q_2$ и уточняем вид регулярного множества.

1. Пусть $V_1 = U_1 = V_2 = 0$, тогда

$$D^{-1}\theta(0,0,0,U_2)D = \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & E \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ * & * & * & * \\ 0 & 0 & 0 & U_2 \end{pmatrix} = \theta(0,0,0,U_2),$$

из $\theta(0,0,0,U_2)D = D\theta(0,0,0,U_2)$, следует

$$\mu(U_2)Y = Y\mu(U_2) \qquad \forall U_2 \in Q_2. \tag{22}$$

2. Пусть $V_1 = U_1 = U_2 = 0$, обозначим M матрицу $D^{-1}\theta(0,0,V_1,0)D = \theta(\overline{V_1},\overline{U_2},\overline{V_2},\overline{U_2})$, где

$$\overline{V_1} = m_{41} = V_2\left(-Y + \frac{1}{2}E\right), \quad \overline{U_1} = m_{42} = -V_2Y, \quad \overline{V_2} = m_{43} = -\frac{1}{2}V_2, \quad \overline{U_2} = m_{44} = 0.$$

Из условия $-V_2Y \in Q_1$ для произвольного $V_2 \in Q_1$ следует, что матрица $Y \in Q_1$ принадлежит правому ядру полуполя с регулярным множеством Q_1.

Далее, сравнивая элементы матрицы M с элементами матрицы регулярного множества R, получаем:

$$\begin{aligned}
&m_{11} = \mu(\overline{U_2}) \Rightarrow -\frac{1}{2}\psi(V_2)Y - \frac{1}{2}Y\nu(V_2) = 0 \Rightarrow \nu(V_2) = -Y^{-1}\psi(V_2)Y;\\
&m_{13} = \psi(\overline{U_1}) \Rightarrow -\frac{1}{2}\psi(V_2)\left(Y - \frac{1}{2}E\right) + Y\nu(V_2)Y = \psi(-V_2Y) \Rightarrow \psi(V_2Y) = \psi(V_2)Y;\\
&m_{14} = \varphi(\overline{V_1}) \Rightarrow \left(-Y + \frac{1}{2}E\right)\varphi(V_2) = \varphi\left(V_2\left(-Y + \frac{1}{2}E\right)\right) \Rightarrow \varphi(V_2Y) = Y\varphi(V_2);\\
&m_{33} = \mu(\overline{U_2}) \Rightarrow Y\psi(V_2)\left(Y - \frac{1}{2}E\right) + \left(Y - \frac{1}{2}E\right)\nu(V_2)Y = 0 \Rightarrow \begin{cases} \psi(V_2)Y = Y\psi(V_2),\\ \nu(V_2) = -\psi(V_2); \end{cases}
\end{aligned}$$

Рассматривая далее случаи $\theta(0,U_1,0,0)$ и $\theta(V_1,0,0,0)$, мы не получим новых ограничений на функции μ, ν, φ, ψ и матрицу Y. Окончательно записываем матрицу $\theta(V_1,U_1,V_2,U_2)$ в виде (1) и, в дополнение к теореме 1 для случая $p \neq 5$, формулируем леммы о свойствах функций.

Лемма 4. *В условиях теоремы* 1 *матрица* Y *принадлежит правому ядру* Q_1,

$$\mu(U_2)Y = Y\mu(U_2) \quad \forall U_2 \in Q_2,$$

$$\psi(V_2)Y = Y\psi(V_2) = \psi(V_2Y) \quad \forall V_2 \in Q_1,$$

$$\varphi(V_2Y) = Y\varphi(V_2) \quad \forall V_2 \in Q_1.$$

Лемма 5. *Если регулярное множество полуполевой плоскости состоит из матриц вида* (1), *то* -1 *не является квадратом в* $\mathbb{Z}_p$ *и* $\varphi(E) \neq k^2E$ $(k \in \mathbb{Z}_p)$.

Доказательство. Действительно, рассмотрим матрицу вида (1) при $V_1 = U_1 = 0$, $V_2 = E$, $U_2 = kE$ $(k \in \mathbb{Z}_p)$:

$$\theta(0,0,E,kE) = \begin{pmatrix} k\mu(E) & -\psi(E) & 0 & 0\\ \psi(E) & k\mu(E) & 0 & 0\\ 0 & 0 & k\mu(E) & \varphi(E)\\ 0 & 0 & E & kE \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kE & E & 0 & 0\\ -E & kE & 0 & 0\\ 0 & 0 & kE & \varphi(E)\\ 0 & 0 & E & kE \end{pmatrix}.$$

Определитель этой матрицы равен $\pm|(k^2+1)E|\cdot|\varphi(E)-k^2E|$, следовательно, -1 не является квадратом и $\varphi(E)$ не является квадратом скалярной матрицы.

Далее, если $p-1$ делится на 4, то мультипликативная группа поля $\mathbb{Z}_p$ содержит элемент порядка 4, квадрат которого равен -1. Таким образом, в случае $p \neq 5$ теоремы 1 и 2 доказаны.

§ 4. Случай $p = 5$

Вернемся к условиям (17) в случае $p = 5$ и перепишем их:

$$\begin{cases} D_{11}^2 = -D_{11} + D_{12} + D_{14} - E, \\ D_{12}^2 = -D_{11} - D_{12} - D_{14} - E, \\ D_{14}^2 = D_{11} + D_{12} - D_{14} - E, \\ D_{22}D_{33} = -D_{11} + D_{12} - D_{14} + E, \\ D_{33}D_{22} = 0, \\ D_{11}D_{12} = D_{12}D_{14} = D_{11} - D_{12} - D_{14}, \\ D_{12}D_{14} = D_{14}D_{12} = -D_{11} - D_{12} + D_{14}, \\ D_{14}D_{11} = D_{11}D_{14} = D_{11} - D_{12} + D_{14}, \\ D_{22}D_{33} = D_{11} + D_{12} + D_{14}, \\ D_{33}D_{11} = D_{33}D_{14} = -D_{33}, \\ D_{33}D_{12} = 2D_{33}, \\ D_{11}D_{22} = D_{14}D_{22} = -D_{22}, \\ D_{12}D_{22} = 2D_{22}. \end{cases} \tag{23}$$

Из четвертого и девятого равенств данной системы получим $D_{14} = -D_{11} - 2E$. Подставляя это выражение в остальные равенства, имеем:

$$\begin{cases} (D_{11} + E)^2 = D_{12} - E, \\ (D_{12} - 2E)^2 = 0, \\ D_{22}D_{33} = D_{12} - 2E, \\ D_{33}D_{22} = 0, \\ (D_{11} + E)(D_{12} - 2E) = (D_{12} - 2E)(D_{11} + E) = 0, \\ D_{33}(D_{11} + E) = 0, \\ D_{33}(D_{12} - 2E) = 0, \\ (D_{11} + E)D_{22} = 0, \\ (D_{12} - 2E)D_{22} = 0. \end{cases} \tag{24}$$

Для упрощения записи в дальнейшем обозначим $D_{11} + E = X$, $D_{12} - 2E = Y$, $D_{22} = Z$, $D_{33} = T$.

Лемма 6. *Если $p = 5$, то матрица D (эквивалентно, A), определяющая автотопизм α, имеет вид*

$$D = \begin{pmatrix} X - E & Y + 2E & X + E & Z \\ Y + 2E & -X - E & X - E & -Z \\ -X - E & -X + E & Y + 2E & Z \\ T & -T & -T & E \end{pmatrix}, \tag{25}$$

где выполнены условия на блоки:

$$\begin{cases} X^2 = Y, \\ Y^2 = 0, \\ ZT = Y, \\ TZ = 0, \\ XY = YX = 0, \\ TX = TY = 0, \\ XZ = YZ = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Заметим, что в общем случае матрицы A и D различны, что усложняет расчеты. Для дальнейшего уточнения их вида докажем вспомогательную лемму.

Лемма 7. *Пусть R — регулярное множество в $GL_n(p) \cup \{0\}$, T и Z — $(n \times n)$-матрицы над $\mathbb{Z}_p$. Если для всех матриц $U \in R$ верно $TUZ = 0$, то $T = 0$ либо $Z = 0$.*

Доказательство. Предположим, что $T \neq 0$ и $Z \neq 0$. Пусть T содержит ненулевую строку $t = (t_{i1}, \ldots, t_{in})$, Z содержит ненулевой столбец $z = \begin{pmatrix} z_{1j} \\ \vdots \\ z_{nj} \end{pmatrix}$. Тогда все элементы множества $M = \{tU \mid U \in R\}$ различны. Действительно, пусть $tU_1 = tU_2$ для некоторых $U_1, U_2 \in R$, $U_1 \neq U_2$. Тогда $t(U_1 - U_2) = 0$, $\det(U_1 - U_2) \neq 0$ и $t = 0$, что противоречит предположению.

Рассмотрим линейное уравнение $z_{1j}x_1 + z_{2j}x_2 + \cdots + z_{nj}x_n = 0$. Его решения образуют $(n-1)$-мерное линейное подпространство в $\mathbb{Z}_p^n$, но из условия $TUZ = 0$ следует, что все p^n элементов множества M являются решениями этого уравнения. Полученное противоречие доказывает лемму.

Лемма 8. *Пусть полуполевая плоскость порядка 5^{4n} допускает автотопизм $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, где A и D имеют вид* (25). *Тогда $X_A = Y_A = X_D = Y_D = 0$.*

Доказательство. Запишем матрицы A и D:

$$A = \begin{pmatrix} X_A - E & Y_A + 2E & X_A + E & Z_A \\ Y_A + 2E & -X_A - E & X_A - E & -Z_A \\ -X_A - E & -X_A + E & Y_A + 2E & Z_A \\ T_A & -T_A & -T_A & E \end{pmatrix},$$

$$D = \begin{pmatrix} X_D - E & Y_D + 2E & X_D + E & Z_D \\ Y_D + 2E & -X_D - E & X_D - E & -Z_D \\ -X_D - E & -X_D + E & Y_D + 2E & Z_D \\ T_D & -T_D & -T_D & E \end{pmatrix},$$

предполагая, что матрицы $X_A, Y_A, Z_A, T_A, X_D, Y_D, Z_D, T_D$ удовлетворяют условиям (26).

Так как α — автотопизм, то для всех матриц $\theta(V_1, U_1, V_2, U_2)$ регулярного множества произведение $A^{-1}\theta(V_1, U_1, V_2, U_2)D$ также принадлежит регулярному множеству. Рассмотрим матрицу $C = A^{-1}\theta(0, 0, 0, U_2)D$ и выпишем некоторые ее элементы:

$$\begin{aligned}
C_{11} &= (X_A - E)\mu(U_2)(X_D - E) + (Y_A + 2E)\mu(U_2)(Y_D + 2E) + \\
&\quad + (-X_A - E)\mu(U_2)(-X_D - E) - Z_A U_2 T_D, \\
C_{12} &= (X_A - E)\mu(U_2)(Y_D + 2E) + (Y_A + 2E)\mu(U_2)(-X_D - E) + \\
&\quad + (-X_A - E)\mu(U_2)(-X_D + E) - Z_A U_2 T_D, \\
C_{13} &= (X_A - E)\mu(U_2)(X_D + E) + (Y_A + 2E)\mu(U_2)(X_D - E) + \\
&\quad + (-X_A - E)\mu(U_2)(Y_D + 2E) + Z_A U_2 T_D, \\
C_{14} &= (X_A - E)\mu(U_2)Z_D - (Y_A + 2E)\mu(U_2)Z_D + (-X_A - E)\mu(U_2)Z_D - Z_A U_2; \\
C_{41} &= -T_A\mu(U_2)(X_D - E) + T_A\mu(U_2)(Y_D + 2E) + T_A\mu(U_2)(X_D + E) + U_2 T_D, \\
C_{42} &= -T_A\mu(U_2)(Y_D + 2E) - T_A\mu(U_2)(X_D + E) - T_A\mu(U_2)(-X_D + E) - U_2 T_D, \\
C_{43} &= -T_A\mu(U_2)(X_D + E) + T_A\mu(U_2)(X_D - E) - T_A\mu(U_2)(Y_D + 2E) - U_2 T_D, \\
C_{44} &= -3T_A\mu(U_2)Z_D + U_2.
\end{aligned}$$

Здесь $C_{44} \in Q_2$, поэтому $C_{44} - U_2 \in Q_2$ и $T_A\mu(U_2)Z_D \in Q_2$ для всех $U_2 \in Q_2$.

Если $|T_A| \neq 0$, то из условий (26) имеем $X_A = Y_A = Z_A = 0$. Если $|Z_D| \neq 0$, то из условий (26) имеем $X_D = Y_D = T_D = 0$.

Пусть $|T_A| = |Z_D| = 0$, тогда $T_A\mu(U_2)Z_D = 0$ для всех $U_2 \in Q_2$. Так как $\{\mu(U_2) \mid U_2 \in Q_2\}$ — регулярное множество, то по лемме 6 $T_A = 0$ или $Z_D = 0$.

Пусть $T_A = 0$, тогда $C_{41} = U_2 T_D$. Если $|T_D| \neq 0$, то $X_D = Y_D = 0$. При $|T_D| = 0$ получаем $U_2 T_D = 0$, $T_D = 0$. Тогда $A^{-1}\theta(0, 0, 0, U_2)D = \theta(0, 0, 0, U_2)$ для всех $U_2 \in Q_2$. При $U_2 = E$ получим $A = D$, $X_A = X_D$, тогда для всех $U_2 \in Q_2$ верно $\mu(U_2)X_A = X_A\mu(U_2)$. Умножим это равенство слева на X_A:

$$X_A\mu(U_2)X_A = X_A^2\mu(U_2).$$

Если $X_A^2 = 0$, то по лемме 6 имеем $X_A = 0$. Если $X_A^2 \neq 0$, то при повторном умножении получим

$$X_A^2\mu(U_2)X_A = X_A^3\mu(U_2) = 0$$

и $X_A^2 = 0$ либо $X_A = 0$, противоречие. Итак, при $T_A = 0$ получили $X_A = X_D = 0$.

Пусть $Z_D = 0$, тогда $C_{14} = -Z_A U_2 = \varphi(C_{41})$. Если $|Z_A| \neq 0$, то $X_A = Y_A = 0$. При $|Z_A| = 0$ получаем $Z_A U_2 = 0$ и, следовательно, $Z_A = 0$, $C_{41} = 0$. Аналогично $C_{42} = C_{43} = 0$, тогда $A^{-1}\theta(0,0,0,U_2)D = \theta(0,0,0,U_2)$ и, как в предыдущем случае, $X_A = X_D = 0$.

Таким образом, более подробного рассмотрения требуют случаи:

1) $|T_A| \neq 0$, $X_A = Y_A = Z_A = 0$;
2) $|Z_A| \neq 0$, $X_A = Y_A = Z_A = 0$;
3) $|T_D| \neq 0$, $X_D = Y_D = Z_D = 0$;
4) $|Z_D| \neq 0$, $X_D = Y_D = Z_D = 0$.

Рассуждения во всех четырех случаях аналогичные. Например, в первом случае вычислим произведение $A^{-1}D = C$ и получим $C_{11} = 2Y_D + E$. Так как $Y_D^2 = 0$ и $Y_D = \mu(U)$ для некоторого $U \in Q_2$, то $Y_D = 0$. Тогда $C_{12} = -X_D$ и, в силу вырожденности, $X_D = 0$. Проводя вычисления для случаев 2–4, приходим к окончательному выводу $X_A = X_D = 0$, что доказывает лемму.

Лемма 9. *Пусть полуполевая плоскость порядка 5^{4n} допускает автотопизм $\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$, где A и D имеют вид* (25). *Тогда матрица регулярного множества плоскости имеет вид* (1).

Доказательство. Вычислим произведение $A^{-1}D$ при $X_A = Y_A = X_D = Y_D = 0$, тогда произведение $A^{-1}D = A^2D$ является элементом регулярного множества,

$$A^{-1}D = \begin{pmatrix} E - Z_AT_D & Z_AT_D & Z_AT_D & Z_D - Z_A \\ Z_AT_D & E - Z_AT_D & -Z_AT_D & -Z_D + Z_A \\ Z_AT_D & -Z_AT_D & E - Z_AT_D & -Z_D + Z_A \\ -T_A + T_D & T_A - T_D & T_A - T_D & -3T_AZ_D + E \end{pmatrix}.$$

Так как $A^{-1}D$ и E принадлежат регулярному множеству, то из вырожденности матриц Z_AT_D и T_AZ_D вытекает равенство их нулю, тогда

$$A^{-1}D - E = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & Z_D - Z_A \\ 0 & 0 & 0 & -Z_D + Z_A \\ 0 & 0 & 0 & -Z_D + Z_A \\ -T_A + T_D & T_A - T_D & T_A - T_D & 0 \end{pmatrix}$$

— нулевая матрица и $Z_A = Z_D$, $T_A = T_D$, $A = D$.

Продолжим рассмотрение этого случая и получим ограничения на матрицы регулярного множества, используя условие $D^2\theta(V_1, U_1, V_2, U_2)D \in R$ для всех возможных V_1, U_1, V_2, U_2. В частности, для $V_1 = U_1 = U_2 = 0$ обозначим произведение $D^2\theta(0,0,V_2,0)D = C$ и выпишем некоторые блоки-подматрицы C_{ij}:

$$\begin{aligned} C_{41} &= -T\psi(V_2) - 2T\nu(V_2) - V_2 - T\varphi(V_2)T; \\ C_{42} &= 2T\psi(V_2) + T\nu(V_2) + V_2 + T\varphi(V_2)T; \\ C_{43} &= T\psi(V_2) + T\nu(V_2) + 2V_2 + T\varphi(V_2)T; \\ C_{44} &= T\varphi(V_2)Z + T\nu(V_2)Z + V_2Z - T\varphi(V_2). \end{aligned}$$

Вычтем из полученной матрицы $\theta(-V_2, V_2, 2V_2, 0)$ и увидим в 4-ой строке вырожденные матрицы, которые, следовательно, являются нулевыми:

$$\begin{cases} C_{41} + V_2 = -T\psi(V_2) - 2T\nu(V_2) - T\varphi(V_2)T = 0, \\ C_{42} - V_2 = 2T\psi(V_2) + T\nu(V_2) + T\varphi(V_2)T = 0, \\ C_{43} - 2V_2 = T\psi(V_2) + T\nu(V_2) + T\varphi(V_2)T = 0. \end{cases}$$

Из полученной системы $T\nu(V_2) = T\psi(V_2) = 0$ для всех V_2, поэтому $T = 0$. Тогда $C_{44} = V_2Z$ — вырожденная матрица, $Z = 0$. Подставляя $T = Z = 0$ в матрицу C, получим

$$\begin{pmatrix} -2\psi(V_2) - 2\nu(V_2) & -\psi(V_2) + \nu(V_2) & 2\psi(V_2) + \nu(V_2) & -\varphi(V_2) \\ \psi(V_2) - \nu(V_2) & -2\psi(V_2) - 2\nu(V_2) & -\psi(V_2) - 2\nu(V_2) & \varphi(V_2) \\ \psi(V_2) + 2\nu(V_2) & -2\psi(V_2) - \nu(V_2) & -\psi(V_2) - \nu(V_2) & 2\varphi(V_2) \\ -V_2 & V_2 & 2V_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

В силу равенства C матрице $\theta(-V_2, V_2, 2V_2, 0)$ получаем $\nu(V_2) = -\psi(V_2)$, что приводит к регулярному множеству вида (1). Лемма доказана.

Так как в поле $\mathbb{Z}_5$ элемент -1 является квадратом, делаем заключение о невозможности рассмотренного случая: не существует полуполевых плоскостей порядка 5^{4n}, допускающих подгруппу автотопизмов, изоморфную знакопеременной группе A_5. Теоремы 1 и 2 полностью доказаны.

Список литературы

1. Hughes D. R., Piper F. C. Projective planes: Springer–Verlag New–York Inc., 1973.
2. Мазуров В. Д., Хухро Е. И. Нерешенные вопросы теории групп. Коуровская тетрадь. Издание 16-е, дополненное, включающее архив решенных задач: Новосибирск, 2006.
3. Huang H., Johnson N. L. 8 semifield planes of order 8^2 // Discrete Math. 1990. V. 80. №1. P. 69–79.
4. Подуфалов Н. Д., Дураков Б. К., Кравцова О. В., Дураков Е. Б. О полуполевых плоскостях порядка 16^2 // Сиб. Мат. Журн. 1996. V. 37. №3. P. 616–623.
5. Левчук В. М., Панов С. В., Штуккерт П. К. Вопросы перечисления проективных плоскостей и латинских прямоугольников // Механика и моделирование. Красноярск: СибГАУ, 2012. P. 56–70.
6. Abatangelo V., Emma D., Larato B. Translation planes of order 23^2 // Contributions to Discrete Mathematics 2013. V. 8. №2. P. 1–18.
7. Jha V., Johnson N. L. The translation planes of order 81 admitting $SL(2,5)$ // Note di Matematica 2005. V. 24. №2. P. 59–73.
8. Kravtsova O. V. Semifield planes of odd order that admit a subgroup of autotopisms isomorphic to A_4 // Russian Mathematics 2016. V. 60. №9. P. 7–22.
9. Podufalov N. D. On spread sets and collineations of projective planes // Contem. Math. 1992. V. 131. №1. P. 697–705.
10. Коксетер Г. С. М., Мозер У. О. Дж. Порождающие элементы и определяющие соотношения дискретных групп. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1980.