А. И. Созутов, Е. Б. Дураков, О точно дважды транзитивных группах с обобщенно конечными элементами, *Сиб. матем. журн.*, 2017, том 58, номер 5, 1144–1149

DOI: https://doi.org/10.17377/smzh.2017.58.515

Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2017. Том 58, № 5

УДК 512.54

О ТОЧНО ДВАЖДЫ ТРАНЗИТИВНЫХ ГРУППАХ С ОБОБЩЕННО КОНЕЧНЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

А. И. Созутов, Е. Б. Дураков

Аннотация. Доказана справедливость теоремы Жордана в классе бесконечных точно дважды транзитивных групп с (a, b)-условием конечности и четности $|a| \cdot |b|$.

DOI 10.17377/smzh.2017.58.515

Ключевые слова: группа, бесконечная группа с условиями конечности, точно дважды транзитивная группа, теорема Жордана.

1. Введение

Напомним, что группа подстановок называется *точно дважды транзитивной*, если она 2-транзитивна и стабилизатор (любых) двух различных точек единичен. По теореме Жордана конечная точно дважды транзитивная группа обладает регулярной абелевой нормальной подгруппой. Как выяснилось в последнее время, в классе всех точно 2-транзитивных групп эта теорема неверна [1, 2]. Обобщениям теоремы Жордана на различные классы бесконечных групп с дополнительными ограничениями посвящено много работ. Теорема Жордана верна для точно 2-транзитивных групп, в которых конечны подгруппы, порожденные любыми тремя инволюциями [3], любыми двумя элементами [4] и любыми двумя элементами из некоторого класса сопряженных элементов порядка > 2 [5], для линейных групп [6] и др. В настоящей работе теорема Жордана обобщается на группы, содержащие пару обобщенно конечных элементов.

Неединичный элемент a называется *конечным* в группе G, если в G конечны все подгруппы вида $\langle a, a^g\rangle$. Каждый из неединичных элементов a, b группы G называется *обобщенно конечным в группе* G, если в G выполняется (a, b)-условие конечности, т. е. все подгруппы вида $\langle a, b^g\rangle$ конечны.

Пусть G точно дважды транзитивна на X, J — множество инволюций в G и $J^2 = \{kv \mid k, v \in J\}$. Характеристика G ($\mathrm{Char}(G)$) определяется следующим образом [7]:

(1) $\mathrm{Char}(G) = 2$, если элементы из J не фиксируют точек из X;

(2) $\mathrm{Char}(G) = 0$, если каждый $g \in J^2 \setminus \{1\}$ бесконечного порядка;

(3) $\mathrm{Char}(G) = p$, где p нечетное простое, если порядок каждого $g \in J^2 \setminus \{1\}$ равен p.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, Правительства Красноярского края и Красноярского краевого фонда поддержки научной и научно-технической деятельности в рамках научных проектов 15–01–04897–а и 16–41–240670.

В вышеуказанных работах [1, 2] построены примеры точно дважды транзитивных групп характеристики 2 без регулярных абелевых нормальных подгрупп. Эти результаты дают еще одно основание для изучения точно дважды транзитивных групп при дополнительных ограничениях.

В настоящей работе рассматривается случай, когда бесконечная точно дважды транзитивная группа обладает парой обобщенно конечных элементов. Доказана

Теорема 1. *Точно дважды транзитивная группа характеристики* $\neq 2$, *содержащая элементы* a *и* b *с* (a,b)*-условием конечности, для которых* $|a||b| = 2k > 4$, *обладает периодической регулярной абелевой нормальной подгруппой.*

2. Определения, вспомогательные результаты и структура доказательства

Пусть T — точно дважды транзитивная группа, удовлетворяющая условиям теоремы 1, и F — связанная с ней почти область [7].

Лемма 1. *Когда* $a^T = b^T$, *теорема верна.*

Доказательство. В этом случае a — конечный элемент группы T, $|a| = |b| > 2$, и лемма вытекает из теоремы 2 в [5].

Лемма 2. *Если* $a^T \neq b^T$, *то хотя бы один из элементов* a, b *принадлежит стабилизатору некоторой точки почти-области* F.

Доказательство. Пусть $\alpha \in F$, $\alpha^a = \beta \neq \alpha$, $\beta^b = \gamma \neq \beta$ и элемент $t \in T$ такой, что $\beta^t = \beta$, $\gamma^t = \alpha$. Тогда $1 \neq h = at^{-1}bt \in T_\alpha$ и $h \in L_t = \langle a, b^t \rangle$. Поскольку L_t конечна, $a \notin T_\alpha$ и $1 \neq H_t = L_t \cap T_\alpha \neq L_t$, то L_t — группа Фробениуса с дополнением H_t и хотя бы один из элементов a, b^t не принадлежит ядру. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если* $|a| = |b|$, *то теорема верна.*

Доказательство. Не ограничивая общности, считаем, что $a \in T_\alpha$ (лемма 2), $b \notin T_\alpha$ и, значит, $L = \langle a, b \rangle$ — конечная группа Фробениуса с неинвариантным множителем $L \cap T_\alpha$. В силу свойств конечных групп Фробениуса [8] подгруппы $\langle a \rangle$ и $\langle b \rangle$ сопряжены в L и лемма следует из леммы 1.

О структуре доказательства. Элементы a и b входят в условия теоремы симметрично, поскольку из (a,b)-условия конечности следует (b,a)-условие конечности. Кроме того, из (a,b)-условия конечности следуют (r,s)-условия конечности для любых элементов $r \in \langle a \rangle^\#$ и $s \in \langle b \rangle^\#$. Это дает возможность в условиях теоремы считать порядок соответствующего элемента либо нечетным простым q, либо равным 2 или 4. Согласно лемме 2 возможны следующие два принципиально различных случая.

(1) Один из элементов a, b принадлежит стабилизатору точки, а второй регулярен. Будем считать, что элемент a принадлежит стабилизатору точки, а b регулярен.

(2) Оба элемента a, b стабилизируют по точке. С точностью до сопряженности будем считать, что оба элемента a, b стабилизируют одну и ту же точку 0 почти-области $(F, +, \cdot)$.

Далее, инволюции в группе T обладают особыми свойствами и как инволюции в точно 2-транзитивных группах (см., например, [5, 7]), и как 2-элементы в группах с системами фробениусовых подгрупп (см., например, [8, 9]). Поэтому указанные выше два случая разбиваются на соответствующие подслучаи.

(A) Элемент a стабилизирует точку 0, элемент b регулярен, $|a| = 2$, $|b| = q$.

(B) Элементы a, b стабилизируют точку 0, $|a| = 2$, $|b| = 4$.

(C) Элементы a, b стабилизируют точку 0, $|a| = 2$, $|b| = q$.

3. Доказательство теоремы 1

Предложение 1. *Справедливы следующие утверждения* [5].

(1) (T, T_0) *— пара Фробениуса, т. е.* $T_0 \cap T_0^t = 1$ *для любого* $t \in T \setminus T_0$.

(2) *Множество* J *инволюций в* T *непусто,* T_0 *транзитивна на* $J \setminus T_0$, *произведение любых двух различных инволюций из* T *является регулярной подстановкой.*

(3) *Для любых инволюции* $k \in J$ *и элемента* $x \in T$ *выполняются равенства* $T = T_0 J = T_0 N_k$ *и* $|J \cap T_0 x| = |N_k \cap T_0 x| = 1$, N_k *— множество элементов группы* G, *инвертируемых инволюцией* k, *отличных от* k.

(4) *Если в* T_0 *есть инволюция* a, *то она единственна в* T_0 *и* T *действует сопряжениями на множестве* J *всех своих инволюций точно дважды транзитивно. Если* $k, v \in J$ *и* $k \neq v$, *то* $kv \neq vk$, $k^t = v$ *для единственной инволюции* $t = t(v, k) \in J$ *и все неединичные элементы из* J^2 *сопряжены в* T.

Перечисленные выше случаи (A)–(C) с точки зрения сложности не равноценны. Наиболее просто закрывается случай (A).

Лемма 4. *Когда элемент* a *стабилизирует точку* 0, *элемент* b *регулярен и* $|a| = 2$, $|b| = q$, *теорема верна.*

Доказательство. В силу предложения 1 для любого элемента $g \in T$ конечная подгруппа $L_g = \langle b, a^g \rangle$ является группой Фробениуса с дополнением $\langle a^g \rangle$ и ядром, содержащим элемент b. Следовательно, $b^k = b^{-1}$ для любой инволюции $k \in J$ и $J \subseteq V = C_G(b)\langle a \rangle$. Понятно, что $(V, \langle a \rangle)$ — пара Фробениуса и $|av| = |b| = q$ для любой инволюции $v \in J = a^T$ ввиду предложения 1. По лемме 2.19 из [9] V — группа Фробениуса с неинвариантным множителем a и периодическим (элементарным) абелевым ядром $A = C_G(b)$. По лемме Фраттини $T = A \leftthreetimes T_0$, и теорема доказана.

Доказательство теоремы в случаях (B) и (C). Итак, пусть обобщенно конечные элементы a и b принадлежат стабилизатору точки 0, причем a — инволюция. В этом случае инволюция a в стабилизаторе точки 0 единственна и веер конечных подгрупп L_g, содержащих инволюцию a и не содержащихся в стабилизаторах точек, состоит из групп Фробениуса с неинвариантными множителями, содержащими как a, так и некоторый элемент из b^T. Рассмотрим сначала более общую ситуацию.

Теорема 2. *Пусть* G *— группа,* $a, b \in G$, $|a| = 2$, $|b| > 2$, $C = C_G(a)$ *и для любого* $g \in G \setminus C$ *подгруппа* $L_g = \langle a, b^g \rangle$ *конечна и является группой Фробениуса с ядром, не содержащим элементы* a *и* b^g. *Тогда инволюция* a *конечна и изолирована в* G, $b \notin [a, G]$, $G = [a, G]C$ *и либо* $\langle a^G \rangle = [a, G] \leftthreetimes \langle a \rangle$, *либо* $|b| = 2^n$ *и* $s^{-1} \in s^{[a,G]}$, *где* $s \in \langle b \rangle$ *и* $|s| = 4$.

Доказательство теоремы 2 разобьем на пункты, на которые будем ссылаться по мере необходимости. Итак, пусть g — произвольный элемент из $G \setminus C$ и $L_g = \langle a, b^g \rangle = F_g \leftthreetimes C_g$ — конечная группа Фробениуса с неинвариантным множителем C_g и ядром F_g, не содержащим элементы a и b^g. Из хорошо известных свойств конечных групп Фробениуса (см., например, [8]) вытекают следующие утверждения.

1. Инволюция в C_g единственна и с точностью до сопряженности в L_g можно считать, что $C_g = L_g \cap C$. Группа $C_g \simeq L_g/F_g$ циклическая, так как $C_g = \langle a, b' \rangle$, $|b'| = |b|$.

2. Порядок любого элемента d из F_g нечетен, $d^a = d^{-1}$, F_g — абелева группа, $F_g \subseteq N_a$, N_a — множество элементов группы G, инвертируемых инволюцией a (считаем, что $1 \in N_a$, $a \notin N_a$). В силу свойств конечных групп Фробениуса $b^{gd^{-1}} \in C_g$ для однозначно определенного элемента $d \in F_g$. Поскольку $\langle a, b^{gd^{-1}} \rangle$ не является группой Фробениуса, $gd^{-1} = c$, $c \in C$, $g = cd$, $C_g = \langle a, b^c \rangle$ и $b \in C$. Кроме того, $d^2 = ad^{-1}ad = ag^{-1}ag = ah^{-1}ah$ для любого $h \in C_g$ и $|N_a \cap H_g| = 1$. С другой стороны, $b^g \notin C$ для любого элемента $g \in G \setminus C$, значит, $b^G \cap C = b^C$ и пересечение $C \cap C^g \cap b^G$ пусто. Оформим эти факты.

3. Элемент b содержится в C, $G = CN_a$, $|N_a \cap C_g| = 1$, $b^G \cap C = b^C$ и $C \cap C^g \cap b^G = \varnothing$.

Инволюция a называется *изолированной* в G, если для каждого $g \in G$ коммутатор $[a, g] = a^{-1}g^{-1}ag$ имеет конечный нечетный порядок [10].

Ввиду пп. 1–3 имеем

4. Инволюция a изолирована в G, $C \cap a^G = \{a\}$, $N_a = \bigcup\limits_{g \in G \setminus C} F_g$, $J = a^G = aN_a$.

Из пп. 2–4 следует

5. $L_g = \langle a, b^g, d \rangle$, где $g = cd$, $c \in C$, $d \in N_a$, в частности, $L_d = \langle a, b^d \rangle = \langle a, b, d \rangle$.

Из пп. 3, 5 вытекают включения

6. $b^G \subseteq \bigcup\limits_{g \in G \setminus C} (L_g \setminus F_g)$ и $(ba)^G \subseteq \bigcup\limits_{g \in G \setminus C} (L_g \setminus F_g)$.

Обозначим

$$Y = \bigcup_{\langle r \rangle = \langle b \rangle} r^G, \quad Z = \bigcup_{\langle r \rangle = \langle ba \rangle} r^G, \quad X = Y \cup Z.$$

Из пп. 1, 6 и предложения 1 следует

7. $Xa = X$, поскольку $X \subseteq \bigcup\limits_{g \in G \setminus C} (L_g \setminus F_g)$.

Множества Y, Z и X по определению являются объединениями классов сопряженных элементов группы G и инвариантны в G, поэтому из п. 7 вытекают равенства

8. $Xk = X$ для всех $k \in a^G$ и $XB = X$ для подгруппы $B = \langle a^G \rangle$.

9. Так как $Xb \neq X$, то $b \notin B$ и $b \notin [a, G] \leq B$.

10. По п. 4 инволюция a изолирована в G, и $G = [a, G]C$ по лемме Фраттини.

Заметим, что формулировка теоремы инвариантна относительно замены элемента b любым элементом простого нечетного порядка из подгруппы $\langle b \rangle$. Легко убедиться, что после такой замены все пп. 1–10 доказательства остаются в силе, и при $|b| \neq 2^n$ можно считать, что $|b| = q$ — простое нечетное число. В этом случае инвариантные в G множества Y и Z различны, Y состоит из элементов порядка q, а Z — из элементов порядка $2q$. Итак, при $|b| = q$ в силу пп. 1, 7 имеем

11. $Za = Y$, $Ya = Z$ и, значит, $Zk = Y$, $Yk = Z$ для любого $k \in a^G$.

По п. 4 $N_a = a \cdot a^G$, и $YN_a = Y$ и $ZN_a = Z$ в силу п. 11. Следовательно, $\langle N_a \rangle = [a, G] \neq B$ и $B = [a, G] \leftthreetimes \langle a \rangle$. Теорема для случая $|b| \neq 2^n$ доказана.

Пусть $|b| = 2^n$. Как и в случае $|b| \neq 2^n$, заменяем элемент b элементом порядка 4 из подгруппы $\langle b \rangle$. В силу пп. 4, 8–10 теорему достаточно доказать для группы $G = B\langle b \rangle$, что и будет предполагаться далее. Допустим, что $b^{-1} \notin b^{[a,G]}$, тогда классы сопряженных элементов $b^G = b^B = Y$, $(ba)^G = b^{-G} = b^{-B} = Z$ в группе $G = B\langle b \rangle$ различны. Как и выше, последовательно получаем $Ya = Z$, $Za = Y$, $Yk = Z$, $Zk = Y$ для всех $k \in a^G$ и $B = [a, G] \leftthreetimes \langle a \rangle$. В случае $b^{-1} \in b^{[j,G]}$ выполняется $b^f = b^{-1}$ для подходящего элемента $f \in B$, $a = [b, f] \in B$ и $B = [a, G]$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 1. Поскольку (T, T_0) — пара Фробениуса (предложение 1), для любого элемента $g \in T \setminus T_0$ конечная подгруппа $L_g = \langle a, b^g \rangle$ является группой Фробениуса с дополнением $C_g = H \cap L_g$ и ядром F_g. По предложению 1 $T_0 = C_T(a)$, следовательно, для рассматриваемой группы $G = T$, ее элементов a и b и подгруппы $C = T_0$ выполняются все условия теоремы 2 и все пп. 1–11 из доказательства теоремы 2. Пусть $1 \neq d \in N_a$, $A = C_T(d)$ и $V = N_T(A)$. Согласно теоремам 1 и 2 из [11] в рассматриваемой ситуации выполняется

Предложение 2. *Справедливы следующие утверждения.*

(1) *Подгруппа A абелева, инвертируется инволюцией a и сильно изолирована в T.*

(2) *V точно дважды транзитивна на орбите $\Delta = \alpha^A$, A — регулярная абелева нормальная подгруппа в V, $H = V \cap T_\alpha$ — стабилизатор точки α в V и $V = A \leftthreetimes H$.*

(3) *Если $\left| \bigcap\limits_{x \in T_\alpha} H^x \right| > 2$, то $H = T_\alpha$ и $V = T = A \leftthreetimes T_\alpha$.*

В обозначениях данной работы $T_\alpha = T_0$. По п. 2 теоремы 2 $d \notin C$. Пусть $c \in C$, $g = cd \in Cd$. По п. 5 теоремы 2 $L_g = \langle a, b^c, d \rangle$, $d \in F_g$, и F_g — абелева группа по п. 2 теоремы 2. Следовательно, $F_g \leq A$ и по предложению 2 A — абелева и сильно изолирована в T, т. е. содержит централизатор каждого своего элемента в T. Отсюда заключаем, что $b^c \in V$ и ввиду произвольности выбранного элемента $c \in C = T_0$ имеем $b^C \leq H$. Следовательно, $\left| \bigcap\limits_{x \in T_0} H^x \right| > 2$, и по п. (3) предложения 2 A — регулярная абелева нормальная подгруппа группы T. Теорема 1 для рассматриваемого случая доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rips E., Segev Y., Tent K.* A sharply 2-transitive group without a non-trivial abelian normal subgroup // arXiv:1406.0382v4 [math.GR]. 22 Oct. 2014. P. 1–17.
2. *Tent K., Ziegler M.* Sharply 2-transitive groups // arXiv:1408.5612v1 [math.GR]. 24 Aug. 2014. P. 1–5.
3. *Мазуров В. Д.* О точно дважды транзитивных группах // Вопросы алгебры и логики. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1996. С. 114–118. (Тр. Ин-та математики СО РАН; Т. 30).
4. *Grundhöfer T., Jabara E.* Fixed-point-free 2-finite automorphism groups // Arch. Math. 2011. V. 97. P. 219–223.
5. *Созутов А. И.* О группах Шункова, действующих свободно на абелевых группах // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 188–198.
6. *Glasner Y., Gulko D.* Sharply two transitive linear groups // Int. Math. Res. Not. 2014. N 10. P. 2691–2701.

7. *Wähling H.* Theorie der Fastkörper. Essen: Thalen-Verl., 1987.
8. *Попов А. М., Созутов А. И., Шунков В. П.* Группы с системами фробениусовых подгрупп. Красноярск: Изд-во КГТУ, 2004.
9. *Созутов А. И., Сучков Н. М., Сучкова Н. Г.* Бесконечные группы с инволюциями. Красноярск: Сиб. федер. ун-т, 2011.
10. *Созутов А. И., Дураков Е. Б.* О группах с изолированной инволюцией // Сиб. мат. журн. 2014. Т. 55, № 4. С. 857–868.
11. *Durakov E. B., Bugaeva E. V., Sheveleva I. V.* On sharply doubly-transitive groups // Журн. Сиб. федер. ун-та. Математика и физика. 2013. V. 6. P. 28–32.

Статья поступила 15 декабря 2016 г.

Созутов Анатолий Ильич, Дураков Евгений Борисович
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
sozutov_ai@mail.ru, durakov@mail.ru