Алгоритм построения аналога формулы Плана

В. И. Кузоватов *[1] and А. А. Кытманов †[2]

[1]Институт математики и фундаментальной информатики, Сибирский федеральный университет, Россия, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79
[2]Институт космических и информационных технологий, Сибирский федеральный университет, Россия, 660041, Красноярск, пр. Свободный, 79

Аннотация

Приведен алгоритм построения аналога формулы Плана, которая имеет существенное значение при нахождении функционального соотношения для классической дзета-функции Римана. Алгоритм реализован в системе компьютерной алгебры Maple.

УДК 519.85

Ключевые слова: формула Плана; дзета-функция Римана

1 ВВЕДЕНИЕ

Одним из наиболее значимых типов задач, решаемых средствами компьютерной алгебры, являются задачи по вычислениям с полиномами от одного или нескольких переменных над различными полями и кольцами (нахождение наибольшего общего делителя, точного значения корней, разложения на множители, вычисление дискриминантов и результантов систем уравнений, базисов Гребнера и т.п.) (см., например, [1]), а также задачи исследования систем нелинейных алгебраических уравнений (см., например, [2]) и других систем, сводящихся к ним подстановками элементарных функций. В частности, достаточно хорошо развиты методы исключения неизвестных из систем полиномиальных уравнений. Однако, при переходе к рассмотрению различных классов неалгебраических систем, классические методы исключения оказываются неприменимыми. В то же время, задачи исследования исследования таких систем (в том числе, заданных в параметрическом виде) являются актуальными: приложения теории исследования неалгебраических систем уравнений могут быть, например, связаны с процессами химической технологии и горения (см., например, [3]). Здесь нелинейные уравнения и системы нелинейных уравнений возникают при математическом моделировании процессов тепло- и массопереноса в химически активных средах. В уравнениях нелинейной и неизотермической кинетики возникающие нелинейности могут иметь не только полиномиальный, но и более общий вид, например, экспоненциальный. Поэтому прикладные задачи требуют развития методов исключения переменных и для систем существенно нелинейных (трансцендентных) уравнений.

В 1977 г. в работе [4] Л.А. Айзенбергом был предложен модифицированный метод исключения неизвестных, основанный на формуле многомерного логарифмического вычета, развитый в последствии в работах [3,5–7]. Подход к построению аналога результанта для целых функций был впервые изложен в [8].

Целью данной работы является разработка и программная реализация алгоритма построения семейства аналогов формулы Плана (см., например, пример 7 главы 7 из [9]), впервые полученных В.И. Кузоватовым и А.М. Кытмановым в работе [10] при жестких ограничениях на рациональ-

*E-mail: kuzovatov@yandex.ru
†E-mail: aakytm@gmail.com

ную функцию, которые были впоследствии сняты в работе [11]. Данный алгоритм будет использоваться для алгоритмизации и программной реализации функциональных соотношений на многомерные аналоги дзета-функции Римана, которые являются важным инструментом в создании методов исключения неизвестных из систем нелинейных уравнений, как было показано в работе [12].

2 ДЗЕТА-ФУНКЦИЯ РИМАНА И КЛАССИЧЕСКАЯ ФОРМУЛА ПЛАНА

Классическая формула Плана выражает сумму значений в целых точках голоморфной и ограниченной (для всех значений z, для которых $x_1 \leq \operatorname{Re} z \leq x_2$, x_1, x_2 – целые числа) функции $\varphi(z)$ через некоторые интегралы. А именно,

$$\frac{1}{2}\varphi(x_1)+\varphi(x_1+1)+\ldots+\varphi(x_2-1)+\frac{1}{2}\varphi(x_2)= \\ =\int\limits_{x_1}^{x_2}\varphi(z)\,dz+\frac{1}{i}\int\limits_0^\infty\frac{\varphi(x_2+iy)-\varphi(x_2-iy)}{e^{2\pi y}-1}\,dy+ \\ +\frac{1}{i}\int\limits_0^\infty\frac{\varphi(x_1-iy)-\varphi(x_1+iy)}{e^{2\pi y}-1}\,dy. \quad (1)$$

Применяя формулу Плана к ряду (здесь, как обычно, $\Gamma(z)$ это Γ–функция Эйлера)

$$\frac{d^2}{dz^2}\ln\Gamma(z)=\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{(z+n)^2}$$

в случае, если вещественная часть z положительна, получено (см., например, глава 12, п. 12.32 из [9]) интегральное представление Бине для $\ln\Gamma(z)$:

$$\frac{d}{dz}\ln\Gamma(z)=-\frac{1}{2z}+\ln z-2\int\limits_0^\infty\frac{t\,dt}{(z^2+t^2)(e^{2\pi t}-1)}.$$

Используя представление Бине для $\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$, получено следующее интегральное представление для вещественных x:

$$\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)}-\ln x=\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}+\frac{1}{x}-\ln x= \\ =\frac{1}{2x}-2\int\limits_0^\infty\frac{t\,dt}{(t^2+x^2)(e^{2\pi t}-1)}= \\ =-2\int\limits_0^\infty\frac{t}{t^2+x^2}\left(\frac{1}{e^{2\pi t}-1}-\frac{1}{2\pi t}\right)dt.$$

Подставляя найденное соотношение в интегральное представление для дзета-функции Римана $\zeta(s)$ и меняя порядок интегрирования, можно получить функциональное соотношение (см., например, глава 2, п. 9 из [13]) для классической дзета-функции Римана.

Напомним (см., например, глава 2, п. 9 из [13]), что интегральное представление для дзета-функции Римана $\zeta(s)$ в полосе $0 < \operatorname{Re} s < 1$ имеет вид:

$$\zeta(s)=-\frac{\sin\pi s}{\pi}\int\limits_0^\infty\left(\frac{\Gamma'(1+x)}{\Gamma(1+x)}-\ln x\right)x^{-s}\,dx.$$

Если говорить об обобщениях дзета-функции, то И.М. Гельфанд, Б.М. Левитан и Л.А. Дикий изучали (см., например, работы [14–16]) дзета-функцию, ассоциированную с собственными значениями оператора Штурма-Лиувилля в 50-х годах прошлого века. Ее значение оказалось связанным со следом данного оператора. Их подход был развит [17] далее В.Б. Лидским и В.А. Садовничим (60 годы), которые рассмотрели класс целых функций одного переменного, определили для них дзета-функцию корней и исследовали ее область аналитического продолжения. В работе [18] С.А. Смагин и М.А. Шубин строят дзета-функцию эллиптических операторов и операторов более общего вида, доказывают возможность мероморфного продолжения дзета-функции и дают некоторую информацию о полюсах.

Многомерные результаты получены А.М. Кытмановым и С.Г. Мысливец в работе [12]. Данными авторами было введено понятие дзета-функции, ассоциированной с системой мероморфных функций $f=(f_1,\ldots,f_n)$ в $\mathbb{C}^n$. С использованием теории вычетов этими авторами было дано интегральное представление для дзета-функции, однако в работе были наложены жесткие условия на систему функций $f_1,\ldots,f_n$.

В работе [19] В.И. Кузоватовым и А.А. Кытмановым с использованием теории вычетов получены два интегральных представления для дзета-функции, построенной по нулям целой функции конечного порядка роста на комплексной плоскости. С помощью этих представлений описана область, в которую эта дзета-функция продолжается.

3 ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ИЗВЕСТНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Сформулируем результаты из работы [19]. Пусть $f(z)$ – целая функция порядка ρ в $\mathbb{C}$. Рассмотрим уравнение

$$f(z) = 0. \tag{2}$$

Обозначим через $N_f = f^{-1}(0)$ множество всех корней уравнения (2) (каждый корень считается столько раз, какова его кратность). Число корней не более чем счетно.

Дзета-функция $\zeta_f(s)$ корней уравнения (2) определяется следующим образом:

$$\zeta_f(s) = \sum_{a \in N_f} (-a)^{-s},$$

где $s \in \mathbb{C}$. Знак минус в определении дзета-функции взят для удобства записи интегральных формул.

Приведем интегральное представление для дзета-функции $\zeta_f(s)$ нулей z_n функции f, которые имеют вид

$$z_n = -q_n + is_n, \quad q_n > 0.$$

Обозначим

$$F(f, x) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{z_n x} \tag{3}$$

и предположим, что Re $s = \sigma > 1$ и выполнены следующие условия:

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{q_n}{n} > 0, \tag{4}$$

$$\text{ряд} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{q_n}\right)^{\sigma-1} \text{сходится.} \tag{5}$$

Для определения области сходимости ряда (3) воспользуемся критерием Коши. Рассмотрим [19] (для вещественного x)

$$|e^{z_n x}| = \left|e^{(-q_n + is_n)x}\right| = \left|e^{-q_n x} \cdot e^{is_n x}\right| = e^{-q_n x}.$$

Таким образом, для сходимости ряда (3), используя условие (4), необходимо и достаточно, чтобы

$$\varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{e^{-q_n x}} = \varlimsup_{n \to \infty} e^{-\frac{q_n x}{n}} = \varlimsup_{n \to \infty} \frac{1}{e^{\frac{q_n x}{n}}} < 1,$$

то есть $x > 0$.

Теорема 1 ([19]). *Пусть выполнены условия* (4), (5) *и* $\operatorname{Re} s > 1$. *Тогда*

$$\zeta_f(s) = \frac{1}{\Gamma(s)} \int_0^{\infty} x^{s-1} F(f, x)\, dx,$$

где $F(f, x)$ *определяется формулой* (3).

В данной статье будем предполагать, что нули z_n имеют вид

$$z_n = -q_n, \quad q_n > 0,$$

где q_n образуют некоторую последовательность натуральных чисел.

Рассмотрим функцию

$$F(f, 2\pi i z) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{z_n 2\pi i z} = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-q_n 2\pi i z}. \tag{6}$$

Рассмотрим (для $z = x + iy$)

$$\left|e^{-q_n 2\pi i z}\right| = \left|e^{-q_n 2\pi i(x+iy)}\right| = e^{q_n 2\pi y}.$$

Таким образом, областью сходимости ряда $F(f, 2\pi i z)$, определенного формулой (6), является множество, задаваемое условием

$$\varlimsup_{n \to \infty} \sqrt[n]{e^{q_n 2\pi y}} = \varlimsup_{n \to \infty} e^{\frac{q_n 2\pi y}{n}} < 1,$$

то есть $y < 0$ ввиду условия (4).

При помощи замены $e^{-2\pi i z} = w$ ряд (6) приводится к виду $\sum\limits_{n=1}^{\infty} w^{q_n}$ или

$$G(w) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n w^n, \tag{7}$$

где коэффициенты f_n определяются следующим образом:

$$f_n = \begin{cases} 1, & n = q_k \\ 0, & n \neq q_k, \end{cases}$$

и, следовательно, $\varlimsup\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|f_n|} = 1$.

Заметим, что в ряде (7) бесконечное число коэффициентов f_n отлично от нуля.

При $|w| \to 1 - 0$ функция $G(w)$ становится неограниченной, но является голоморфной в единичном круге. Таким образом, $G(w)$ не продолжается в точку 1. Теорема Фабри о лакунах (см., например, [20, §2.3]) показывает, что можно подобрать коэффициенты ряда так, что у полученной функции $G(w)$ вся окружность будет являться естественной границей.

В дальнейшем ограничимся рассмотрением классов рациональных функций $G\left(w\right)$, для которых справедливо представление (7). Относительно этого сформулируем (см., например, [20, §6.1]) следующий результат.

Теорема 2 (Сеге, [20])**.** *Степенной ряд*

$$G\left(w\right) = \sum_{0}^{\infty} f_n w^n, \tag{8}$$

коэффициенты которого f_n *могут принимать лишь конечное число различных значений, или представляет собой рациональную функцию, или непродолжаем за пределы единичного круга. В случае рациональности суммы ряда* (8)

$$G\left(w\right) = \frac{P\left(w\right)}{1 - w^N},$$

где $P\left(w\right)$ *— многочлен, а* N *— некоторое натуральное число.*

Это означает, что особыми точками (в данном случае полюсами первого порядка) для функции $G\left(w\right)$ могут быть только точки

$$w_k = e^{i\frac{2\pi}{N}k}, \quad k = 0, 1, \ldots, N-1, \quad N \in \mathbb{N}.$$

В переменных z для функции $F\left(f, 2\pi iz\right)$ особыми точками будут точки

$$e^{-2\pi iz} = w_k, \quad -2\pi iz = i\left(\frac{2\pi}{N}k + 2\pi l\right),$$

$$z = -\left(\frac{k}{N} + l\right), \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

или что то же самое

$$z_{k,l} = l - \frac{k}{N}, \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \ k = 0, \ldots, N-1.$$

Пусть для q_n выполнено соотношение (4). Предположим дополнительно, что $\deg P\left(w\right) = N$, то есть

$$P\left(w\right) = a_1 w + a_2 w^2 + \ldots + a_{N-1} w^{N-1} + w^N,$$

где коэффициенты $a_j \in \{0, 1\}$ ввиду разложения (7), $j = 1, \ldots, N-1$.

Если $\deg P\left(w\right) > N$, то в выражении для $G\left(w\right)$ можно выделить целую часть, которая будет содержать лишь конечное число слагаемых, и на элементы $G\left(w\right)$, начиная с некоторого номера, эти слагаемые оказывать влияния не будут. Если $\deg P\left(w\right) \le N$, то в разложении $G\left(w\right)$ будут коэффициенты многочлена $P\left(w\right)$, которые будут периодически повторяться (ввиду геометрической прогрессии). Моном w^N выделен для удобства вычислений.

Приведем явное выражение функции $F\left(f, 2\pi iz\right)$ через функцию $G\left(w\right)$. Будем иметь

$$F\left(f, 2\pi iz\right) = \frac{P\left(e^{-2\pi iz}\right)}{1 - e^{-2\pi izN}}. \tag{9}$$

Отметим, что выражение (9) является аналитическим продолжением введенной ранее функции $F\left(f, 2\pi iz\right)$, определяемой по формуле (6). Областью определения выражения (9) является комплексная плоскость $\mathbb{C}$ за исключением особых точек $z_{k,l}$.

Заметим, что в работе [10] требовалось выполнение следующего условия:

$$1 + F\left(f, 2\pi iz\right) = -F\left(f, -2\pi iz\right) \tag{10}$$

и вытекающего из него

$$-\left(1 + F\left(f, -2\pi y\right)\right) = F\left(f, 2\pi y\right). \tag{11}$$

В терминах рациональной функции $G\left(w\right)$ условие (10) было эквивалентно следующему условию:

$$1 + G\left(w\right) = -G\left(\frac{1}{w}\right).$$

В работе [11] ограничения (10) и (11) были сняты.

Для сокращения записи обозначим

$$\begin{aligned} Q\left(x_j, y\right) = \varphi\left(x_j - iy\right) F\left(f, 2\pi y\right) + \\ + \varphi\left(x_j + iy\right)\left[1 + F\left(f, -2\pi y\right)\right], \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Теорема 3 ([11]). *Пусть x_1 и x_2 — целые числа, а $\varphi(z)$ — функция, голоморфная и ограниченная на множестве $\{x_1 \le \operatorname{Re} z \le x_2\}$. Тогда*

$$\begin{aligned}&\frac{P(w_0)}{N}\left[\frac{1}{2}\varphi(x_1)+\varphi(x_1+1)+\varphi(x_1+2)+\right.\\&\left.+\ldots+\varphi(x_2-1)+\frac{1}{2}\varphi(x_2)\right]+\frac{P(w_1)}{N}\times\\&\times\left[\varphi\left(x_1+1-\frac{1}{N}\right)+\varphi\left(x_1+2-\frac{1}{N}\right)+\right.\\&\left.+\ldots+\varphi\left(x_2-1-\frac{1}{N}\right)+\varphi\left(x_2-\frac{1}{N}\right)\right]+\\&+\frac{P(w_2)}{N}\left[\varphi\left(x_1+1-\frac{2}{N}\right)+\ldots+\right.\\&\left.+\varphi\left(x_2-1-\frac{2}{N}\right)+\varphi\left(x_2-\frac{2}{N}\right)\right]+\ldots+\\&+\frac{P(w_{N-1})}{N}\left[\varphi\left(x_1+1-\frac{N-1}{N}\right)+\ldots+\right.\\&\left.+\varphi\left(x_2-1-\frac{N-1}{N}\right)+\varphi\left(x_2-\frac{N-1}{N}\right)\right]=\\&=\int_{x_1}^{x_2}\varphi(z)\,dz+\frac{1}{i}\int_0^\infty Q(x_1,y)\,dy-\frac{1}{i}\int_0^\infty Q(x_2,y)\,dy.\end{aligned} \tag{12}$$

Приведенное обобщение формулы Плана в дальнейшем может быть использовано при получении аналога интегрального представления Бине. Тем самым будет осуществлен переход к получению функционального соотношения для дзета-функции корней некоторого класса целых функций.

4 ОПИСАНИЕ АЛГОРИТМА

Заметим, что в левой части формулы (12) с коэффициентом 1/2 берутся лишь значения функции в граничных точках x_1 и x_2 (по формулам Привалова-Племеля).

Нетрудно видеть, что $F(f, 2\pi y)$ — это рациональная функция $G(w)$, в аргумент которой вместо w подставлено $w = e^{-2\pi y}$. Аналогично, $F(f, -2\pi y)$ это рациональная функция $G(w)$, в аргумент которой вместо w подставлено $w = e^{2\pi y}$. Обозначая $e^{2\pi y} = t$, можно записать

$$\begin{aligned}F(f,2\pi y)&=\frac{\frac{a_1}{t}+\frac{a_2}{t^2}+\ldots+\frac{a_{N-1}}{t^{N-1}}+\frac{1}{t^N}}{1-\frac{1}{t^N}}=\\&=-\frac{a_1t^{N-1}+a_2t^{N-2}+\ldots+a_{N-1}t+1}{1-t^N}.\end{aligned} \tag{13}$$

Аналогично,

$$F(f,-2\pi y)=\frac{a_1t+a_2t^2+\ldots+a_{N-1}t^{N-1}+t^N}{1-t^N}.$$

Тогда

$$1+F(f,-2\pi y)=\frac{1+a_1t+a_2t^2+\ldots+a_{N-1}t^{N-1}}{1-t^N}. \tag{14}$$

Таким образом, функции $F(f, 2\pi y)$ и $1 + F(f, -2\pi y)$, входящие в правую часть формулы (12), определяются по формулам (13) и (14) соответственно.

5 ПРИМЕРЫ

Алгоритм был реализован в среде Maple 2016 64bit. Полный код программы доступен по адресу https://github.com/aakytmanov/Plan_formula. Вычисления производились на машине Intel Core i7-4790 (3.6 GHz) с 32 Gb RAM под управлением Windows 7 Enterprise x64 SP1. Время счета для приведенных примеров составило менее 1 секунды.

Пример 1 (классическая формула Плана)**.** В случае, когда $q_n = n$, имеем $P(w) = w$ и, соответственно, $G(w) = \dfrac{w}{1-w}$. В согласии с выражениями (13) и (14) и рассуждениями о рациональности функции $F(f, -2\pi y)$ будем иметь

$$F(f,2\pi y)=\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n2\pi y}=\frac{e^{-2\pi y}}{1-e^{-2\pi y}}=\frac{1}{e^{2\pi y}-1},$$

$$\begin{aligned}&1+F(f,-2\pi y)=1+\frac{w}{1-w}=\frac{1}{1-w}=\\&=\frac{1}{1-e^{2\pi y}}=-\frac{1}{e^{2\pi y}-1},\end{aligned}$$

и мы получаем классическую формулу Плана (1). Входными данными алгоритма в этом случае будут пустой список коэффициентов a_j, функция $\varphi(z)$ и некоторые заданные целые числа x_1 и x_2, например:

```
> Plan([], z->varphi(z), 1, 10);
```

Пример 2. Пусть $x_1 = 0$, $x_2 = N$, $\varphi(z) \equiv 1$. Тогда формула (12) принимает вид

$$P(w_0) + P(w_1) + P(w_2) + \ldots + P(w_{N-1}) = N.$$

В частности, при $P(w) = w^N + w^{N-1} + \ldots + w$ (все коэффициенты при степенях w – единичные) получаем, что $P(w_0) = N$ или

$$P(w_1) + P(w_2) + \ldots + P(w_{N-1}) = 0.$$

Примером вызова программы в данном случае может являться следующий код

```
> Plan([1, 1, 1, 1], z->1, 0, 5);
```

При $N = 1$ получаем тождество $P(w_0) \equiv 1$, которое согласуется с результатом предыдущего примера.

6 БЛАГОДАРНОСТИ

Исследования, представленные в работе, были выполнены при поддержке грантов Президента РФ для поддержки молодых ученых – докторов наук МД-197.2017.1 и для поддержки ведущих научных школ НШ-9149.2016.1, гранта Правительства Российской Федерации государственной поддержки научных исследований, проводимых под руководством ведущих ученых 14.Y26.31.0006, а также грантов РФФИ 15-01-00277 и 16-31-00173.

Список литературы

[1] *von zur Gathen J., Gerhard J.* Modern Computer Algebra (3rd edition), Cambridge University Press, 2013.

[2] *Дикенштейн А., Садыков Т. М.* Базисы в пространстве решений системы уравнений Меллина // Матем. сб., 2007, Т. 198, No 9, С. 59–80.

[3] *Bykov V. I., Kytmanov A. M., Lazman M. Z.* Elimination methods in polynomial computer algebra, Kluwer Academic Publishers, Dodrecht-Boston-Basel, 1998.

[4] *Айзенберг Л. А.* Об одной формуле обобщенного многомерного логарифмического вычета и решении систем нелинейных уравнений // Докл. АН СССР, 1977, Т. 234, No 3, С. 505–508.

[5] *Кытманов А. А.* Об аналогах рекуррентных формул Ньютона // Изв. вузов. Математика, 2009, No 10, С. 40–50.

[6] *Кытманов А. А.* Алгоритм вычисления степенных сумм корней для класса систем нелинейных уравнений // Программирование, 2010, Т. 36, No 2, С. 55–63.

[7] *Kytmanov, A.A., Kytmanov, A.M., Myshkina, E.K.* Finding Residue Integrals for Systems of Non-algebraic Equations in $\mathbb{C}^n$ // Journal of Symbolic Computation, 2015, V. 66, P. 98–110.

[8] *Kytmanov A. M., Naprienko Y. M.* An approach to define the resultant of two entire functions // Journal Complex Variables and Elliptic Equations, 2017, V. 62, No 2, P. 269–286.

[9] *Whittaker E. T., Watson G. N.* A Course of Modern Analysis, Cambridge University Press, Cambridge, 1927.

[10] *Кузоватов В. И., Кытманов А. М.* Об одном аналоге формулы Плана // Известия НАН Армении. Математика, 2018, Т. 53, No 3 (принята к печати).

[11] *Кузоватов В. И.* Об одном обобщении формулы Плана // Известия вузов. Математика, 2018, (принята к печати).

[12] *Kytmanov A. M., Myslivets S. G.* On the Zeta-Function of Systems of Nonlinear Equations // Siberian Math. J., 2007, V. 48, No 5, P. 863–870.

[13] *Titchmarsh E. C.* The Theory of the Riemann Zeta-Function, Oxford University Press, Oxford, 1951.

[14] *Гельфанд И. М., Левитан Б. М.* Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка // Доклады Ак. наук СССР, 1953, Т. 88, No 4, С. 593–596.

[15] *Дикий Л. А.* Дзета-функция обыкновенного дифференциального уравнения на конечном отрезке // Изв. АН СССР. Сер. матем., 1955, Т. 19, No 4, С. 5187–200.

[16] *Дикий Л. А.* Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма-Лиувилля // УМН, 1958, Т. 13, No 3, С. 111–143.

[17] *Lidskii V. B., Sadovnichii V. A.* Regularized Sums of Zeros of a Class of Entire Functions // Functional Analysis and Its Applications, 1967, V. 1, No 2, P. 133–139.

[18] *Smagin S. A., Shubin M. A.* On the Zeta-Function of a Transversally Elliptic Operator // Russian Mathematical Surveys, 1984, V. 39, No 2, P. 201–202.

[19] *Kuzovatov V. I., Kytmanov A. A.* On the Zeta-Function of Zeros of Some Class of Entire Functions // J. Siberian Federal Univ. Math. Phys., 2014, V. 7, No 4, P. 489–499.

[20] *Bieberbach L.* Analytische Fortsetzung, Springer-Verlag, Berlin, 1955.