УДК 517.5

Об одном аналоге формулы Плана

В.И. Кузоватов, А.М. Кытманов[1]

Аннотация

В работе получен аналог формулы Плана, которая имеет существенное значение при нахождении функционального соотношения для классической дзета-функции Римана. Приведены примеры рациональных функций, удовлетворяющих некоторому условию симметричности и разложению в ряд Маклорена с единичными и нулевыми коэффициентами.

Ключевые слова: формула Плана, целая функция, интегральное представление.

Введение

Целью данной работы является получение аналога формулы Плана (см., например, пример 7 главы 7 из [1]), которая имеет существенное значение при нахождении функционального соотношения (см., например, глава 2, п. 9 из [2]) для классической дзета-функции Римана.

Классическая формула Плана выражает сумму значений в целых точках голоморфной и ограниченной (для всех значений z, для которых $x_1 \le \operatorname{Re} z \le x_2$, x_1, x_2 – целые числа) функции $\varphi(z)$ через некоторые интегралы. А именно,

$$\frac{1}{2}\varphi(x_1) + \varphi(x_1+1) + \varphi(x_1+2) + \ldots + \varphi(x_2-1) + \frac{1}{2}\varphi(x_2) =$$
$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi(z)\, dz + \frac{1}{i}\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\varphi(x_2+iy) - \varphi(x_2-iy) + \varphi(x_1-iy) - \varphi(x_1+iy)}{e^{2\pi y}-1}\, dy.$$

Применяя формулу Плана к ряду (здесь, как обычно, $\Gamma(z)$ это Γ–функция Эйлера)

$$\frac{d^2}{dz^2}\lg\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(z+n)^2}$$

в случае, если вещественная часть z положительна, получено (см., например, глава 12, п. 12.32 из [1]) интегральное представление Бине для $\lg\Gamma(z)$:

$$\frac{d}{dz}\lg\Gamma(z) = -\frac{1}{2z} + \lg z - 2\int\limits_0^{\infty}\frac{t\, dt}{(z^2+t^2)(e^{2\pi t}-1)}.$$

Используя представление Бине для $\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, получено следующее интегральное представление для вещественных x:

$$\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} - \ln x = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)} + \frac{1}{x} - \ln x = \frac{1}{2x} - 2\int\limits_0^{\infty}\frac{t\, dt}{(t^2+x^2)(e^{2\pi t}-1)} =$$

[1]Авторы поддержаны грантом Правительства РФ для проведения исследований под руководством ведущих ученых в Сибирском федеральном университете (договор №14.Y26.31.0006), Российским фондом фундаментальных исследований (коды проектов 15-01-00277, 16-31-00173) и грантом Президента РФ для поддержки ведущих научных школ № НШ-9149.2016.1.

$$= -2 \int\limits_0^\infty \frac{t}{t^2 + x^2} \left(\frac{1}{e^{2\pi t} - 1} - \frac{1}{2\pi t} \right) dt.$$

Подставляя найденное соотношение в интегральное представление для дзета-функции Римана $\zeta(s)$ и меняя порядок интегрирования, можно получить функциональное соотношение (см., например, глава 2, п. 9 из [2]) для классической дзета-функции Римана.

Напомним (см., например, глава 2, п. 9 из [2]), что интегральное представление для дзета-функции Римана $\zeta(s)$ в полосе $0 < \mathrm{Re}\, s < 1$ имеет вид:

$$\zeta(s) = -\frac{\sin \pi s}{\pi} \int\limits_0^\infty \left\{ \frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)} - \ln x \right\} x^{-s}\, dx.$$

Если говорить об обобщениях дзета-функции, то И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан и Л.А. Дикий изучали (см., например, работы [3, 4, 5]) дзета-функцию, ассоциированную с собственными значениями оператора Штурма-Лиувилля в 50-х годах прошлого века. Ее значение оказалось связанным со следом данного оператора. Их подход был развит [6] далее В.Б. Лидским и В.А. Садовничим (60 годы), которые рассмотрели класс целых функций одного переменного, определили для них дзета-функцию корней и исследовали ее область аналитического продолжения. В работе [7] С.А. Смагин и М.А. Шубин строят дзета-функцию эллиптических операторов и операторов более общего вида, доказывают возможность мероморфного продолжения дзета-функции и дают некоторую информацию о полюсах.

Многомерные результаты получены А.М. Кытмановым и С.Г. Мысливец в работе [8]. Данными авторами было введено понятие дзета-функции, ассоциированной с системой мероморфных функций $f = (f_1, \ldots, f_n)$ в $\mathbb{C}^n$. С использованием теории вычетов этими авторами было дано интегральное представление для дзета-функции, однако в работе были наложены жесткие условия на систему функций $f_1, \ldots, f_n$.

В работе [9] В.И. Кузоватовым и А.А. Кытмановым с использованием теории вычетов получены два интегральных представления для дзета-функции, построенной по нулям целой функции конечного порядка роста на комплексной плоскости. С помощью этих представлений описана область, в которую эта дзета-функция продолжается.

1 Предварительные результаты

Сформулируем результаты из работы [9]. Пусть $f(z)$ – целая функция порядка ρ в $\mathbb{C}$. Рассмотрим уравнение

$$f(z) = 0. \tag{1.1}$$

Обозначим через $N_f = f^{-1}(0)$ множество всех корней уравнения (1.1) (каждый корень считается столько раз, какова его кратность). Число корней не более чем счетно.

Дзета-функция $\zeta_f(s)$ корней уравнения (1.1) определяется следующим образом:

$$\zeta_f(s) = \sum_{a \in N_f} (-a)^{-s},$$

где $s \in \mathbb{C}$. Знак минус в определении дзета-функции взят для удобства записи интегральных формул.

Приведем интегральное представление для дзета-функции $\zeta_f(s)$ нулей z_n функции f, которые имеют вид

$$z_n = -q_n + is_n, \quad q_n > 0.$$

Обозначим

$$F(f,x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{z_n x} \tag{1.2}$$

и предположим, что Re $s = \sigma > 1$ и выполнены следующие условия:

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{q_n}{n} > 0, \tag{1.3}$$

$$\text{ряд} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q_n}\right)^{\sigma-1} \text{сходится.} \tag{1.4}$$

Теорема 1 ([9])**.** *Пусть выполнены условия* (1.3), (1.4) *и* $\mathrm{Re}\, s > 1$. *Тогда*

$$\zeta_f(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int\limits_0^{\infty} x^{s-1} F(f,x)\, dx,$$

где $F(f,x)$ *определяется формулой* (1.2).

В данной статье будем предполагать, что нули z_n имеют вид

$$z_n = -q_n, \quad q_n > 0,$$

где q_n образуют некоторую последовательность натуральных чисел.

Рассмотрим функцию

$$F(z) = F(f, 2\pi i z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{z_n 2\pi i z} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-q_n 2\pi i z}.$$

При помощи замены $e^{-2\pi i z} = w$ последний ряд приводится к виду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w^{q_n}$ или

$$G(w) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n w^n, \tag{1.5}$$

где коэффициенты f_n определяются следующим образом:

$$f_n = \begin{cases} 1, & n = q_k \\ 0, & n \neq q_k, \end{cases} \qquad \text{поэтому} \quad \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|f_n|} = 1.$$

Заметим, что в ряде (1.5) бесконечное число коэффициентов f_n отлично от нуля.

При $|w| \to 1-0$ функция $G(w)$ становится неограниченной, но является голоморфной в единичном круге. Таким образом, $G(w)$ не продолжается в точку 1. Теорема Фабри о лакунах (см., например, [10, §2.3]) показывает, что можно подобрать коэффициенты ряда так, что у полученной функции $G(w)$ вся окружность будет являться естественной границей.

2 Основной результат

В дальнейшем ограничимся рассмотрением классов рациональных функций $G(w)$, для которых справедливо представление (1.5). Относительно этого сформулируем (см., например, [10, §6.1]) следующий результат.

Теорема 2 (Сеге, [10])**.** *Степенной ряд*

$$G(w) = \sum_{0}^{\infty} f_n w^n, \tag{2.1}$$

коэффициенты которого f_n могут принимать лишь конечное число различных значений, или представляет собой рациональную функцию, или непродолжаем за пределы единичного круга. В случае рациональности суммы ряда (2.1)

$$G(w) = \frac{P(w)}{1 - w^N},$$

где $P(w)$ — многочлен, а N — некоторое целое неотрицательное число.

Это означает, что особыми точками (в данном случае полюсами первого порядка) для функции $G(w)$ могут быть только точки

$$w_k = e^{i\frac{2\pi}{N}k}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \quad N \in \mathbb{N}.$$

В переменных z для функции $F(z)$ особыми точками будут точки

$$e^{-2\pi i z} = w_k, \quad -2\pi i z = i\left(\frac{2\pi}{N}k + 2\pi l\right), \quad z = -\left(\frac{k}{N} + l\right), \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

или что то же самое

$$z_{k,l} = l - \frac{k}{N}, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1.$$

Пусть для q_n выполнено соотношение (1.3). Предположим дополнительно, что выполнено следующее условие:

$$1 + F(f, 2\pi i z) = -F(f, -2\pi i z) \tag{2.2}$$

и вытекающее из него

$$-\big(1 + F(f, -2\pi y)\big) = F(f, 2\pi y). \tag{2.3}$$

Обсуждение условий (2.2) и (2.3) будет приведено ниже.

Теорема 3. *Пусть x_1 и x_2 — целые числа, а $\varphi(z)$ — функция, голоморфная и* *ограниченная на множестве* $\{x_1 \le \mathrm{Re}\ z \le x_2\}$. *Тогда*

(2.4)

$$\frac{P(w_0)}{N}\left(\frac{1}{2}\varphi(x_1)+\varphi(x_1+1)+\varphi(x_1+2)+\ldots+\varphi(x_2-1)+\frac{1}{2}\varphi(x_2)\right)+$$
$$+\frac{P(w_1)}{N}\left(\varphi\big(x_1+1-\frac{1}{N}\big)+\varphi\big(x_1+2-\frac{1}{N}\big)+\ldots+\varphi\big(x_2-1-\frac{1}{N}\big)+\varphi\big(x_2-\frac{1}{N}\big)\right)+$$
$$+\frac{P(w_2)}{N}\left(\varphi\big(x_1+1-\frac{2}{N}\big)+\varphi\big(x_1+2-\frac{2}{N}\big)+\ldots+\varphi\big(x_2-1-\frac{2}{N}\big)+\varphi\big(x_2-\frac{2}{N}\big)\right)+$$
$$+\ldots+$$
$$+\frac{P(w_{N-1})}{N}\left(\varphi\big(x_1+1-\frac{N-1}{N}\big)+\varphi\big(x_1+2-\frac{N-1}{N}\big)+\ldots+\varphi\big(x_2-1-\frac{N-1}{N}\big)+\right.$$
$$\left.+\,\varphi\big(x_2-\frac{N-1}{N}\big)\right)=$$
$$=\int\limits_{x_1}^{x_2}\varphi(z)\,dz+\frac{1}{i}\int\limits_0^{\infty}\big[\varphi(x_2+iy)-\varphi(x_2-iy)+\varphi(x_1-iy)-\varphi(x_1+iy)\big]F(f,2\pi y)\,dy.$$

Здесь $F(f,2\pi y)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}e^{-q_n 2\pi y}$.

Доказательство. Заметим, что функция $F(f,2\pi y)$ имеет простой полюс в точке $y=0$. Других особых точек нет у функции $F(f,2\pi y)$ при $y>0$. У функции $F(f,-2\pi y)$ в силу тождества (2.3) при $y>0$ тоже нет особенностей. Выражение $\varphi(x_2+iy)-\varphi(x_2-iy)+\varphi(x_1-iy)-\varphi(x_1+iy)$ в формуле (2.4) обращается в 0 в точке $y=0$, поэтому подынтегральное выражение в формуле (2.4) не имеет особенностей. В дальнейшем мы проводим рассуждения, как будто бы функция $F(f,-2\pi y)$ особенностей не имеет, но это не приводит к противоречию, поскольку интегралы можно рассматривать по дополнению к отрезку $[0,\varepsilon]$, а в результирующей формуле перейти к пределу при $\varepsilon\to+0$.

Рассмотрим интеграл

$$\int\limits_{\gamma_R}\varphi(z)\,F(z)\,dz \tag{2.5}$$

по границе прямоугольника γ_R, имеющим вершины в точках $x_2\pm iR$, $x_1\pm iR$, $R>0$.

Заметим, что ввиду наличия особых точек x_1 и x_2 (для подынтегрального выражения $\varphi(z)\,F(z)$) на контуре интегрирования γ_R, интеграл (2.5) следует рассматривать в смысле главного значения по Коши, то есть

$$\text{v. p.}\int\limits_{\gamma_R}\varphi(z)\,F(z)\,dz.$$

Вместо контура γ_R будем рассматривать контур $\widetilde{\gamma}_R$, который получается из контура γ_R удалением отрезков $[x_2-i\delta;x_2+i\delta]$ и $[x_1+i\delta;x_1-i\delta]$ и заменой их дугой окружности радиуса δ с центром в точке $(x_2,0)$ и $(x_1,0)$ соответственно.

Согласно теореме Коши

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}_R} \varphi(z)\, F(z)\, dz = \sum_{k,l} \int\limits_{\gamma_{k,l}} \varphi(z)\, F(z)\, dz,$$

где $\gamma_{k,l}$ — окружность достаточно малого радиуса с центром в точке $z_{k,l}$, ориентированная против часовой стрелки. В свою очередь (по определению вычета)

$$\int\limits_{\gamma_{k,l}} \varphi(z)\, F(z)\, dz = 2\pi i \operatorname*{res}_{z=z_{k,l}} \big(\varphi(z)\, F(z)\big).$$

Поскольку $z_{k,l}$ являются полюсами первого порядка, то

$$\operatorname*{res}_{z=z_{k,l}} \big(\varphi(z)\, F(z)\big) = \operatorname*{res}_{z=z_{k,l}} \left(\varphi(z)\, \frac{P\left(e^{-2\pi i z}\right)}{1 - e^{-2\pi i z N}}\right) = \frac{\varphi(z_{k,l})\, P\left(e^{-2\pi i z_{k,l}}\right)}{2\pi i N e^{-2\pi i z_{k,l} N}} =$$

$$= \frac{\varphi(z_{k,l})\, P(w_k)}{2\pi i N w_k^N} = \frac{\varphi(z_{k,l})\, P(w_k)}{2\pi i N}.$$

Таким образом,

$$\int\limits_{\gamma_{k,l}} \varphi(z)\, F(z)\, dz = \frac{\varphi(z_{k,l})\, P(w_k)}{N},$$

$$\int\limits_{\widetilde{\gamma}_R} \varphi(z)\, F(z)\, dz = \sum_{k,l} \varphi(z_{k,l})\, \frac{P(w_k)}{N},$$

где суммирование берется по всем точкам $z_{k,l}$, лежащих в отрезке $[x_1; x_2]$.

Перейдя к пределу при $\delta \to +0$, получим левую часть формулы (2.4). При этом вычет в граничных точках x_1 и x_2 согласно теории вычетов берется с коэффициентом $1/2$ по формулам Привалова – Племеля.

С другой стороны, выбирая направление обхода против часовой стрелки, исходный контурный интеграл (2.5) можно представить в виде суммы четырех интегралов по сторонам прямоугольника. А именно,

$$\int\limits_{\gamma_R} \varphi(z)\, F(z)\, dz = \int\limits_{x_2 - iR}^{x_2 + iR} \varphi(z)\, F(z)\, dz + \int\limits_{x_2 + iR}^{x_1 + iR} \varphi(z)\, F(z)\, dz + \int\limits_{x_1 + iR}^{x_1 - iR} \varphi(z)\, F(z)\, dz +$$

$$+ \int\limits_{x_1 - iR}^{x_2 - iR} \varphi(z)\, F(z)\, dz = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,$$

перейдя в дальнейшем к пределу при $R \to +\infty$.

Найдем значение интеграла I_1. Будем иметь

$$I_1 = \int\limits_{x_2 - iR}^{x_2 + iR} \varphi(z)\, F(z)\, dz = \int\limits_{x_2 - iR}^{x_2} \varphi(z)\, F(z)\, dz + \int\limits_{x_2}^{x_2 + iR} \varphi(z)\, F(z)\, dz.$$

$$\int\limits_{x_2 - iR}^{x_2} \varphi(z)\, F(z)\, dz = i \int\limits_{-R}^{0} \varphi(x_2 + iy)\, F(x_2 + iy)\, dy =$$

$$= -i\int\limits_R^0 \varphi\left(x_2 - i\tau\right) F\left(x_2 - i\tau\right)\, d\tau = i\int\limits_0^R \varphi\left(x_2 - i\tau\right) F\left(x_2 - i\tau\right)\, d\tau =$$

$$= \frac{1}{i}\int\limits_0^R \big(-\varphi\left(x_2 - iy\right)\big) F\left(x_2 - iy\right)\, dy = \frac{1}{i}\int\limits_0^R \big(-\varphi\left(x_2 - iy\right)\big) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-q_n 2\pi i (x_2 - iy)}\, dy =$$

$$= \frac{1}{i}\int\limits_0^R \big(-\varphi\left(x_2 - iy\right)\big) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-q_n 2\pi y}\, dy = \frac{1}{i}\int\limits_0^R \big(-\varphi\left(x_2 - iy\right)\big) F\left(f, 2\pi y\right)\, dy.$$ Далее

$$\int\limits_{x_2}^{x_2+iR} \varphi\left(z\right) F\left(z\right) dz = i\int\limits_0^R \varphi\left(x_2 + iy\right) F\left(x_2 + iy\right)\, dy =$$

$$= \frac{1}{i}\int\limits_0^R \varphi\left(x_2 + iy\right)\big(-F\left(f, -2\pi y\right)\big)\, dy = \frac{1}{i}\int\limits_0^R \varphi\left(x_2 + iy\right)\big(1 - 1 - F\left(f, -2\pi y\right)\big)\, dy =$$

$$= \frac{1}{i}\int\limits_0^R \varphi\left(x_2 + iy\right)\, dy - \frac{1}{i}\int\limits_0^R \big(1 + F\left(f, -2\pi y\right)\big)\varphi\left(x_2 + iy\right)\, dy.$$

Равенство $F\left(x_2 + iy\right) = F\left(f, -2\pi y\right)$ выполняется, поскольку $e^{2\pi i z} = e^{2\pi i (x_j + iy)} = e^{-2\pi y}$, $j = 1, 2$.

Таким образом, при выполнении условий (2.3) значение интеграла I_1 равно

$$I_1 = \int\limits_{x_2 - iR}^{x_2+iR} \varphi\left(z\right) F\left(z\right) dz =$$
$$= \frac{1}{i}\int\limits_0^R \varphi\left(x_2 + iy\right) dy + \frac{1}{i}\int\limits_0^R \big(\varphi\left(x_2 + iy\right) - \varphi\left(x_2 - iy\right)\big) F\left(f, 2\pi y\right) dy.$$

Аналогично, получим значение для интеграла I_3:

$$I_3 = \int\limits_{x_1 + iR}^{x_1 - iR} \varphi\left(z\right) F\left(z\right) dz = -\int\limits_{x_1 - iR}^{x_1 + iR} \varphi\left(z\right) F\left(z\right) dz =$$
$$= -\frac{1}{i}\int\limits_0^R \varphi\left(x_1 + iy\right) dy + \frac{1}{i}\int\limits_0^R \big(\varphi\left(x_1 - iy\right) - \varphi\left(x_1 + iy\right)\big) F\left(f, 2\pi y\right) dy.$$

Покажем, что интеграл $I_4 \to 0$ при $R \to +\infty$. Имеем

$$I_4 = \int\limits_{x_1 - iR}^{x_2 - iR} \varphi\left(z\right) F\left(z\right) dz = \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi\left(x - iR\right) F\left(x - iR\right) dx =$$
$$= \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi\left(x - iR\right) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-q_n 2\pi i (x - iR)}\, dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi\left(x - iR\right) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-q_n 2\pi i x} e^{-q_n 2\pi R}\, dx.$$

$$|I_4| = \left| \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi\left(x - iR\right) \sum_{n=1}^{\infty} e^{-q_n 2\pi i x} e^{-q_n 2\pi R}\, dx \right| \le \int\limits_{x_1}^{x_2} \left|\varphi\left(x - iR\right)\right| \sum_{n=1}^{\infty} e^{-q_n 2\pi R} dx \le$$

$$\le \left(x_2 - x_1\right) \widetilde{C} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-q_n 2\pi R} \to 0, \quad \text{когда} \;\; R \to +\infty,$$

поскольку $e^{-q_n 2\pi R} \to 0$ при $R \to +\infty$. Константа $\widetilde{C} > 0$ выбирается из условия ограниченности функции φ на данном множестве интегрирования.

Для обоснования перемены порядка суммирования и перехода к пределу (при $R \to +\infty$) необходимо доказать равномерную сходимость ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-q_n 2\pi R}$ по R на множестве $[1; +\infty)$. Имеем

$$\begin{aligned} &\left|\frac{1}{e^{q_n 2\pi R}}\right| \le \frac{1}{e^{q_n 2\pi}} \le \frac{1}{e^{q_n}}, \\ &\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{\frac{1}{e^{q_n}}} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{1}{e^{\frac{q_n}{n}}} = \frac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, e^{\frac{q_n}{n}}} = \frac{1}{e^{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} \frac{q_n}{n}}} < 1 \end{aligned}$$

ввиду условия (1.3). Таким образом, ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{e^{q_n}}$ сходится по признаку Коши и исходный ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-q_n 2\pi R}$ сходится абсолютно и равномерно по признаку Вейерштрасса по R на множестве $[1; +\infty)$.

Поскольку $\varphi\left(z\right)$ — голоморфная функция на рассматриваемом прямоугольнике, то из теоремы Коши получаем

$$\int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi\left(z\right) dz = -\int\limits_{x_2}^{x_2+iR} \varphi\left(z\right) dz - \int\limits_{x_2+iR}^{x_1+iR} \varphi\left(z\right) dz - \int\limits_{x_1+iR}^{x_1} \varphi\left(z\right) dz.$$

Рассмотрим интегралы

$$\begin{aligned} &\frac{1}{i}\int\limits_{0}^{R} \varphi\left(x_2 + iy\right)\, dy - \frac{1}{i}\int\limits_{0}^{R} \varphi\left(x_1 + iy\right)\, dy + \int\limits_{x_2+iR}^{x_1+iR} \varphi\left(z\right) F\left(z\right) dz = \\ &= -i\int\limits_{0}^{R} \varphi\left(x_2 + iy\right)\, dy - i\int\limits_{R}^{0} \varphi\left(x_1 + iy\right)\, dy + \int\limits_{x_2+iR}^{x_1+iR} \varphi\left(z\right) F\left(z\right) dz = \\ &= \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi\left(z\right) dz + \int\limits_{x_2+iR}^{x_1+iR} \varphi\left(z\right) \left[1 + F\left(z\right)\right] dz. \end{aligned}$$

Завершающим этапом в доказательстве теоремы является обоснование того факта, что интеграл

$$I = \int\limits_{x_2+iR}^{x_1+iR} \varphi\left(z\right) \left[1 + F\left(z\right)\right] dz$$

стремится к нулю при $R \to +\infty$. Используя условие (2.2), проведем следующие преобразования.

$$I = \int\limits_{x_2+iR}^{x_1+iR} \varphi(z)\left[1 + F(f, 2\pi iz)\right] dz = -\int\limits_{x_2+iR}^{x_1+iR} \varphi(z)\, F(f, -2\pi iz)\, dz =$$
$$= -\int\limits_{x_2}^{x_1} \varphi(x+iR) \sum_{n=1}^{\infty} e^{q_n 2\pi i(x+iR)} dx = \int\limits_{x_1}^{x_2} \varphi(x+iR) \sum_{n=1}^{\infty} e^{q_n 2\pi ix} e^{-q_n 2\pi R} dx.$$

Аналогично для случая интеграла I_4 нетрудно показать, что интеграл $I \to 0$ при $R \to +\infty$.

Переходя к пределу при $R \to +\infty$ в выражении для контурного интеграла (2.5), получим утверждение теоремы. □

В случае, если $q_n = n$, то $G(w) = \dfrac{w}{1-w}$, $P(1) = 1$,

$$F(f, 2\pi y) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n2\pi y} = e^{-2\pi y} + e^{-4\pi y} + e^{-6\pi y} + \ldots = \frac{e^{-2\pi y}}{1 - e^{-2\pi y}} = \frac{1}{e^{2\pi y} - 1}$$

и мы получаем классическую формулу Плана, приведенную в начале данной статьи. При этом нетрудно видеть, что условия (2.2) и (2.3), безусловно, выполняются для функции $F(f, 2\pi y)$.

Доказанное обобщение формулы Плана в дальнейшем может быть использовано при получении аналога интегрального представления Бине. Тем самым будет осуществлен переход к получению функционального соотношения для дзета-функции корней некоторого класса целых функций.

3 Преобразование условия симметричности

Вернемся к обсуждению условия (2.2). Относительно этого сформулируем утверждение.

Лемма 1. *Условие* (2.2) *эквивалентно следующему условию на функцию* $G(w)$*:*

$$1 + G(w) = -G\left(\frac{1}{w}\right). \tag{3.1}$$

Доказательство. Рассмотрим условие (2.2). Отметим, что функция $G(w)$ получается из функции $F(f, 2\pi iz)$ заменой $e^{-2\pi iz} = w$. При этом функция $F(f, -2\pi iz)$ переходит в функцию $G\left(w^{-1}\right)$. □

Лемма 2. *Если*

$$G(w) = \frac{P(w)}{1 - w^N} = \frac{a_0 + a_1 w + a_2 w^2 + \ldots + a_N w^N}{1 - w^N},$$

то выполнение условия (3.1) *эквивалентно следующим условиям на коэффициенты полинома* $P(w)$*:*

$$1 + a_0 = a_N, \quad a_1 = a_{N-1}, \quad a_2 = a_{N-2}, \ldots, \quad a_p = a_{N-p},$$

где $p \in [1; N/2]$ *в случае четного* N *и* $p \in \left[1; \frac{N-1}{2}\right]$ *в случае нечетного* N.

Доказательство. Рассмотрим условие (3.1). Подставляя выражение для функции $G(w)$, получим:

$$1 + \frac{P(w)}{1 - w^N} = -\frac{P\left(\frac{1}{w}\right)}{1 - \dfrac{1}{w^N}}, \quad \frac{1 - w^N + P(w)}{1 - w^N} = \frac{P\left(\frac{1}{w}\right)}{1 - w^N} w^N,$$

$$1 - w^N + P(w) = P\left(\frac{1}{w}\right) w^N.$$

Подставляя в последнее соотношение выражение для $P(w)$, будем иметь

$$(1 + a_0) + a_1 w + a_2 w^2 + \ldots + (a_N - 1) w^N = \left(a_0 + \frac{a_1}{w} + \frac{a_2}{w^2} + \ldots + \frac{a_N}{w^N}\right) w^N,$$

$$\begin{aligned}(1 + a_0) + a_1 w + a_2 w^2 + \ldots + (a_N - 1) w^N = a_0 w^N + a_1 w^{N-1} + a_2 w^{N-2} + \ldots + \\ + a_{N-2} w^2 + a_{N-1} w + a_N.\end{aligned}$$

Приводя подобные при одинаковых степенях, получим утверждение леммы. □

Условие (2.2) можно понимать как некоторое условие симметричности (условие нечетности) по переменной z для функции $\psi(z) = \dfrac{1}{2} + F(f, 2\pi i z)$.

4 Примеры

Пример 1. Приведем пример рациональной функции $G(w)$, удовлетворяющей разложению (1.5). Пусть

$$G(w) = \frac{w}{(1 - w)(w^2 + 1)}.$$

Раскладывая функцию $G(w)$ в сумму простейших дробей, можно получить, что

$$G(w) = w\left(\frac{1/2}{1 - w} + \frac{1/2w + 1/2}{w^2 + 1}\right).$$

Далее разложим каждую из дробей в сумму геометрической прогрессии. Представляя одну из сумм в виде суммы слагаемых четных и нечетных степеней и приводя подобные, получим

$$\begin{aligned}G(w) &= w\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n w^{2n+1}}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n w^{2n}}{2}\right) = \\ &= w\left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + (-1)^k\right) \frac{w^{2k}}{2} + \sum_{k=0}^{\infty} \left(1 + (-1)^k\right) \frac{w^{2k+1}}{2}\right) = \\ &= w\left(1 + w + w^4 + w^5 + w^8 + w^9 + w^{12} + w^{13} + \ldots\right) = \sum_{n=1}^{\infty} w^{q_n},\end{aligned}$$

где

$$q_n = \{1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14, \ldots\}.$$

Заметим, что в данном примере $G\,(w)$ можно записать в виде

$$G\,(w)=\frac{w}{(1-w)\,(w^2+1)}=\frac{w\,(1+w)}{1-w^4}=\frac{w+w^2}{1-w^4}.$$

Пример 2. Приведем пример рациональной функции $G\,(w)$, удовлетворяющей условию (3.1) и представлению (1.5). Рассмотрим

$$\begin{aligned}G\,(w)&=\frac{w}{1-w}-\frac{w^2}{1-w^2}+\frac{w^4}{1-w^4}=\\&=w+w^3+w^4+w^5+w^7+w^8+w^9+w^{11}+w^{12}+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}w^{q_n}.\end{aligned}$$

Вычислим левую часть соотношения (3.1). Получим

$$1+G\,(w)=\frac{1}{1-w}-\frac{1}{1-w^2}+\frac{1}{1-w^4}.$$

Вычислим правую часть соотношения (3.1). Получим

$$-G\left(\frac{1}{w}\right)=\frac{1}{1-w}-\frac{1}{1-w^2}+\frac{1}{1-w^4}.$$

Здесь

$$q_n=\{1,3,4,5,7,8,9,11,12,\ldots\}.$$

Список литературы

[1] E.T.Whittaker, G.N.Watson, A Course of Modern Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1927.

[2] E.C.Titchmarsh, The Theory of the Riemann Zeta-Function, Oxford University Press, Oxford, 1951.

[3] И.М.Гельфанд, Б.М.Левитан, Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка, *Доклады Ак. наук СССР*, T. 88, no. 4, 593-596, 1953.

[4] Л.А.Дикий, Дзета-функция обыкновенного дифференциального уравнения на конечном отрезке, *Изв. АН СССР. Сер. матем.*, T. 19, no. 4, 187-200, 1955.

[5] Л.А.Дикий, Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма-Лиувилля, *УМН*, T. 13, no. 3(81), 111-143, 1958.

[6] V.B.Lidskii, V.A.Sadovnichii, Regularized Sums of Zeros of a Class of Entire Functions, *Functional Analysis and Its Applications*, **1**, no. 2, 133–139, 1967.

[7] S.A.Smagin, M.A.Shubin, On the Zeta-Function of a Transversally Elliptic Operator, *Russian Mathematical Surveys*, **39**, no. 2, 201–202, 1984.

[8] A.M.Kytmanov, S.G.Myslivets, On the Zeta-Function of Systems of Nonlinear Equations, *Siberian Math. J.*, **48**, no. 5, 863–870, 2007.

[9] V.I.Kuzovatov, A.A.Kytmanov, On the Zeta-Function of Zeros of Some Class of Entire Functions, *J. Siberian Federal Univ. Math. Phys.*, **7**, no. 4, 489–499, 2014.

[10] L.Bieberbach, Analytische Fortsetzung, Springer-Verlag, Berlin, 1955.

УДК 517.5

Об одном аналоге формулы Плана

В.И. Кузоватов, А.М. Кытманов

В работе получен аналог формулы Плана, которая имеет существенное значение в получении функционального соотношения при помощи интегральных представлений для классической дзета-функции Римана. Приведены примеры рациональных функций, удовлетворяющих некоторому условию симметричности и разложению в ряд Маклорена с единичными и нулевыми коэффициентами.

Ключевые слова: формула Плана, целая функция, интегральное представление.

Индекс Mathematics Subject Classification: 14G10 Zeta-functions and related questions, 30B10 Power series (including lacunary series).

UDK 517.5

On one analog of the Plan formula

V.I. Kuzovatov, A.M. Kytmanov

In this paper we present an analog of the Plan formula, which is essential in obtaining a functional relation using integral representations to the classical Riemann zeta-function. We provide examples of rational functions that satisfy a certain symmetry condition and admit a Maclaurin series expansion with coefficients equal to zero or one.

Keywords: Plan formula, entire function, integral representation.