УДК 517.55

ПРОДОЛЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ МНОЖЕСТВ В ОКРЕСТНОСТЬ КЛИНА НЕОБЩЕГО ПОЛОЖЕНИЯ

Юрьева Е.В.,
научный руководитель д-р физ.-мат. наук проф. Цих А.К.,
Сибирский Федеральный Университет

Наряду с теоремой Гартогса, одним из важных примеров "принудительного" продолжения для голоморфных функций многих переменных является теорема "об острие клина", которая была получена Н. Н. Боголюбовым в 1956 году [1], [2], в связи с обоснованием дисперсионных соотношений в квантовой теории поля.

Она утверждает, что *если функция f(z), голоморфная в трубчатой области* $T=\mathbb{R}^n+i\Gamma$*, основанием которой служит двусторонний световой конус* $\Gamma: y_1^2>y_2^2+\ldots+y_n^2$*, и непрерывная в ее замыкании* $\bar{T}$*, то она голоморфно продолжается в* $\mathbb{C}^n$. Результат Н. Н. Боголюбова был обобщен в статье С. И. Пинчука [3], где вместо указанной трубчатой области над световым конусом рассматривался клин с острием на порождающем многообразии, ограниченный гладкими гиперповерхностями в общем положении. Условие общего положения автоматически накладывает ограничение о том, что обе стороны клина содержат полномерный телесный угол вблизи точек острия. В статье [4] был исследован вопрос голоморфного продолжения функций в окрестность острия двустороннего n-кругового клина необщего положения. В ней рассматривались клинья, образованные двумя n-круговыми областями $D_\pm$, замыкания которых пересекаются лишь по единичному остову $T^n=\{|z_1|=\ldots=|z_n|=1\}$. При этом объединение $K=D_+\cup T^n\cup D_-$ может не содержать вблизи острия T^n никакого полномерного телесного угла; в этом случае мы говорим, что K – клин *необщего положения*.

Проблема устранения особенностей аналитических множеств рассматривалась в работах Александера, Беккера, Б. Шиффмана и К. Фунахаси (формулировки, доказательства и литературные ссылки приведены в книге Е. М. Чирки [5]), и может быть сформулирована в следующем виде. Пусть E – замкнутое подмножество комплексного многообразия X и A - аналитическое подмножество в $X\setminus E$ чистой размерности. Ставится вопрос: *при каких условиях на E и A замыкание* $\bar{A}$ *множества A в X будет аналитическим подмножеством в X*. Наиболее общее достижение в этом направлении, обобщающее результаты Б. Шиффмана и К. Фунахаси, было получено Е. М. Чиркой ([5], Теорема 18.5).

В [5] отмечается, что при наличии у E богатой комплексной структуры, аналитическое подмножество в $X\setminus E$ может подходить к E, неконтролируемо "болтаясь". Поэтому для устранения таких особенностей нужны дополнительные условия. С другой стороны, если комплексная структура E бедная, скажем, если E – гладкое многообразие, не содержащие никаких максимально комплексных подмногообразий нужной размерности (кандидатов на край аналитического множества), то можно надеяться, что аналитическое подмножество A в $X\setminus E$ "не заметит" E, т. е. $\bar{A}$ будет аналитическим. Это подтверждает упомянутый результат Б. Шиффмана о продолжении аналитических множеств размерности $p\geq 2$ через остов поликруга. К. Фунахаси показал, что в $\mathbb{C}^n$ особенности вида $\mathbb{R}^m\times\mathbb{C}^{p-2}$ тоже устранимы. Теорема Е. М. Чирки [5] утверждает, что *если E -* C^1*-подмногообразие в X, у которого почти в каждой точке* ξ *комплексная касательная плоскость* $T_\xi^c E$ *имеет* *размерность < p – 1, и A – чисто p-мерное аналитическое подмножество в* $X \setminus E$*, то* $\bar{A}$ *– аналитическое подмножество в X.*

Свой результат [3], применительно к продолжению голоморфных функций в клине, С. И. Пинчук проинтерпретировал в [6] для *n*-мерных аналитических множеств, определенных в клине из $\mathbb{C}^{n+1}$. Следуя этой идее, им в [6] получено обобщение теоремы Боголюбова для аналитических множеств, определенных в клине общего положения в $\mathbb{C}^{n+m}$. Основной результат настоящей работы состоит в распространении теоремы Пинчука на случай *n*-кругового клина необщего положения.

Введем необходимые обозначения. Пусть Ω - область в $\mathbb{C}^{n+m} = \mathbb{C}_z^n \times \mathbb{C}_w^m$ вида $\Omega = K \times \omega$, где $K = D_+ \cup T^n \cup D_-$ - клин в $\mathbb{C}^n$ с острием T^n, содержащий "диагональ" $|z_1| = \ldots = |z_n|$, а ω – ограниченная область в $\mathbb{C}^m$. Пусть $A_\pm \subset D_\pm \times \omega$ - аналитические подмножества. Эти подмножества назовем *допустимыми*, если:

1. Замыкания $\overline{A_\pm}$ не пересекают $K \times \partial\omega$ (здесь $\partial\omega$ - граница области ω).
2. $\overline{A_\pm}$ пересекают сдвинутые торы $T_\varepsilon^n = \left\{ z : |z_1| = 1, \cdots, |z_{n-1}| = 1,\ |z_n| = 1 \pm \varepsilon \right\}$ по множеству с конечной (*n* + 1)-мерой Хаусдорфа.
3. Для любой формы $\varphi \in D^{n,0}(\Omega)$ существует предел $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{T_\varepsilon^n \cap A_\pm} \varphi$, который определяет поток $\partial^0 A_\pm$ биразмерности (*n*,0) на Ω:

$$\left(\partial^0 A_\pm, \varphi\right) := \lim_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{T_\varepsilon^n \cap A_\pm} \varphi,\ \ \varphi \in D^{n,0}(\Omega).$$

Этот поток будем называть *значением* $A_\pm$ на T^n. В силу специального выбора ориентации совпадение значений A_+ и A_- на T^n означает, что $\partial^0 A_- = (-1)^n \partial^0 A_+$.

Теорема *Пусть клин* $K = D_+ \cup T^n \cup D_-$ *содержит "диагональ"* $|z_1| = \ldots = |z_n|$ *и* $A_\pm$ *- допустимые чисто n-мерные аналитические множества в* $D_\pm \times \omega$ с совпадающими значениями на острие $T^n \times \omega$: $\partial^0 A_- = (-1)^n \partial^0 A_+$. *Тогда* $A_+ \cup A_-$ *продолжается до аналитического подмножества в* $W = K \times \omega$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Владимиров В. С. Методы теории функций многих комплексных переменных. М.: Наука, 1964.
2. Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Поливанов М. К. Вопросы теории дисперсионных соотношений М.: Физматгиз, 1958.
3. Пинчук С. И. Теорема Боголюбова об "острие клина" для порождающих многообразий// Мат. сб. 1974. Т. 94 С. 468-482.
4. Юрьева Е. В. О голоморфном продолжении в окрестность острия клина необщего положения// Сиб. мат. журнал 2011. Т. 52, №3 С.713-719.
5. Чирка Е. М. Комплексные аналитические множества. М.: Наука, 1985.
6. Пинчук С.И. Теорема об острие клина для аналитических множеств//Доклады АН СССР 1985. Т.285 С. 563-566