УДК 512.544

О ГРУППАХ С ФРОБЕНИУСОВЫМИ ЭЛЕМЕНТАМИ

А. И. Созутов, Е. Б. Дураков

Аннотация. Исследуются группы с H-фробениусовым элементом и нильпотентными ядрами соответствующих фробениусовых подгрупп. Доказаны две теоремы, которые решают вопрос 10.61 из «Коуровской тетради» в этом случае.

DOI 10.17377/smzh.2060.01.001

Ключевые слова: группа, бесконечные группы с условиями конечности, группа Фробениуса, фробениусовы подгруппы, H-фробениусов элемент.

Многие исследования групп с конечными элементами опираются на свойства групп Фробениуса [1]. Часть результатов о группах с различными системами фробениусовых подгрупп представлена в [2] (определение группы Фробениуса см. в § 1). Напомним, что элемент a группы G называется H*-фробениусовым*, если H — собственная подгруппа в G и все подгруппы вида $L_g = \langle a, a^g \rangle$, где $g \in G \setminus H$, являются группами Фробениуса с дополнениями, содержащими элемент a. Если при этом дополнения всех групп L_g совпадают с $\langle a \rangle$, то a называется *циклическим* H*-фробениусовым* элементом.

Строение группы G с циклическим H-фробениусовым элементом a простого нечетного порядка было изучено В. П. Шунковым [3], а в случае $|a| > 2$ — А. И. Созутовым [4]. Конечные группы с аналогичными условиями изучались в [5–7].

Признаки непростоты из [1, 3, 4] и их обобщения легли в фундамент теории периодических и смешанных групп с условиями конечности более слабыми, чем локальная конечность. Идеи и методы, зародившиеся в [1, 3, 4], развивались и развиваются в нескольких направлениях. Так, в [8, 9] получены признаки непростоты группы с системой F-подгрупп с циклическими дополнениями, близких по свойствам к группам Фробениуса. В другом направлении условия из [3, 4] ослабляются за счет дополнений Фробениуса. Дополнительный множитель H_g группы Фробениуса вида $L_g = \langle a, a^g \rangle$ может быть и не циклическим. Строение дополнений в конечных группах Фробениуса хорошо изучено [10]. О разнообразии возникающих ситуаций в бесконечном случае можно составить мнение по результатам из [11–13] (см. также [2, гл. 5]).

Допустим, что в G есть H-фробениусов элемент a порядка > 2. Будет ли в этом случае объединение всех ядер фробениусовых подгрупп группы G с дополнением $\langle a \rangle$ подгруппой? Особенно интересен случай, когда элемент a с любым своим сопряженным порождают конечную подгруппу (вопрос 10.61 из «Коуровской тетради» [14]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 15–01–04897–а).

Положительный ответ на вторую часть данного вопроса при $|a| \notin \{3, 5\}$ получен А. М. Поповым в [15]. Когда $|a| \in \{3, 5\}$, ответ неизвестен даже при условии конечности группы G. Для случая четного порядка элемента a вопрос 10.61 решен полностью в [16]. При этом в первом случае в доказательстве существенно использовалась конечность подгрупп L_g, а во втором — абелевость ядер фробениусовых подгрупп L_g.

В данной работе исследуются группы с H-фробениусовым элементом и нильпотентными ядрами фробениусовых подгрупп L_g. Напомним, что неединичный элемент b группы X называется *конечным в* X, если для любого $x \in X$ подгруппа $\langle b, b^x \rangle$ конечна.

Теорема 1. *Пусть a — H-фробениусов элемент группы G и ядра всех фробениусовых подгрупп $L_g = \langle a, a^g \rangle$ при $g \in G \setminus H$ нильпотентны. Если $\langle a \rangle$ содержит конечный в H элемент b порядка $|b| \notin \{3, 5\}$, то объединение F всех ядер фробениусовых подгрупп с дополнением $\langle a \rangle$ является периодической нормальной подгруппой группы G и $G = FH$.*

Теорема 2. *Пусть a — конечный H-фробениусов элемент группы G, $|a| \in \{3, 5\}$ и $\langle a^H \rangle$ либо изоморфна $SL_2(3)$ или $SL_2(5)$, либо является группой Фробениуса с дополнением, изоморфным $SL_2(3)$ или $SL_2(5)$. Тогда $\langle a^G \rangle$ является периодической группой Фробениуса с абелевым ядром F и дополнением, изоморфным $SL_2(3)$ или $SL_2(5)$.*

§ 1. Определение групп Фробениуса, известные результаты

Определение 1. Группа G называется *группой Фробениуса* (*фробениусовой группой*) *с неинвариантным множителем* (*дополнением*) H *и ядром* (*инвариантным множителем*) F, если

(1) F и H — собственные подгруппы группы G;
(2) $H \cap H^g = 1$ для любого элемента $g \in G \setminus H$;
(3) $G \setminus F^{\#} = \bigcup H^g$;
(4) $F \lhd G$ и $G = F \leftthreetimes H$.

Если G и H удовлетворяют условию (2) определения, то по В. П. Шункову [1] они составляют *пару Фробениуса* (G, H), Ю. М. Горчаков [17] называл в этом случае подгруппу H *обособленной* в G. Легко убедиться в справедливости следующего предложения.

Предложение 1. *Группа $G = F \leftthreetimes H$ тогда и только тогда есть группа Фробениуса с ядром F и дополнением H, когда подгруппа H обособлена в G и каждый неединичный элемент из G содержится либо в F, либо точно в одной подгруппе, сопряженной с H.*

Несмотря на довольно жесткие условия, в бесконечном случае группа Фробениуса может иметь очень сложное строение. Так, например, любая группа может быть вложена в ядро подходящей группы Фробениуса и любая правоупорядоченная группа может служить дополнением некоторой группы Фробениуса [12] (см. комментарии к вопросам 6.53 и 13.54(б) из [14]). Пусть $p > 3$ — простое число. Неизвестно, существуют ли фробениусова p-группа и фробениусова группа, дополнение которой является нециклической p-группой (вопросы 6.55, 10.60 из [14]). В классе бесконечных периодических групп условия (2)–(4) определения 1 независимы. Так, для черниковской p-группы $G = F \leftthreetimes H$ с конечным центром $Z(G)$, полной абелевой подгруппой F и циклической подгруппой H порядка p выполняются условия (3), (4) определения и нарушается условие (2). В группе Новикова — Адяна [18] $G = B(2, n) = \langle a, b \rangle$ периода $n \geq 665$ каждая подгруппа H порядка n обособлена, при этом для подгруппы $H = \langle a \rangle$ есть нормальные дополнения F ($G = F \leftthreetimes H$), но ни для какого из них не выполняется равенство $F = \bigcap\limits_{x \in G} (G \setminus H^{\#})^x$. Наконец, в бесконечных группах А. Ю. Ольшанского [19], все собственные подгруппы которых сопряжены и являются циклическими простого порядка, для любой собственной подгруппы H множество $F = \bigcap\limits_{x \in G} (G \setminus H^{\#})^x$ есть подгруппа, равная единичной, но нарушено условие (4). В периодической группе Фробениуса G дополнение H не обязано быть локально конечной группой [11] даже в случае, когда $\pi(H) \subseteq \{2, 3\}$ [13]. Напомним, что если n — натуральное число и X — группа, то через $\pi(n)$ и $\pi(X)$ обозначаем множества простых делителей числа n и порядков элементов группы X соответственно. Следующее предложение, вытекающее из теоремы 3.1 в [11] и теоремы 5.1 в [2], показывает, что среди периодических групп Фробениуса с нильпотентными ядрами есть не локально конечные группы ограниченного периода.

Предложение 2. *Пусть n, k, q — натуральные числа, q — простое число, $(q, k) = 1$, $\pi(n) \subseteq \pi(k)$, число n нечетно и $n \geq 665$. Тогда для любого натурального $m \geq 2$ существует m-порожденная группа Фробениуса $G = F \leftthreetimes H$, ядро F в которой — бесконечная элементарная абелева q-группа, а дополнение H — бесконечная m-порожденная группа периода nk с циклическим локально конечным радикалом порядка k.*

Нетрудно убедиться, что любой неединичный элемент $a \in H$, где $G = F \leftthreetimes H$ — группа из предложения 2, является H-фробениусовым элементом в группе G. Если при этом элемент a выбран за пределами локально конечного радикала H, то среди подгрупп $L_g = \langle a, a^g \rangle$ ($g \in G \setminus H$) есть бесконечные группы Фробениуса.

Предложение 3. *Если (G, H) — пара Фробениуса и группа G локально конечна, то G является группой Фробениуса с нильпотентным ядром F и дополнением H* [10].

Предложение 4 (теорема Горчакова [17]). *Если $G = F \leftthreetimes H$, подгруппа H локально конечна и обособлена в G, а F локально нильпотентна, то G — группа Фробениуса с ядром F и дополнением H в том и только том случае, когда F — $\pi(H)$-полная группа.*

Предложение 5 (теорема Журтова [20]). *Группа Фробениуса, порожденная двумя элементами порядка 3, конечна, и ее ядро абелево.*

Предложение 6. *Пусть $R \triangleleft F \triangleleft G$, $H < G$, подгруппа $R \leftthreetimes H$ — группа Фробениуса с ядром R и дополнением H и фактор-группа G/R также является группой Фробениуса с ядром F/R и дополнением HR/R. Тогда $G = F \leftthreetimes H$ — группа Фробениуса, F — ее ядро, H — дополнение.*

Доказательство. Понятно, что R, F и H — собственные подгруппы в G и условие (1) определения 1 выполняется. Из равенств $RH = R \leftthreetimes H$ и $G/R = (F/R) \leftthreetimes (RH/R)$ следует равенство $G = F \leftthreetimes H$ (условие (4) определения). Если $g \in G$ и $H \cap H^g \neq 1$, то $(RH)^{Rg} \cap RH \neq R$ и ввиду условий заключаем, что $g \in RH$ и затем $g \in H$. Следовательно, подгруппа H обособлена в G (условие (2) определения). Наконец, элемент $g \in G \setminus F$ содержится в смежном классе gR, сопряженном в фактор-группе с G/R с подходящим смежным классом hR ($h \in H$), каждый элемент из которого сопряжен в $R \leftthreetimes H$ с элементом из H. Следовательно, условие (3) определения 1 также выполнено, и предложение доказано. $\square$

Нам понадобится ряд свойств групп Фробениуса. В предложениях 7–12 $G = F \leftthreetimes H$ — группа Фробениуса с ядром F и дополнением H.

Предложение 7 [2, лемма 2.1]. *Пусть $a \in H^{\#}$ и $L = F \leftthreetimes \langle a \rangle$. Тогда*

(1) *отображение $f \to [a, f]$ биективно на F;*

(2) *L — группа Фробениуса с неинвариантным множителем $\langle a \rangle$ и ядром F;*

(3) *если $L = B \leftthreetimes \langle v \rangle$ и $N_L(\langle v \rangle) = \langle v \rangle$, то $B = F$ и $\langle v \rangle = \langle a^c \rangle$ для подходящего $c \in F$;*

(4) *tсли $b \in L$ и $M = \langle a, a^b \rangle$ — группа Фробениуса с дополнением $\langle v \rangle$, то $M \cap F$ — ядро группы M, подгруппы $\langle a \rangle$, $\langle v \rangle$ и $\langle a^b \rangle$ сопряжены в M и $M = \langle a, b \rangle$.*

Предложение 8 [2, леммы 2.1, 2.2]. *Любая нормальная в G подгруппа либо содержит ядро F, либо совпадает с F, либо содержится в F. Для любой собственной подгруппы K дополнения H подгруппа $F \leftthreetimes K$ есть группа Фробениуса с ядром F и дополнением K.*

Предложение 9 [2, лемма 2.5]. *Если подгруппа R нормальна в G, собственно содержится в F и $R \leftthreetimes H$ является группой Фробениуса с дополнением H и ядром R, то G/R есть группа Фробениуса с ядром F/R и дополнением HR/R.*

Предложение 10 [2, леммы 2.3, 2.4]. *Если H содержит инволюцию i, то она единственна в H, $f^i = f^{-1}$ для любого элемента $f \in F$ и F — абелева группа. Если $3 \in \pi(H)$, то для любого элемента $f \in F$ подгруппа $\langle f^G \rangle$ абелева, а ядро F нильпотентно класса нильпотентности ≤ 2.*

Легко убедиться в справедливости следующего утверждения.

Предложение 11 [21, предложение 13]. *Если ядро F нильпотентно, то пересечение $\pi(H) \cap \pi(F)$ пусто.*

Предложение 12 [21, предложение 16]. *Конечнопорожденная группа Фробениуса с локально нильпотентным ядром и локально конечным дополнением конечна.*

Приведем также основные результаты из [4, 15, 16].

Предложение 13 [4]. *Пусть G — группа с циклическим H-фробениусовым элементом a и $|a| > 2$. Тогда $G = F \leftthreetimes N_G(\langle a \rangle)$ и $\langle a^G \rangle = F \leftthreetimes \langle a \rangle$, $\langle a^H \rangle = (F \cap H) \leftthreetimes \langle a \rangle$ являются группами Фробениуса с дополнением $\langle a \rangle$ и ядрами F и $F \cap H$ соответственно.*

Предложение 14 [15]. *Пусть G — группа, H — ее собственная подгруппа и a — конечный H-фробениусов элемент порядка > 2 из H. Если $|a| \neq 3, 5$, то объединение F всех ядер фробениусовых подгрупп группы G с дополнением, содержащим элемент a, является периодической нормальной в G подгруппой и $G = FH$.*

Предложение 15 [16]. *Если группа G содержит H-фробениусов элемент a четного порядка > 2, то $G = F \leftthreetimes C_G(i)$, где i — инволюция из $\langle a \rangle$, F — периодическая абелева подгруппа является объединением всех ядер фробениусовых подгрупп группы G с дополнением $\langle a \rangle$.*

Предложение 16 (теорема Мазурова [22]). *Пусть G — группа, действующая точно на абелевой группе V. Предположим, что G порождена таким классом X сопряженных элементов простого порядка p, что любые два элемента $x, y \in X$ либо перестановочны, либо порождают конечную подгруппу, действующую свободно на V. Тогда либо G является циклической группой порядка p, либо $p = 5$ и $G \simeq SL_2(5)$, либо $p = 3$ и G является нерасщепляемым расширением группы порядка 2 посредством знакопеременной группы $A(I)$ для некоторого множества I мощности, не меньшей чем 4.*

§ 2. Доказательство теоремы 1

Пусть далее G — группа, H — ее собственная подгруппа и a — H-фробениусов элемент из H, удовлетворяющие условиям теоремы 1. Для каждого элемента $g \in G \setminus H$ через L_g условимся обозначать подгруппу $\langle a, a^g \rangle$, которая по условиям теоремы является группой Фробениуса, а через F_g — ядро группы L_g.

Лемма 1. *Для любого неединичного $b \in \langle a \rangle$ выполняется включение $N_G(\langle b \rangle) \leq H$. Для каждого элемента $g \in G \setminus H$ подгруппы $\langle a \rangle$ и $\langle a^g \rangle$ содержатся в подходящих неинвариантных множителях группы L_g, пересечение $a^G \cap H \cap H^g$ пусто, $F_g \nleq H$ и $N_G(H) = H$.*

Доказательство. Если $g \in N_G(\langle b \rangle) \setminus H$, то $L_g = \langle a, a^g \rangle \leq C_G(\langle b \rangle)$ и L_g не группа Фробениуса (определение 1). Следовательно, $N_G(\langle b \rangle) \leq H$.

Далее, согласно определению 1 хотя бы одна из подгрупп $\langle a \rangle$ и $\langle a^g \rangle$ не содержится в F_g. Пусть $a \notin F_g$ и элемент a содержится в некотором дополнении K группы Фробениуса L_g. Ввиду нильпотентности F_g и теоремы 16.2.7 из [23] все ее элементы конечных порядков составляют характеристическую подгруппу T_g. Значит, $T_g \leftthreetimes \langle a \rangle$ — локально конечная группа Фробениуса с дополнением $\langle a \rangle$ и ядром T_g. По предложению 11 $a^g \notin T_g$, $a^g \notin F_g$ и $\langle a^g \rangle \leq fKf^{-1}$ для подходящего и ввиду определения 1 единственного элемента $f \in F_g$.

Наконец, предположим, что $a^g \in H$ для некоторого $g \in G \setminus H$. Но тогда для любого $h \in H$ имеем $gh \notin H$ и $L_{gh} = \langle a, a^{gh} \rangle$ является группой Фробениуса с нильпотентным ядром F_{gh} и дополнением $H_g = \langle a, a^{ghf^{-1}} \rangle$. В силу условий подгруппы F_g и F_{gh} нильпотентны, значит, подгруппа $F_g \leftthreetimes F_{gh}$ разрешима и любой элемент простого порядка из $\langle a \rangle$ индуцирует на подгруппе $F_g \leftthreetimes F_{gh}$ регулярный расщепляющий автоморфизм. По теореме Е. И. Хухро [24] группа $F = F_g \leftthreetimes F_{gh}$ нильпотентна и потому ее подгруппа F_{gh} в F отлична от своего нормализатора. Но по предложению 1 F — группа Фробениуса с ядром F_g и дополнением F_{gh}; противоречие. Значит, $a^G \cap H \cap H^g = \varnothing$ и $F_g \nleq H$. $\square$

Лемма 2. *Для каждого элемента $g \in G \setminus H$ ядро F_g является периодической группой.*

Доказательство. По лемме 1 множество $F_g \setminus H$ непусто. Допустим, что c — элемент бесконечного порядка из $F_g \setminus H$. Понятно, что $L_c = \langle a, a^c \rangle = F_c \leftthreetimes \langle a \rangle$, где $F_c = F_g \cap L_c$. По условиям и предложению 6 L_c — группа Фробениуса с нильпотентным ядром F_c и дополнением $\langle a \rangle$. По предложению 7 $c \in F_c$. Пусть T_c — периодическая часть группы F_c. Понятно, что $T_c \leftthreetimes \langle a \rangle$ — группа

Фробениуса с дополнением $\langle a\rangle$ и по предложению 8 L_c/T_c — группа Фробениуса с ядром F_c/T_c и дополнением $\langle a\rangle T_c/T_c$. По теореме Горчакова (предложение 4) группа F_c/T_c обязана быть p-полной для любого простого делителя числа $|a|$. Но нильпотентная группа F_c/T_c не имеет кручения и конечно порождена и потому не может быть p-полной. Поэтому каждый элемент из $F_g \setminus H$ имеет конечный порядок. Далее, если s — элемент бесконечного порядка из F_g, то $s \in H \cap F_g$, для любого $r \in F_g \setminus H$ порядок элемента sr бесконечен и $sr \in F_g \setminus H$; противоречие. Следовательно, F_g — периодическая группа, и лемма доказана. $\square$

Уточним строение фробениусовых подгрупп $L_g = \langle a, a^g\rangle = F_g \leftthreetimes H_g$, где $g \in G \setminus H$, F_g — ядро, H_g — дополнение, содержащее a (по лемме 1 $a, a^g \notin F_g$).

Лемма 3. *$H_g = \langle a, a^{gf}\rangle$ для единственного элемента $f \in F_g$, $gf = h \in H$ и $g = f^{-1}h$. Если H_g — периодическая группа и $L_g \cap H \neq H_g$, то $L_g \cap H$ является периодической группой Фробениуса с нильпотентным ядром $F_g \cap H$ и дополнением H_g.*

Доказательство. Первое утверждение вытекает из леммы 1 и определения 1. Когда H_g — периодическая группа, ввиду нильпотентности и периодичности подгруппы $F_g \cap H$ (лемма 2) для каждого элемента $t \in H_g$ подгруппа $L = (F_g \cap H) \leftthreetimes \langle t\rangle$ является локально конечной группой Фробениуса, поэтому $L \setminus (F_g \cap H)^{\#} = \bigcup\limits_{f \in (F_g \cap H)} H_g^f$ и второе утверждение вытекает из предложения 1 и определения 1. Лемма доказана. $\square$

Завершим доказательство теоремы. Если порядок элемента a четен, то по предложению 15 $G = F \leftthreetimes C_G(i)$, где i — инволюция из $\langle a\rangle$, а F — периодическая абелева нормальная в G подгруппа. По следствию 3.1 из [2, с. 110] F совпадает с объединением всех ядер фробениусовых подгрупп группы G с дополнением $\langle a\rangle$, и теорема верна.

Пусть порядок элемента a нечетен. По условиям теоремы в $\langle a\rangle$ есть конечный в H элемент b, $|b| \notin \{3, 5\}$, а значит, $|b| > 5$. Для $g \in G \setminus H$ подгруппа $B_g = \langle b, b^g\rangle$ содержится в группе Фробениуса $L_g = \langle a, a^g\rangle = F_g \leftthreetimes H_g$ с нильпотентным периодическим ядром F_g и дополнением $H_g = \langle a, a^{gf}\rangle$. Отсюда следует, что $B_g = \langle b, b^g\rangle$ — группа Фробениуса с нильпотентным периодическим ядром и дополнением $T_g = \langle b, b^{gf}\rangle$, где $gf \in H$ (лемма 2). В силу конечности b в H дополнение T_g конечно, а ввиду двупорожденности B_g и локальной конечности ядра в B_g заключаем, что $B_g = \langle b, b^g\rangle$ — конечная группа Фробениуса для любого $g \in G \setminus H$. По предложению 14 объединение F всех ядер фробениусовых подгрупп группы G с дополнениями, содержащими элемент b, является периодической нормальной в G подгруппой и $G = FH$. Легко убедиться, что F совпадает также с объединением всех ядер фробениусовых подгрупп группы G с дополнением $\langle a\rangle$, что и доказывает теорему 1.

§ 3. Предварительные леммы

Пусть группа G, ее собственная подгруппа H и элемент $a \in H$ удовлетворяют условиям теоремы 2. По условиям для $g \in G \setminus H$ подгруппа L_g является группой Фробениуса с ядром F_g и дополнением H_g, изоморфным Z_p, $SL_2(3)$ или $SL_2(5)$. Если H_g изоморфна $SL_2(3)$ или $SL_2(5)$, то L_g будем называть *подгруппой второго рода*. Инволюции из L_g и все сопряженные с ними в G в этом случае будем называть *инволюциями второго рода*.

Лемма 4. *Для тройки* (G, H, a) *справедливы леммы* 1–3.

Доказательство. В доказательствах лемм 1–3 не использовалось условие существования конечного в H элемента b; они опирались только на условие нильпотентности ядер F_g подгрупп $L_g = \langle a, a^g \rangle$, которое справедливо при условиях теоремы 2. Действительно, ядра подгрупп L_g при $|a| = 3$ абелевы в силу предложения 5, а при $|a| = 5$ (условия теоремы 2) нильпотентны ввиду конечности a в G и теоремы Томпсона. $\square$

Замечание 1. Леммы 5–10 доказываются при более слабом, чем в теореме 2, условии:

a — H-фробениусов элемент группы G, $|a| \in \{3, 5\}$ и в $C_H(a)$ точно одна инволюция i.

Лемма 5. *Если* i *— инволюция из* $C_H(a)$, *то* $N_G(\langle a \rangle) \leq C_G(i) \leq H$.

Доказательство. Допустим, что $G_1 = C_G(i) \not\leq H$, и пусть $g \in G_1 \setminus H$. По условиям $L_g = \langle a, a^g \rangle$ — группа Фробениуса с дополнением H_g, и поскольку $i \notin H_g$, то $H_g = \langle a \rangle$. По предложению 1 $G_1 = F_1 \leftthreetimes N_{G_1}(\langle a \rangle)$. Однако G_1 содержит подгруппы H_g $(g \in G \setminus H)$, изоморфные $SL_2(3)$ или $SL_2(5)$; противоречие. Следовательно, $C_G(i) \leq H$. Включение $N_G(\langle a \rangle) \leq C_G(i)$ верно в силу единственности инволюции i в $C_H(a)$. $\square$

Лемма 6. *Пусть* N *— нормальная подгруппа в* G, $a \notin N$ *и для некоторой фробениусовой подгруппы* $L_g = \langle a, a^g \rangle$ *ее ядро* F_g *не содержится в* N. *Тогда для тройки* $(G/N, HN/N, aN)$ *выполняются все условия теоремы* 2, *и если теорема для данной тройки верна, то теорема верна и для тройки* (G, H, a). *В частности, в доказательстве теоремы* 2 *можно считать, что* $N = \bigcap\limits_{x \in G} H^x = 1$.

Доказательство. Поскольку для групп L_g, ядра F_g которых не содержатся в N, гомоморфный образ L_gN/N является группой Фробениуса, порожденной элементами aN и $(aN)^g$, для тройки $(G/N, HN/N, aN)$ выполняются все условия теоремы.

Пусть теорема для тройки $(G/N, HN/N, aN)$ верна и объединение ядер всех подгрупп L_gN/N есть нормальная в G/N подгруппа $\overline{F}$. Рассмотрим ее полный прообраз F в G и подгруппу $G_1 = F \leftthreetimes \langle a \rangle$. Понятно, что ядра всех фробениусовых подгрупп с дополнением $\langle a \rangle$ из G содержатся в F и для группы G_1, ее собственной подгруппы $H_1 = G_1 \cap H$ и элемента a верны условия предложения 1. По предложению 1 $G_1 = F_1 \leftthreetimes N_G(\langle a \rangle)$ и F_1 совпадает с объединением ядер всех фробениусовых подгрупп из G с дополнением $\langle a \rangle$. $\square$

Лемма 7. *Пусть* T *—* $2'$*-подгруппа из* G *и* $T \leftthreetimes \langle a \rangle$ *— группа Фробениуса с ядром* T *и дополнением* $\langle a \rangle$ *и* $G_1 = N_G(T)$ *содержит подгруппу* $L_g = F_g \leftthreetimes H_g$ *второго рода. Тогда* TL_g *— группа Фробениуса с периодическим абелевым ядром* TF_g *и дополнением* H_g.

Доказательство. $TF_g \leftthreetimes \langle a \rangle$ — группа Фробениуса с ядром TF_g и дополнением $\langle a \rangle$ по предложению 6. Отсюда следует, что $TF_g \leftthreetimes \langle s \rangle$ — группа Фробениуса с ядром TF_g и дополнением $\langle s \rangle$ для любого $s \in a^G \cap H_g$. Покажем, что инволюция i из H_g инвертирует T и группа TF_g абелева. Для этого достаточно доказать, что $C_T(i) = 1$.

Разберем случай $|a| = 3$. Можно считать, что $H_g = Q \leftthreetimes \langle a \rangle \simeq SL_2(3)$. Подгруппа $C_T(i)$, очевидно, Q-допустима, и поскольку $Q/\langle i \rangle$ действовать регулярно на $C_T(i)$ не может, для некоторых $t \in Q \setminus \langle i \rangle$ и $1 \neq z \in C_T(i)$ выполняется

$tz = zt$. Легко убедиться, что $atz \in a^G$ и $atzc \in a^G \setminus H$ для любого $c \in F_g \setminus H$ ($F_g \setminus H$ непусто по лемме 1). Таким образом, $L = \langle a, atzc \rangle$ — конечная группа Фробениуса с ядром $R = L \cap TF_g$ и дополнением $H_x \simeq SL_2(3)$, содержащим элементы a, $(atzc)^x$ и инволюцию i. Имеем $tzc \in L$, $(tzc)^i = tzc^{-1} \in L$, $c^2 \in L$, $c \in L$ и $tz \in L$. Поскольку порядок элемента z нечетен и $tz = zt$, то $(tz)^4 = z^4$, $z \in R$ и $C_R(i) \neq 1$; противоречие. Следовательно, $C_T(i) = 1$.

Пусть $|a| = 5$. Тогда $H_g \simeq SL_2(5)$ и по тем же причинам, что и выше, в H_g найдутся элемент t порядка 4 и неединичный элемент $z \in C_T(i)$, перестановочные друг с другом. Для элемента t в $a^G \cap H_g$ найдется элемент s такой, что $st \in a^G$ (с точностью до сопряженности считаем, что $at \in a^G$). Действительно, в фактор-группе $H_g/\langle i \rangle$, изоморфной знакопеременной группе A_5 степени 5, имеем $(1\,2\,3\,4\,5)\cdot(1\,3)(2\,4) = (1\,4\,5\,3\,2)$. Переходя к прообразам и домножая, если необходимо, на i, получаем нужное $at \in a^G$. Затем $atzc \in a^G \setminus H$ для $c \in F_g \setminus H$ и $L = \langle a, atzc \rangle$ — группа Фробениуса с дополнением, содержащим элемент a и инволюцию i и изоморфным $SL_2(5)$. Далее рассуждения предыдущего случая повторяются дословно. Итак, $C_T(i) = 1$, и группа $TF_g = A$ абелева.

Из доказанного следует, что в случае $|a| = 3$ и $H_g \simeq SL_2(3)$ группа $G_1 = TL_g$ является группой Фробениуса с периодическим абелевым ядром $F_1 = TF_g$ и дополнением H_g.

Пусть $|a| = 3$ и $H_g \simeq SL_2(5)$. Нужно доказать, что для элемента b порядка 5 из H_g имеет место равенство $C_{F_1}(b) = 1$. Понятно, что $H_g = C_{G_1}(i)$ и $H_g = \langle a, s \rangle$ для подходящего элемента $s \in a^G \cap H_g$. Допустим, что $z \in C_{F_1}(b) \setminus H$. Тогда $zs \in a^G \setminus H$ и в силу основного условия $L = \langle a, zs \rangle$ — группа Фробениуса с дополнением H_g и ядром $R = F_1 \cap L$, но $z \in R$; противоречие. Пусть $z \in F_1 \cap H$ и $f \in F_1 \setminus H$. Тогда $fs, zfs \in a^G \setminus H$ и $L = \langle a, fs \rangle$, $M = \langle a, zfs \rangle$ — группы Фробениуса с дополнением H_g. Очевидно, что $L = \langle a, b, b^f \rangle$, $M = \langle a, b, b^{zf} \rangle$ и, значит, $L = M$, $sf, zsf \in L$, $z \in L \cap F_1$ и $z = 1$.

Пусть, наконец, $|a| = 5$ и $H_g \simeq SL_2(5)$. Докажем, что $C_{F_1}(b) = 1$ для любого элемента b порядка 3 из H_g. Как и выше, $H_g = C_{G_1}(i)$ и $H_g = \langle a, s \rangle$ для подходящего элемента $s \in a^G \cap H_g$. Допустим, что $z \in C_{F_1}(b) \setminus H$. Тогда $zs \in a^G \setminus H$ и в силу основного условия $L = \langle a, zs \rangle$ — группа Фробениуса с дополнением H_g и ядром $R = F_1 \cap L$, но тогда $z \in R$; противоречие. Пусть $z \in F_1 \cap H$ и $f \in F_1 \setminus H$. Тогда $fs, zfs \in a^G \setminus H$ и $L = \langle a, fs \rangle$, $M = \langle a, zfs \rangle$ — группы Фробениуса с дополнением H_g. Очевидно, что $L = \langle a, b, b^f \rangle$, $M = \langle a, b, b^{zf} \rangle$ и, значит, $L = M$, $sf, zsf \in L$, $z \in L \cap F_1$ и $z = 1$. Итак, элементы порядка 3 из H_g действуют на подгруппе F_1 без неподвижных точек, и G_1 является группой Фробениуса с периодическим абелевым ядром F_1 и дополнением H_g. Лемма доказана. $\square$

Лемма 8. *Если T — 2-подгруппа из G, $T \leftthreetimes \langle a \rangle$ — группа Фробениуса с ядром T и дополнением $\langle a \rangle$ и $G_1 = N_G(T)$ есть подгруппа $L_g = F_g \leftthreetimes H_g$ второго рода, то $T \leq \bigcap\limits_{x \in G_1} H^x$.*

Доказательство. Поскольку $T \leftthreetimes \langle a \rangle$ — группа Фробениуса, то $i \notin T$ и, значит, $T \cap L_g = 1$. Образуем подгруппу $M = T \leftthreetimes H_g$. Пусть $T \not\leq H$, тогда M должна содержать фробениусову подгруппу $L_s = F_s \leftthreetimes H_s$ второго рода с $H_s \simeq H_g$. Но тогда $F_s \leq T$ и $2 \in \pi(F_s) \cap \pi(H_s)$; противоречие. Отсюда выводим, что $T \leq H$ и $T \leq \bigcap\limits_{g \in G_1} H^g$. $\square$

Пример 1. Пусть $|a| = 3$, $L_g = F_g \leftthreetimes H_g$ — группа Фробениуса с ядром

F_g и дополнением $H_g = Q \leftthreetimes \langle a \rangle \simeq SL_2(3)$, T — элементарная абелева 2-группа, $T \leftthreetimes \langle a \rangle$ — группа Фробениуса с ядром T и дополнением $\langle a \rangle$, $G = (T \times (F_g \leftthreetimes Q)) \leftthreetimes \langle a \rangle$ и $H = (T \times Q) \leftthreetimes \langle a \rangle$. Поскольку объединение всех ядер фробениусовых подгрупп с дополнением $\langle a \rangle$ из G — периодическая нормальная подгруппа $F = T \times F_g$ и $G = FH$, вопрос 10.61 из [14] для (G, H, a) решается положительно. Но $G = \langle a^G \rangle = F \leftthreetimes H_g$ не группа Фробениуса.

Лемма 9. *Пусть T — 2-подгруппа из G и $T \leftthreetimes \langle a \rangle$ — группа Фробениуса с ядром T и дополнением $\langle a \rangle$. Тогда $G_1 = N_G(T)$ не содержит фробениусовых подгрупп $L_g = F_g \leftthreetimes H_g$, дополнение H_g в которых изоморфно $SL_2(5)$, когда $|a| = 5$, $G_1 = F \leftthreetimes N_{G_1}(\langle a \rangle)$, а подгруппа $F \leftthreetimes \langle a \rangle$ является группой Фробениуса с ядром F и дополнением $\langle a \rangle$.*

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы неверно, $L_g \le G_1$, $H_g \simeq SL_2(5)$. По предложению 6 $TF_g \leftthreetimes \langle s \rangle$ — группа Фробениуса с ядром TF_g и дополнением $\langle s \rangle$ для любого $s \in a^G \cap TL_g$. Пусть Q — силовская 2-подгруппа из H_g и $H_g = \langle a, b \rangle$, $b \in a^G$.

Рассмотрим случай $|a| = 3$. По предложению 10 подгруппа TF_g нильпотентна, поэтому в качестве T можно выбрать элементарную абелеву группу, а в качестве F_g — минимальную H_g-допустимую элементарную абелеву p-подгруппу (в силу теоремы Машке) с единичным пересечением $H \cap F_g$ (лемма 2). Итак, $TL_g = (T \times F_g) \leftthreetimes H_g$, $H \cap TL_g = T \leftthreetimes H_g$.

Не ограничивая общности, будем считать, что $a \in N_G(Q)$. Очевидно, что $C_T(Q) \ne 1$, и пусть $1 \ne z \in C_T(Q)$ и $1 \ne f \in F_g$. Тогда $bzf = a^t \in a^G \setminus H$ и подгруппа $L_t = \langle a, bzf \rangle$ является группой Фробениуса с дополнением H_t и ядром $F_t \le F_g$. В силу минимальности F_g получаем $F_t = F_g$, $f \in L_t$ и $bz \in L_t$. Далее, $b \notin N_G(Q)$, пусть v — элемент порядка 4 из Q. В силу выбора z и v имеем $x = bz \cdot (bz)^{-v} = [b^{-1}, v] \ne 1, i$, при этом $x \in L_t \cap H_g$. Отсюда выводим, что $a, x \in H_t \cap H_g$, поскольку $H_t = C_{L_t}(i)$, и равенство $H_t = H_g$. Но тогда $z \in L_t$ и L_t не группа Фробениуса; противоречие. Следовательно, $|a| \ne 3$.

Рассмотрим случай $|a| = 5$. Очевидно, можем считать, что $G = TL_g$, и в силу лемм 2 и 8 справедливо $TH_g = H$ и $F_g \cap H_g = 1$. Пусть Q — силовская 2-подгруппа из H_g и $H_g = \langle a, b \rangle$, $b \in a^G$. Можно считать, что подгруппа F_g не содержит собственных H_g-допустимых подгрупп. В 2-группе $T \leftthreetimes Q$ подгруппа Q отлична от своего нормализатора, следовательно, в $C_T(Q)$ есть неединичный элемент z. Пусть $1 \ne f \in F_g$, тогда $bzf = a^t \in a^G \setminus H$ и подгруппа $L_t = \langle a, bzf \rangle$ является группой Фробениуса с дополнением H_t и ядром $F_t \le F_g$. В силу минимальности F_g получаем $F_t = F_g$, $f \in L_t$ и $bz \in L_t$. Выберем в Q такой элемент v, что $b^v \ne b^{-1}$. Как и в предыдущем случае, получаем $x = bz \cdot (bz)^{-v} = [b^{-1}, v] \ne 1, i$, при этом $x \in L_t \cap H_g$. Отсюда $a, x \in H_t \cap H_g$ и $H_t = H_g$. Как и выше, $z \in L_t$ и L_t не группа Фробениуса; противоречие. Следовательно, в G_1 нет подгрупп второго рода, a — циклически H_1-фробениусов элемент в G_1, и лемма вытекает из предложения 13. $\square$

Замечание 2. Пример 1, лемма 9 и предложение 16 показывают, что рассмотрение случая $|a| = 3$ объективно разбивается на ряд самостоятельных подслучаев.

Лемма 10. *Пусть T — $2'$-подгруппа из G, $T \leftthreetimes \langle a \rangle$ — группа Фробениуса с ядром T и дополнением $\langle a \rangle$ и $G_1 = N_G(T)$ содержит подгруппу $L_g = F_g \leftthreetimes H_g$ второго рода. Тогда*

(1) $a^{G_1} = a^G \cap G_1$, $J_1 = i^{G_1} = i^G \cap G_1$, $J_1 \cap C = \varnothing$ *и* $J_1 \subseteq iC$, *где* $C = C_G(T) \lhd G_1$*;*

(2) *теорема для группы* G_1 *верна, т. е. объединение* F *ядер фробениусовых подгрупп из* G_1 *с дополнением* $\langle a\rangle$ *является периодической абелевой нормальной в* G_1 *подгруппой;*

(3) *когда* $|a| = 5$, $\langle a^{G_1}\rangle = F \leftthreetimes H_g$ *— группа Фробениуса,* F *— ядро,* $H_g \simeq SL_2(5)$ *— дополнение;*

(4) *когда* $|a| = 3$, $\langle a^{G_1}\rangle = F \leftthreetimes H_g$, H_g *изоморфна либо* $SL_2(3)$, *либо* $SL_2(5)$ *и в этом случае* $F \leftthreetimes S$ *— группа Фробениуса,* F *— ядро,* $H_g \simeq SL_2(5)$ *— дополнение.*

Доказательство. Равенство $a^G \cap G_1 = a^{G_1}$ следует из леммы 2, а из него следует $i^G \cap G_1 = i^{G_1} = J_1$. Далее, $T \leftthreetimes \langle s\rangle$ — группа Фробениуса с ядром T, дополнением $\langle s\rangle$ для каждого $s \in a^{G_1}$ и $G_1 = N_G(T)$ содержит подгруппу второго рода, содержащую s и сопряженную с $L_g = F_g \leftthreetimes H_g$. В силу леммы 7 каждая инволюция $j \in J_1$ инвертирует T и $J_1 \subseteq iC$, где $C = C_G(T) \lhd N_G(T)$. В частности, $F_g \leq C$ для любого $g \in G_1 \setminus H$. По предложению 13 $R = C \leftthreetimes \langle s\rangle = F_s \leftthreetimes N_R(\langle s\rangle)$ для любого $s \in a^{G_1}$. С помощью леммы 7 несложно показать, что $F_s = F_a = F$ для любого элемента $s \in a^{G_1}$. Далее, в фактор-группе $\overline{G}_1 = G_1/F$ любая пара элементов из $\overline{X} = \bar{a}^{\overline{G}_1}$ порождает конечную подгруппу, либо циклическую, либо изоморфную $SL_2(3)$ и $|a| = 3$ или изоморфную $SL_2(5)$. В случае $|a| = 5$ по теореме Мазурова (предложение 16) $\langle \overline{X}\rangle \simeq SL_2(5)$ и, значит, $\langle a^{G_1}\rangle = F \leftthreetimes H_g$, где $H_g \simeq SL_2(5)$. В случае $|a| = 3$ по теореме Мазурова (предложение 16) $\langle a^{G_1}\rangle = F \leftthreetimes S$, где S — нерасщепляемое расширение группы порядка 2 посредством знакопеременной группы $A(I)$ для некоторого множества I мощности, не меньшей чем 4. При этом образ элемента a в $A(I)$ является тройным циклом $(x\,y\,z)$, где $x, y, z \in I$. Понятно, что $S \not\leq H$, ввиду леммы 1 $N_S(\langle a\rangle) \leq H$, $H \cap a^G = a^H$ и L_g — группы Фробениуса для всех $g \in G_1 \setminus H$. Проверка показывает, что эти условия могут быть реализованы только при $|I|$, равном 4 и 5. Лемма доказана. $\square$

Замечание 3. По лемме 3 дополнения H_g фробениусовых подгрупп L_g, содержащие элемент a, содержатся в H и являются циклическими или изоморфными либо $SL_2(3)$, либо $SL_2(5)$. Если доказываемая теорема 2 верна и объединение F ядер всех фробениусовых подгрупп L_g есть подгруппа, то в фактор-группе $\overline{H} = H/(F \cap H)$ любая пара элементов из $\bar{a}^{\overline{H}}$ порождает подгруппу из указанного списка $\{Z_p, SL_2(3), SL_2(5)\}$. Естественно рассмотреть такую ситуацию в чистом виде. Кроме уже упомянутой работы В. Д. Мазурова [22], авторам известен также следующий результат. Ашбахер в [7] приводит как пример группу $U_3(3)$ с классом C сопряженных элементов порядка 3, любая пара элементов из которого порождает подгруппу из списка $\{Z_3, SL_2(3)\}$. Также, как любезно заметил рецензент, по этой теме опубликованы работы Ашбахера и Холла [25], А. А. Максименко и А. С. Мамонтова [26]. В этих работах доказывается локальная конечность и дано описание групп, порожденных классом сопряженных элементов, любая пара которых порождает подгруппу, изоморфную группе из следующего перечня: Z_3, $Z_3 \times Z_3$, A_4, A_5, $SL_2(3)$ $SL_2(5)$. Теорема 2 настоящей работы в некотором смысле может рассматриваться как обобщение ситуации, описанной в вышеуказанных работах.

§ 4. Доказательство теоремы 2

Лемма 11. *Для любого $g \in G \setminus H$ подгруппа M_g равна $\langle i, a^g \rangle = T_g \leftthreetimes \langle ia^g \rangle$, $|T_g|$ конечен и нечетен, $|ia^g| = 2|a|$ и $T_g \leftthreetimes \langle a^g \rangle$ — группа Фробениуса с ядром T и дополнением $\langle a^g \rangle$.*

Доказательство. Если $L_g = \langle a, a^g \rangle = F_g \leftthreetimes H_g$ — фробениусова подгруппа второго рода из G, то $i \in H_g$ в силу единственности инволюции i в $C_H(i)$ и $M_g = \langle i, a^g \rangle$, очевидно, группа Фробениуса с абелевым ядром $M_g \cap F_g$ и дополнением $\langle ia^g \rangle$.

Пусть $L_g = F_g \leftthreetimes \langle a \rangle$ и $K = \langle s, s^i \rangle$, где $s = a^g$. Согласно лемме 1 каждый элемент из a^G содержится в единственной сопряженной с H подгруппе. Если s и s^i содержатся в одной сопряженной с H подгруппе H^x, то $i \in H^x$. Ввиду лемм 5 и 1 инволюции i и i^x не сопряжены в H^x, что противоречит нечетности порядка коммутатора $[i, x]$. Значит, s и s^i содержатся в различных сопряженных с H подгруппах, и K — группа Фробениуса с ядром T и дополнением $S = \langle s, s^f \rangle$ ($f \in T$, лемма 2). Убедимся, что $i \notin K$. Случай $i \in K \setminus T$ невозможен, поскольку тогда $S = \langle s \rangle$; противоречие. Случай $i \in T$ также невозможен ввиду изолированности i в G. Таким образом, $M_g = K \leftthreetimes \langle i \rangle$.

Допустим, что $|T|$ четен и P — силовская 2-подгруппа из T. Ввиду изолированности i в G получаем $i \in C_{M_g}(P)$ и $t = [i, s] \in O_{2'}(T)$. Но $T = \langle t^{\langle s \rangle} \rangle$ и $2 \notin \pi(T)$; противоречие. Следовательно, $|T|$ нечетен, $B^i = B$ для некоторой подгруппы $B = S^x$, $x \in T$. Ввиду изолированности i в G дополнение B не может содержать инволюцию и потому $S = \langle s \rangle$ и $B = \langle b \rangle$. Снова в силу изолированности i равенство $b^i = b^{-1}$ невозможно, поэтому $ib = bi$ и $M_g = T \leftthreetimes \langle bi \rangle$. По тем же причинам $(ia^g)^2 \neq 1$ и, значит, $|ia^g| = 2|a|$ и $M_g = T \leftthreetimes \langle ia^g \rangle$. □

Для $x \in G^{\#}$ обозначим через N_x теоретико-множественное объединение ядер всех фробениусовых подгрупп с дополнением $\langle x \rangle$. В частности,

$$N_i = \{b \in G \mid b^i = b^{-1},\ |b| = 1 \mod 2\}.$$

Лемма 12. *Когда $\langle a^H \rangle \simeq SL_2(3)$ или $\langle a^H \rangle \simeq SL_2(5)$, теорема 2 верна.*

Доказательство. По лемме 5 $H = C_G(i)$, $H \cap N_a = 1 = H \cap N_i$ и $G = HN_i$. По лемме 11 для любого $g \in G \setminus H$ подгруппа M_g равна $\langle i, a^g \rangle = T_g \leftthreetimes \langle ia^g \rangle$, $|T_g|$ конечен и нечетен, $|ia^g| = 2|a|$ и $T_g \leftthreetimes \langle a^g \rangle$ — группа Фробениуса с ядром T и дополнением $\langle a^g \rangle$. Отсюда заключаем, что $T_g \cap H = 1$ и M_g — группа Фробениуса с циклическим дополнением $\langle ia^h \rangle$ для подходящего $h \in H$. По теореме 2 из [27] $i, a \notin [i, G]$ и $G = [i, G]H$. Из условий леммы следует, что $H \cap F = 1$, где $F = [i, G]$, и $\langle a^G \rangle = F \leftthreetimes \langle a^H \rangle$ — группа Фробениуса с периодическим абелевым ядром F и дополнением $\langle a^H \rangle$. Лемма доказана. □

Доказательство теоремы 2 завершает

Лемма 13. *Когда $\langle a^H \rangle$ — группа Фробениуса с ядром F_H и дополнением $H_g \simeq SL_2(3)$ или $H_g \simeq SL_2(5)$, теорема 2 верна.*

Доказательство. Как и в доказательстве леммы 12, рассмотрим подгруппы $M_g = \langle i, a^g \rangle$ для $g \in G \setminus H$. По лемме 11 $M_g = T_g \leftthreetimes \langle ia^g \rangle$, $|T_g|$ конечен и нечетен, $|ia^g| = 2|a|$ и $T_g \leftthreetimes \langle a^g \rangle$ — группа Фробениуса с ядром T_g и дополнением $\langle a^g \rangle$. Отсюда заключаем, что $M_g \cap C_G(i) \leq \langle a^H \rangle$, $T_g \cap C_G(i) = 1$ и M_g — конечная группа Фробениуса с абелевым ядром T_g и циклическим дополнением $\langle ia^h \rangle$ для подходящего $h \in H$. Понятно, что $H \cap N_a = F_H = H \cap N_i$ и $H = F_H \leftthreetimes C_H(i)$. По лемме 5 $N_H(\langle a \rangle) \leq C_H(i)$ и в силу строения подгруппы $\langle a^H \rangle$ заключаем, что

$\langle a^H \cap C_H(i)\rangle$ — дополнение H_g, изоморфное $SL_2(3)$ или $SL_2(5)$. В силу конечности a в G подгруппа F_H является периодической абелевой группой. Отсюда заключаем, что подгруппа $M_t = \langle i, a^t\rangle$ для любого элемента $t \in H \setminus C_H(i)$ является конечной группой Фробениуса с неинвариантным циклическим дополнением $\langle ia^t\rangle$ порядка $2|a|$. По теореме 1 из [27] $i, a \notin [i, G]$ и $G = [i, G]C_H(i)$. Из условий леммы следует, что $C_H(i) \cap F = 1$, где $F = [i, G]$, и $\langle a^G\rangle = F \leftthreetimes \langle a^H \cap C_H(i)\rangle$ — группа Фробениуса с периодическим абелевым ядром F и дополнением $\langle a^H \cap C_H(i)\rangle$, изоморфным $SL_2(3)$ или $SL_2(5)$. Лемма доказана. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Созутов А. И., Шунков В. П.* Об одном обобщении теоремы Фробениуса на бесконечные группы // Мат. сб. 1976. Т. 100, № 4. С. 495–506.
2. *Попов А. М., Созутов А. И., Шунков В. П.* Группы с системами фробениусовых подгрупп. Красноярск: Изд-во КГТУ, 2004.
3. *Шунков В. П.* Об одном признаке непростоты групп // Алгебра и логика. 1975. Т. 14, № 5. С. 576–603.
4. *Созутов А. И.* О группах с фробениусовыми парами сопряженных элементов // Алгебра и логика. 1977. Т. 16, № 2. С. 204–212.
5. *Fischer B.* F-Gruppen endlicher Ordnung // Arch. Math. 1965. V. 16. P. 330–336.
6. *Fischer B.* Frobeniusautomorphismen endlicher Gruppen // Math. Ann. 1966. Bd 163. S. 273–298.
7. *Aschbacher M.* A characterisation of certain Frobenius groups // Ill. J. Math. 1974. V. 18, N 3. P. 418–426.
8. *Созутов А. И.* О группах с некоторыми системами F-подгрупп // Сиб. мат. журн. 1998. Т. 51, № 6. С. 772–782.
9. *Созутов А. И.* Об одном признаке непростоты групп // Алгебра и логика. 2012. Т. 51, № 6. С. 772–782.
10. *Старостин А. И.* О группах Фробениуса // Укр. мат. журн. 1971. Т. 23, № 5. С. 629–639.
11. *Созутов А. И.* О строении неинвариантного множителя в некоторых группах Фробениуса // Сиб. мат. журн. 1994. Т. 35, № 4. С. 893–901.
12. *Блудов В. В.* О группах Фробениуса // Сиб. мат. журн. 1997. Т. 38, № 6. С. 1219–1221.
13. *Журтов А. Х., Лыткина Д. В., Мазуров В. Д., Созутов А. И.* О периодических группах, свободно действующих на абелевых групп // Тр. ИММ УрО РАН. 2013. Т. 19, № 3. С. 136–143.
14. *Коуровская тетрадь.* Изд. 14-е. Новосибирск: Ин-т математики, 1999.
15. *Попов А. М.* О строении некоторых групп с конечным H-фробениусовым элементом // Алгебра и логика. 2004. Т. 43, № 2. С. 220–228.
16. *Попов А. М., Созутов А. И.* О группах с H-фробениусовым элементом четного порядка // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 1. С. 70–80.
17. *Горчаков Ю. М.* О бесконечных группах Фробениуса // Алгебра и логика. 1965. Т. 4, № 1. С. 15–29.
18. *Адян С. И.* Проблема Бернсайда и тождества в группах. М.: Наука, 1975.
19. *Ольшанский А. Ю.* Бесконечная группа с подгруппами простых порядков // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1980. Т. 44, № 2. С. 309–321.
20. *Журтов А. Х.* Группы Фробениуса, порожденные двумя элементами порядка 3 // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 4. С. 533–537.
21. *Попов А. М., Созутов А. И.* О группах с фробениусовыми элементами // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 2. С. 436–443.
22. *Мазуров В. Д.* Характеризация знакопеременных групп // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 1. С. 54–69.
23. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1977.
24. *Хухро Е. И.* Разрешимая группа с регулярным расщепляющим автоморфизмом простого порядка нильпотентна // Алгебра и логика. 1977. Т. 17, № 5. С. 611–618.
25. *Aschbacher M., Hall M.* Groups generated by a class of elements of order 3 // J. Algebra. 1973. V. 24, N 3. P. 591–612.

26. *Максименко А. А., Мамонтов А. С.* Локальная конечность некоторых групп, порожденных классом сопряженных элементов порядка 3 // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 3. С. 631–644.

27. *Созутов А. И., Дураков Е. Б.* О точно дважды транзитивных группах с обобщенно конечными элементами // Сиб. мат. журн. 2017. Т. 58, № 5. С. 1144–1149.

Статья поступила 27 ноября 2017 г.

Созутов Анатолий Ильич, Дураков Евгений Борисович
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
`sozutov_ai@mail.ru`, `durakov@mail.ru`