Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2009, 2(1), 91-104

УДК 519.624

Взаимодействие возмущений стекающей плёнки, вызываемых несколькими локальными нагревателями

Владимир В.Кузнецов*
Институт гидродинамики им. М.А.Лаврентьева СО РАН
Лаврентьева 15, Новосибирск, 630090,
Россия

Получена 10.11.2008, окончательный вариант 15.12.2008, принята к печати 10.01.2009

Для жидкой пленки, стекающей по наклоненной к горизонту плоской подложке и по расположенным на ней нагревателям, проведены расчеты эволюции полей скорости, температуры и положения поверхности раздела жидкость-газ. Расчеты проводились для случая двух одинаковых нагревателей, имеющих рабочие поверхности в форме прямоугольника. Взаимодействие возмущений, вызванных нагревателями, изучалось как при их расположении один за другим по потоку, так и в случае их расположения на одном уровне по потоку вблизи друг друга. Установлено, что взаимодействие возникающих поверхностных и температурных возмущений, их наложение друг на друга оказывает существенное влияние на основные характеристики процесса — на максимальный достигаемый нагрев подложки и на наибольшее утончение жидкой плёнки. При расположении нагревателей один за другим по потоку установлено существование критической величины зазора между нагревателями, при котором возмущения максимальны.

Ключевые слова: жидкая пленка, поверхность раздела жидкость-газ, локальный нагреватель.

Введение

Стекающие пленки широко применяются в технике для охлаждения электронных устройств, для интенсификации теплообмена и т.д. Поверхностные силы в таком течении могут доминировать над объемными силами или быть сравнимыми с ними. Одно из обнаруженных явлений при локальном нагреве стекающей плёнки — это формирование пространственной самоорганизующейся структуры. По-видимому, впервые формирование структур было замечено в экспериментальном исследовании [1]. Обнаружено, что локальный нагрев приводит к местному существенному утолщению пленки вблизи передней кромки нагревателя (жидкого вала). При определенной пороговой плотности теплового потока течение разделяется на вертикальные струи, следующие с определенной длиной волны, и тонкую плёнку между ними. Физические причины, приводящие к появлению вала, исследованы в [2]. Прямыми измерениями температурного поля на поверхности пленки жидкости с использованием инфракрасной термографии установлено, что формирование структур имеет термокапиллярную природу. В [3]-[5] разработаны математические модели процесса и построены некоторые решения, но анализ ограничивался случаями плоскопараллельных движений. В [3] расчеты термокапиллярной деформации, вызванной локальным нагревом пленки, выполнены для условий на стенке $T = const$ и $q = const$. В [4] форма поверхности пленки рассчитывалась по измеренному с помощью инфракрасной термографии распределению температур на поверхности пленки. Было показано, что градиенты температуры на

*e-mail: kuznetsov@hydro.nsc.ru
© Siberian Federal University. All rights reserved

поверхности пленки, измеренные при локальном нагреве, могут приводить к возникновению термокапиллярного возвратного течения навстречу основному потоку жидкости. В [5] при расчете температуры учитывались температурная зависимость вязкости и оба механизма переноса тепла — кондуктивный и конвективный. В [6, 7] моделировались трехмерные течения. В [6] рассматривался локальный нагрев стекающей пленки при умеренных интенсивностях нагревателя, а в [7] численно построены периодические (по направлению поперек потока) решения задачи с бесконечно длинным нагревателем. Здесь рассчитано появление струйного режима стекания по достижению пороговой интенсивности нагрева.

В перечисленных работах рассматривались возмущения, вызванные одним прямоугольным нагревателем. В работе [8] проведен анализ влияния геометрической формы нагревателя на динамику жидкой пленки. Но может быть так, что несколько нагревателей расположены вблизи один от другого. Анализ взаимодействия возмущений, вызванных несколькими нагревателями, до настоящего времени практически не проводился.

В данной работе изучается эволюция полей скорости, температуры и деформаций поверхности раздела жидкость-газ при включении двух одинаковых нагревателей с прямоугольной рабочей поверхностью. Расчеты проводились как для случая нагревателей, следующих один за другим по потоку, так и для расположенных на одном уровне (по потоку) один подле другого. Среди параметров процесса особый интерес имеют наибольшая достигаемая температура и максимальное утончение пленки. Проведенные исследования показали, что для нагревателей, следующих один за другим по потоку, в процессе движения имеют место взаимодействие, наложение и взаимное влияние температурных возмущений и поверхностных структур, таких как валики, продольные стекающие струи и утончения пленки. Установлено, что два нагревателя дают более значительные перегревы и искажения пленки, чем один сдвоенный нагреватель. При этом имеется некоторый критический зазор между нагревателями, при котором вызванные ими возмущения являются наибольшими.

1. Математическая модель

При построении математической модели были использованы упрощения, основанные на порядковом различии величины вкладов отдельных факторов в соотношения. Исследования показали, что при интенсивных локальных нагревах для процесса теплопереноса одинаково существенны оба механизма - конвективный и кондуктивный. Более того, перенос температуры в данной задаче является определяющим фактором: распределение температуры задает поле термокапиллярных сил, наиболее существенных для таких течений. Поэтому уравнение переноса энергии решалось в полной постановке. С другой стороны, вклад инерционных членов в уравнение импульсов несуществен, и ими оказалось возможным пренебречь. С помощью параметрического анализа были упрощены также некоторые граничные условия.

Пусть подложка наклонена к горизонту под углом α. Выберем систему декартовых координат $x,\ y,\ z$ так, что ось Oz ортогональна к подложке, а ось Ox направлена в сторону действия скатывающей силы. Пусть жидкость занимает область $\Omega = \{(x, y, z) : -\infty < x, y < \infty, 0 < z < H(t, x, y,)$, где H — толщина пленки. Если u, v, w — компоненты вектора скорости $\vec{v}$, p — гидродинамическое давление, а T — температура жидкости, то движение жидкости описывается следующей системой уравнений:

$$\varrho(u_t + uu_x + vu_y + wu_z) = -p_x + \varrho g \sin\alpha + 2\Big[(\mu D_{11})_x + (\mu D_{12})_y + (\mu D_{13})_z\Big]; \qquad (1)$$

$$\varrho(v_t + uv_x + vv_y + wv_z) = -p_y + 2\Big[(\mu D_{12})_x + (\mu D_{22})_y + (\mu D_{23})_z\Big]; \tag{2}$$

$$\varrho(w_t + uw_x + vw_y + ww_z) = -p_z - \varrho g\cos\alpha + 2\Big[(\mu D_{13})_x + (\mu D_{23})_y + (\mu D_{33})_z\Big]; \tag{3}$$

$$u_x + v_y + w_z = 0; \tag{4}$$

$$\varrho c_p(T_t + uT_x + vT_y + wT_z) = \kappa(T_{xx} + T_{yy} + T_{zz}). \tag{5}$$

Здесь компоненты D_{ij} $(i, j = 1, 2, 3;\ \ D_{ij} = D_{ji})$ тензора скоростей деформаций D имеют вид

$$D_{11} = u_x, \quad D_{12} = (u_y + v_x)/2, \quad D_{13} = (u_z + w_x)/2,$$

$$D_{22} = v_y, \quad D_{23} = (v_z + w_y)/2, \quad D_{33} = w_z,$$

где κ — коэффициент теплопроводности; c_p — удельная теплоемкость; $\mu = \mu(T)$ — динамический коэффициент вязкости; ϱ — плотность жидкости. Граничные условия для системы (1)–(5) имеют следующий вид: на подложке, при $z = 0$

$$u = v = w = 0; \tag{6}$$

$$\kappa T_z - b_1(T - T_1) = -q_1; \tag{7}$$

на свободной поверхности пленки при $z = H$

$$H_t + uH_x + vH_y - w = 0; \tag{8}$$

$$(p_o - p)\vec{n} + 2\mu D\cdot\vec{n} = \sigma K\vec{n} + \nabla_s\sigma; \tag{9}$$

$$\kappa\frac{\partial T}{\partial n} + b_2(T - T_2) = q_2. \tag{10}$$

Здесь T_0 — температура натекающей сверху жидкости; T_1 — температура газа в некотором удалении от жидкости; T_2 — температура подложки (вообще говоря, не постоянная). Через $b_1,\ b_2$ обозначены коэффициенты теплообмена, а через $q_1,\ q_2$ — задаваемые тепловые потоки. Знаки выбраны так, чтобы положительное значение q_1, q_2 соответствовало притоку тепла к пленке, а $b_1, b_2 > 0$ означало бы остывание нагретой жидкости. Далее, K — удвоенная средняя кривизна свободной поверхности, $\nabla_s = \nabla - \vec{n}(\vec{n}\cdot\nabla)$ — поверхностный градиент, коэффициент поверхностного натяжения σ считается линейно зависящим от температуры: $\sigma = \sigma_o - \sigma_T(T - T_0)$, $\sigma_o, \sigma_T = \mathrm{const} > 0$, p_o — давление в газе, $\vec{n}, \vec{s}_1, \vec{s}_2$ — орты нормального и касательных векторов, причем $\vec{s}_1$ ортогонален к оси Oy.

В рассматриваемой модели некоторые из свойств жидкости (вязкость, поверхностное натяжение) считаются зависящими от температуры, а другие (плотность, теплопроводность) полагаются постоянными. Эти допущения не являются произвольными. Согласно [9] измерение коэффициента теплопроводности включает установление так называемого приемлемого интервала температуры, в котором этот коэффициент можно считать постоянным. Для рассматриваемых здесь жидкостей (растворов спирта в воде), а также для большинства других, используемых в технических устройствах, этот интервал достигает 20 градусов. В то же время при таких вариациях температуры динамические коэффициенты вязкости тех же жидкостей меняются существенно, на десятки процентов.

Сделаем в задаче (1)–(10) замену переменных: вместо координаты z и компонент вектора скорости u, v, w будем использовать координату $\xi = z/H(t, x, y)$ и модифицированные

компоненты вектора скорости $u^1 = uH$, $v^1 = vH$, $w^1 = w - u\xi H_x - v\xi H_y$. Тогда получаем формулы для замены переменных при дифференцировании

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\xi H_x}{H}\frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\xi H_y}{H}\frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} - \frac{\xi H_t}{H}\frac{\partial}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial \xi},$$

а компоненты тензора скоростей деформаций примут вид

$$D_{11} = \frac{Hu^1_x - H_x(u^1 + \xi u^1_\xi)}{H^2}, \quad 2D_{12} = \frac{1}{H}\left[u^1_y + v^1_x - \frac{H_y(u^1 + \xi u^1_\xi) + H_x(v^1 + \xi v^1_\xi)}{H}\right],$$

$$2D_{13} = w^1_x + \frac{1}{H^2}u^1_\xi + \xi\left(\frac{u^1 H_x + v^1 H_y}{H}\right)_x - \frac{\xi H_x}{H}w^1_\xi - \frac{\xi H_x}{H^2}[H_x(u^1 + \xi u^1_\xi) + H_y(v^1 + \xi v^1_\xi)],$$

$$2D_{23} = w^1_y + \frac{1}{H^2}v^1_\xi + \xi\left(\frac{u^1 H_x + v^1 H_y}{H}\right)_y - \frac{\xi H_y}{H}w^1_\xi - \frac{\xi H_y}{H^2}[H_x(u^1 + \xi u^1_\xi) + H_y(v^1 + \xi v^1_\xi)],$$

$$D_{22} = \frac{Hv^1_y - H_y(v^1 + \xi v^1_\xi)}{H^2}, \quad D_{33} = \frac{Hw^1_\xi + H_x(u^1 + \xi u^1_\xi) + H_y(v^1 + \xi v^1_\xi)}{H^2}.$$

Проведя в задаче (1)–(10) замену переменных, получим уравнения движения в полосе $0 < \xi < 1$, $-\infty < x, y < \infty$:

$$\varrho\left(Hu^1_t - H_t(u^1 + \xi u^1_\xi) + u^1 u^1_x + v^1 u^1_y + w^1 u^1_\xi - \frac{H_x(u^1)^2 + H_y u^1 v^1}{H}\right) = H^2\Bigg[-p_x +$$

$$+\varrho g\sin\alpha + 2(\mu D_{11})_x - \frac{2\xi H_x}{H}(\mu D_{11})_\xi + 2(\mu D_{12})_y - \frac{2\xi H_y}{H}(\mu D_{12})_\xi + \frac{2}{H}(\mu D_{13})_\xi\Bigg]; \tag{11}$$

$$\varrho\left(Hv^1_t - H_t(v^1 + \xi v^1_\xi) + u^1 v^1_x + v^1 v^1_y + w^1 v^1_\xi - \frac{H_y(v^1)^2 + H_x u^1 v^1}{H}\right) = H^2\Bigg[-p_y +$$

$$+2(\mu D_{12})_x - \frac{2\xi H_x}{H}(\mu D_{12})_\xi + 2(\mu D_{22})_y - \frac{2\xi H_y}{H}(\mu D_{22})_\xi + \frac{2}{H}(\mu D_{23})_\xi\Bigg]; \tag{12}$$

$$\varrho\Big(Hw^1_t + u^1 w^1_x + v^1 w^1_y + w^1 w^1_\xi) + \varrho(HZ_t + u^1 Z_x + v^1 Z_y + w^1 Z_\xi\Big) = -p_\xi +$$

$$+H\Bigg[-\varrho g\cos\alpha + 2(\mu D_{13})_x - \frac{2\xi H_x}{H}(\mu D_{13})_\xi + 2(\mu D_{23})_y - \frac{2\xi H_y}{H}(\mu D_{23})_\xi + \frac{2}{H}(\mu D_{33})_\xi\Bigg]; \tag{13}$$

$$u^1_x + v^1_y + w^1_\xi = 0; \tag{14}$$

$$\varrho c_p\big(HT_t - H_t\xi T_\xi + u^1 T_x + v^1 T_y + w^1 T_\xi\big) = \kappa\Bigg[\Delta T + \frac{1 + \xi^2(H_x^2 + H_y^2)}{H^2}T_{\xi\xi} -$$

$$-\frac{2\xi}{H}(H_x T_{x\xi} + H_y T_{y\xi}) + \xi\left(\frac{2(H_x^2 + H_y^2)}{H^2} - \frac{\Delta H}{H}\right)T_\xi\Bigg]. \tag{15}$$

Здесь и всюду далее

$$Z = \frac{\xi(H_x u^1 + H_y v^1)}{H}, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

Граничные условия (6)-(10) преобразуются к виду:
при $\xi = 0$

$$u^1 = v^1 = w^1 = 0; \tag{16}$$

$$\kappa T_\xi \Big/ H - b_1(T - T_1) = -q_1; \tag{17}$$

при $\xi = 1$

$$H_t - w^1 = 0;, \tag{18}$$

$$p_o - p + 2\mu\vec{n} \cdot D \cdot \vec{n} = \sigma \frac{\Delta H + H_y^2 H_{xx} + H_x^2 H_{yy} - 2H_x H_y H_{xy}}{W^{3/2}}; \tag{19}$$

$$2\mu\vec{s}_1 \cdot D \cdot \vec{n} = -\frac{\sigma_T T_x}{\sqrt{W}}, \quad 2\mu\vec{s}_2 \cdot D \cdot \vec{n} = -\frac{\sigma_T T_y}{\sqrt{W}}; \tag{20}$$

$$\kappa \left[-\frac{H_x T_x + H_y T_y}{\sqrt{W}} + \frac{\sqrt{W}}{H} T_\xi \right] + b_2(T - T_2) = q_2. \tag{21}$$

Здесь

$$W = 1 + H_x^2 + H_y^2, \quad \vec{n} = \frac{(-H_x, -H_y, 1)}{\sqrt{W}}, \quad \vec{s}_1 = \frac{(1, 0, H_x)}{\sqrt{1 + H_x^2}}, \quad \vec{s}_2 = \frac{(0, 1, H_y)}{\sqrt{1 + H_y^2}}.$$

Данная замена переменных приводит к определенному упрощению задачи: область пространственных переменных становится не зависящей от времени и имеющей плоскую свободную границу; уравнение неразрывности (4) сохраняет свой вид, а кинематическое условие (8) упрощается и становится линейным.

Зададим масштабы размерных величин — толщины пленки, поперечного градиента температуры, скорости жидкости и продольной длины следующим образом:

$$H_o = \sup_{t,y} \lim_{x \to -\infty} H(t, x, y), \quad Q = \sup_{t,x,y} \frac{q_1}{\kappa}, \quad U = \frac{\mu_0}{\varrho H_o}, \quad l = \left(\frac{\sigma_o H_o^2}{\varrho U^2} \right)^{1/3}. \tag{22}$$

Здесь $\mu_0 = \mu(T_0)$. Масштабы H_o, Q, U часто использовались раньше в различных работах; величина l является аналогом капиллярной длины и введена в [5] специально для приведения задач динамики локально нагреваемых жидких пленок к безразмерному виду. Дело в том, что при применении приближения тонкого слоя используемые масштабы размерных величин не могут быть произвольными. Они должны удовлетворять следующим условиям: продольная длина l должна быть того же порядка, что и размеры появляющихся на пленке структур (толщина возникающего вала); возникающие после приведения задачи к безразмерному виду критерии подобия должны иметь величину порядка единицы; наконец, фактически рассчитанные значения неизвестных (безразмерных) величин должны быть умеренными. Апостериори установлено, что заданные в (22) масштабы отвечают этим требованиям.

В задаче (10)-(21) перейдем к безразмерным переменным $\hat{t}$, $\hat{x}$, $\hat{y}$, $\hat{u}$, $\hat{v}$, $\hat{w}$, θ, h, $\hat{q}$, $\hat{q}_1$, $\hat{p}$, θ_1, $\tilde{\theta}$, $\hat{\mu}$, с помощью формул

$$t = l\hat{t}/U, \quad x = l\hat{x}, \quad y = l\hat{y}, \quad u^1 = UH_o\hat{u}, \quad v^1 = UH_o\hat{v}, \quad w^1 = H_o\hat{w}/l,$$

$$H = H_o h, \quad p = p_o + \sigma_o H_o \hat{p}/l^2 + \varrho g l \hat{x} \sin\alpha - \varrho g H_o \xi \cos\alpha, \quad T = T_o + QH_o\theta,$$

$$T_1 = T_o + QH_o\theta_1, \quad q = -bT_0 + Q\hat{q}, \quad q_1 = Q\hat{q}_1, \quad \tilde{\theta} = \theta\Big|_{\xi=1}, \quad \mu = \mu_o\hat{\mu}.$$

Будем считать, что имеет место приближение тонкого слоя, при котором $\varepsilon = H_o/l \ll 1$. Используя эти переменные и пренебрегая младшими по степеням ε членами, перепишем уравнения (10)–(14) в следующем виде (крышечки над переменными далее, везде опускаем):

$$(\mu u_\xi)_\xi - h^3 p_x = 0, \quad (\mu v_\xi)_\xi - h^3 p_y = 0; \tag{23}$$

$$p_\xi = 0, \quad u_x + v_y + w_\xi = 0; \tag{24}$$

$$h\mathbf{D}(\theta_t - h_t\theta_\xi + u\theta_x + v\theta_y + w\theta_\xi) = \varepsilon^2 h^2 \Delta\theta + \big[1 + \varepsilon^2\xi^2(h_x^2 + h_y^2)\big]\theta_{\xi\xi} -$$
$$-2\xi\varepsilon^2 h(h_x\theta_{x\xi} + h_y\theta_{y\xi}) + \varepsilon^2\xi^2\big[2(h_x^2 + h_y^2) - h\Delta h\big]\theta_\xi. \tag{25}$$

В уравнении переноса тепла (25) удерживаются все члены, в том числе и внепорядковые. Это объясняется не только желанием рассчитать распределение температуры как можно точнее, но также и тем обстоятельством, что отбрасывание младших членов здесь не только не упростит процедуру его решения, но, наоборот, усложнит её, потому что полное уравнение (25) имеет параболический тип, а упрощенное станет ультрапараболическим, и построить его решение, в том числе и численное, будет гораздо труднее. Граничные условия на подложке ($\xi = 0$) примут вид

$$u = v = w = 0; \tag{26}$$

$$\theta_\xi \Big/ h - \mathbf{Bi_1}(\theta - \theta_1) = -q_1, \tag{27}$$

и условия на свободной границе при $\xi = 1$:

$$h_t - w = 0; \tag{28}$$

$$-p = \Delta h - \mathbf{A}h + \mathbf{C}x; \tag{29}$$

$$\mu u_\xi = -\mathbf{Ma}h^2\tilde{\theta}_x, \quad \mu v_\xi = -\mathbf{Ma}h^2\tilde{\theta}_y, \tag{30}$$

$$\theta_\xi \Big/ h + \mathbf{Bi_2}(\tilde{\theta} - \theta_2) = q_2. \tag{31}$$

Здесь безразмерные критерии подобия $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$, $\mathbf{Ma}$, $\mathbf{Bi_1}$, $\mathbf{Bi_2}$ задаются формулами

$$\mathbf{A} = \frac{gH_o^2\cos\alpha}{U^2 l}, \quad \mathbf{C} = \frac{gH_o\sin\alpha}{U^2}, \quad \mathbf{D} = \frac{H_o\mu_o c_p}{l\kappa},$$

$$\mathbf{Ma} = \frac{\sigma_T Q H_o^2}{\mu_0 U l}, \quad \mathbf{Bi_1} = \frac{b_1 H_o}{\kappa}, \quad \mathbf{Bi_2} = \frac{b_2 H_o}{\kappa}.$$

Числа $\mathbf{A}$, $\mathbf{C}$ задают вклад в градиент давления его гидростатических (продольной и поперечной) составляющих, числа Био $\mathbf{Bi_1}$, $\mathbf{Bi_2}$ определяют интенсивность теплообмена пленки с подложкой и с внешней (газовой) средой, а модифицированное число Марангони $\mathbf{Ma}$ характеризует действие термокапиллярных сил на поверхности неоднородно нагретой пленки. Число Марангони было введено L.Napolitano, и его модификация здесь связана с особенностями данной задачи, поскольку использование этого числа в классическом виде затруднено: оно будет много больше единицы. Число $\mathbf{D}$ является отношением порядков интенсивностей кондуктивных и конвективных потоков тепла в пленке. Важная особенность рассматриваемых здесь задач — близость этих порядков: $\mathbf{D} \sim 1$. Таким образом, несмотря на приближение тонкого слоя, в уравнении переноса тепла нельзя пренебрегать конвективными членами. Заметим еще, что в условии (29) средний член в правой части внепорядковый:

при малых ε он много меньше последнего. Но в некоторых задачах угол наклона α мал, и тогда порядки этих членов сравнимы. В рассматриваемых далее, в данной работе примерах расчета течений тонких пленок водных растворов этанола все введенные здесь критерии подобия принимают умеренные (порядка единицы) значения. При этом значение числа ε остается малым.

Определим функции $F(t,x,y,\xi)$, $G(t,x,y,\xi)$, $\Phi(t,x,y,\xi)$, $\Gamma(t,x,y,\xi)$, $\varphi(t,x,y)$, $\gamma(t,x,y)$ с помощью соотношений

$$F=\int\limits_0^\xi \frac{1-\tau}{\mu(\theta(t,x,y,\tau))}d\tau, \quad G=\int\limits_0^\xi \frac{1}{\mu(\theta(t,x,y,\tau))}d\tau, \quad \Phi=\int\limits_0^\xi F(t,x,y,\tau)d\tau,$$

$$\Gamma=\int\limits_0^\xi G(t,x,y,\tau)d\tau, \quad \varphi=\Phi\big|_{\xi=1}, \quad \gamma=\Gamma\big|_{\xi=1}. \tag{32}$$

Дважды интегрируя уравнения (23) по ξ и используя граничные условия (26), (30) получим для определения модифицированных компонент u, v вектора скорости формулы

$$u=-h^3Fp_x-\mathbf{Ma}h^2G\tilde{\theta}_x, \quad v=-h^3Fp_y-\mathbf{Ma}h^2G\tilde{\theta}_y, \tag{33}$$

а интегрируя по ξ от 0 до ξ уравнение неразрывности (24) с использованием граничного условия (для w) (26), получаем

$$w=(h^3\Phi p_x+\mathbf{Ma}h^2\Gamma\tilde{\theta}_x)_x+(h^3\Phi p_y+\mathbf{Ma}h^2\Gamma\tilde{\theta}_y)_y. \tag{34}$$

Далее, подставив значение w при $\xi=1$ в краевое условие (27), получим уравнение для функции $h(t,x,y)$

$$h_t+\big[h^3\varphi(\Delta h-\mathbf{A}h+\mathbf{C}x)_x+\mathbf{Ma}h^2\gamma\tilde{\theta}_x\big]_x+\big[h^3\varphi(\Delta h-\mathbf{A}h)_y+\mathbf{Ma}h^2\gamma\tilde{\theta}_y\big]_y=0. \tag{35}$$

Подставив значение h_t из (18) в (25), получим уравнение для функции $\theta(t,x,y,\xi)$ вида

$$h\mathbf{D}\big[h\theta_t+u\theta_x+v\theta_y+(w-\xi w\big|_{\xi=1})\theta_\xi\big]=\varepsilon^2h^2\Delta\theta+\big[1+\varepsilon^2\xi^2(h_x^2+h_y^2)\big]\theta_{\xi\xi}-$$

$$-2\xi\varepsilon^2h(h_x\theta_{x\xi}+h_y\theta_{y\xi})+\varepsilon^2\xi^2\big[2(h_x^2+h_y^2)-h\Delta h\big]\theta_\xi. \tag{36}$$

Таким образом, для определения функций h, θ имеем систему уравнений (35), (36), а входящие в неё функции u, v, w, φ, γ определяются из этих двух основных переменных и критериев подобия с помощью явных формул (32)–(34). Здесь рассматриваются задачи только для случая локального нагрева жидкой пленки, для которого будем полагать, что в начальный момент времени распределение температуры однородно и пленка невозмущенная, а для других значений времени при удалении от места нагрева все возмущения затухают. Поэтому кроме условий теплового баланса (27), (31) для системы (35), (36) поставим начальные и граничные условия

$$\theta|_{t=0}=0; \quad \theta\to 0 \ \text{ при } \ x,y\to\pm\infty, \tag{37}$$

$$h\big|_{t=0}=1; \quad h\to 1, \ h_x\to 0 \ \text{ при } \ x\to\pm\infty; \quad h\to 1, \ h_y\to 0 \ \text{ при } \ y\to\pm\infty. \tag{38}$$

2. Численные расчеты

Численное решение уравнений (35), (36) с условиями (27), (31), (37)–(38) проводилось следующим образом. Решение задачи в неограниченной по x, y области заменялось решением в области $\{x \in (-x_1, x_2),\ y \in (-y_1, y_2),\ \xi \in (0,1),\ t > 0\}$. Начальные условия (37) и условия теплового баланса (27), (31) сохраняют свой вид, а краевые условия (38) переносятся на новые границы так:

$$h\big|_{x=-x_1} = h\big|_{y=-y_1} = h\big|_{y=y_2} = 1, \qquad \theta\big|_{x=-x_1} = \theta\big|_{y=-y_1} = \theta\big|_{y=y_2} = 0; \tag{39}$$

$$h_x\big|_{x=-x_1} = h_y\big|_{y=-y_1} = h_y\big|_{y=y_2} = h_{xx}\big|_{x=x_2} = h_x\big|_{x=x_2} = 0, \qquad \theta_x\big|_{x=x_2} = 0. \tag{40}$$

Поскольку здесь значения неизвестных функций θ и h на границе $x = x_2$ уже нельзя считать заданными, то соответствующие условия заменены "мягкими".

Введя шаги δ_t по времени и δ_x, δ_y, δ_ξ по пространственным переменным, построим разностный аналог системы уравнений (35)–(36)следующего вида:

$$\frac{h_{i,j}^{n+1} - h_{i,j}^{n}}{\delta_\tau} = (h^3\varphi)_{i,j}^n(\Lambda_{11} + \Lambda_{22})\big[(\Lambda_{11} + \Lambda_{22})h_{i,j}^{n+1} - \mathbf{A}h_{i,j}^{n+1}\big] +$$

$$+\big[\Lambda_1(h^3\varphi)_{i,j}^n\big] \cdot \big[\Lambda_1(\Lambda_{11} + \Lambda_{22})h_{i,j}^{n+1} - \mathbf{A}\Lambda_1 h_{i,j}^{n+1} + \mathbf{C}\big] + \big[\Lambda_2(h^3\varphi)_{i,j}^n\big] \cdot \big[\Lambda_2(\Lambda_{11} + \Lambda_{22})h_{i,j}^{n+1} -$$

$$-\mathbf{A}\Lambda_2 h_{i,j}^{n+1}\big] + \mathbf{Ma}\big[\Lambda_1\big\{(h^3\varphi)_{i,j}^n\Lambda_1\theta_{i,j,L}^{n+1}\big\} + \Lambda_2\big\{(h^3\varphi)_{i,j}^n\Lambda_2\theta_{i,j,L}^{n+1}\big\}\big], \tag{41}$$

где $i = 3, ..., N-2;\ j = 3, ..., M-2;$

$$h_{i,j}^n\mathbf{D}\frac{\theta_{i,j,k}^{n+1} - \theta_{i,j,k}^{n}}{\delta_\tau} = -h_{i,j}^n\mathbf{D}\big[u_{i,j,k}^n\Lambda_1\theta_{i,j,k}^{n+1} + v_{i,j,k}^n\Lambda_2\theta_{i,j,k}^{n+1} + \big(w_{i,j,k}^n - \xi_k w_{i,j,L}\big)\Lambda_3\theta_{i,j,k}^{n+1}\big] +$$

$$+\big(\varepsilon h_{i,j,k}^n\big)^2(\Lambda_{11} + \Lambda_{22})\theta_{i,j,k}^{n+1} + \big[1 + \varepsilon^2\xi_k^2\big\{\big(\Lambda_1 h_{i,j}^n\big)^2 + \big(\Lambda_2 h_{i,j}^n\big)^2\big\}\big]\Lambda_{33}\theta_{i,j,k}^{n+1} -$$

$$-2\varepsilon^2\xi_k h_{i,j}^n\big[\big(\Lambda_1 h_{i,j}^n\big)\Lambda_1\Lambda_3\theta_{i,j,k}^{n+1} + \big(\Lambda_2 h_{i,j}^n\big)\Lambda_2\Lambda_3\theta_{i,j,k}^{n+1}\big] +$$

$$+\varepsilon^2\xi_k^2\big[2\big(\Lambda_1 h_{i,j}^n\big)^2 + \big(\Lambda_2 h_{i,j}^n\big)^2 - h_{i,j}^n\big(\Lambda_1 + \Lambda_2\big)h_{i,j}^n\big]\Lambda_3\theta_{i,j,k}^{n+1}. \tag{42}$$

Здесь $i = 2, ..., N-1;\ j = 2, ...,$(в соотношении (41) $i = 3, \ldots, N-2; j = 3, \ldots, M-2$); $M-1;\ k = 2, ..., L-1;$ а разностные операторы $\Lambda_1,\ \Lambda_2,\ \Lambda_3,\ \Lambda_{11},\ \Lambda_{22},\ \Lambda_{33}$ над сеточными функциями задаются с помощью формул

$$\Lambda_1 f_{i,j,k} = \frac{f_{i+1,j,k} - f_{i-1,j,k}}{2\delta_x}, \quad \Lambda_2 f_{i,j,k} = \frac{f_{i,j+1,k} - f_{i,j-1,k}}{2\delta_y}, \quad \Lambda_3 f_{i,j,k} = \frac{f_{i,j,k+1} - f_{i,j,k-1}}{2\delta_\xi},$$

$$\Lambda_{11} f_{i,j,k} = \Lambda_1\big\langle\Lambda_1 f_{i,j,k}\big\rangle, \quad \Lambda_{22} f_{i,j,k} = \Lambda_2\big\langle\Lambda_2 f_{i,j,k}\big\rangle, \quad \Lambda_{33} f_{i,j,k} = \Lambda_3\big\langle\Lambda_3 f_{i,j,k}\big\rangle.$$

Начальные и граничные (27), (31), (39), (40) условия аппроксимируются следующим образом:

$$\theta_{i,j,k}^1 = \theta_{1,j,k}^{n+1} = \theta_{i,1,k}^{n+1} = \theta_{i,M,k}^{n+1} = 0, \qquad \theta_{N-1,j,k}^{n+1} = \theta_{N,j,k}^{n+1}; \tag{43}$$

$$\frac{1}{h_{i,j}^n}\frac{\theta_{i,j,2}^{n+1} - \theta_{i,j,1}^{n+1}}{\delta_\xi} - \mathbf{Bi_1}\big(\theta - \theta_1\big)_{i,j,1}^{n+1} = -\big(q_1\big)_{i,j}^{n+1}; \tag{44}$$

$$\frac{1}{h_{i,j}^n}\frac{\theta_{i,j,L}^{n+1} - \theta_{i,j,L-1}^{n+1}}{\delta_\xi} + \mathbf{Bi_2}\big(\theta - \theta_2\big)_{i,j,L}^{n+1} = \big(q_2\big)_{i,j}^{n+1}; \tag{45}$$

$$h^1_{i,j} = h^n_{1,j} = h^n_{i,1} = h^n_{i,M} = 1; \tag{46}$$

$$\Lambda_1 h^{n+1}_{2,j} = \Lambda_1 h^{n+1}_{N-1,j} = \Lambda_{11} h^{n+1}_{N-1,j} = \Lambda_2 h^{n+1}_{i,2} = \Lambda_2 h^{n+1}_{i,M-1} = 0. \tag{47}$$

Разностные уравнения (41)–(47) на каждом шаге по времени $n = 1, 2, \ldots$ представляют собой систему линейных уравнений для определения неизвестных величин $h^{n+1}_{i,j}$, $\theta^{n+1}_{i,j,k}$, где $i = 1, \ldots, N$; $j = 1, \ldots, M$; $k = 1, \ldots, L$. Эта система решалась следующим образом. Уравнения (42) с условиями (43)–(45) отщеплялись от всей системы и решались, в первую очередь, с помощью метода расщепления по пространственным переменным путем введения дробных шагов [10]. После нахождения значений $\theta^{n+1}_{i,j,k}$ система уравнений (41), (46), (47) становится определенной, и из нее находятся значения $h^{n+1}_{i,j}$. При решении этой задачи также применялся метод расщепления по пространственным переменным.

Системы разностных уравнений (41), (42) представляют собой двухслойные неявные разностные схемы для параболических уравнений. Известно [10], что такие схемы абсолютно устойчивы.

Расчеты производились при следующих данных. Предполагалось, что свободная поверхность пленки и подложка теплоизолированы, нагрев имеет место только со стороны подложки, причем его интенсивность всюду нулевая, за исключением некоторой ограниченной области, в которой она постоянная. Таким образом, бралось $\mathbf{Bi}_1 = \mathbf{Bi}_2 = 0$, $q_2 = 0$. Считалось, что газ и подложка имеют ту же температуру, что и натекающая сверху жидкость: $T_1 = T_2 = T_0$. Угол наклона подложки к горизонту α в рассматриваемых примерах брался равным $\pi/2$, а материальные постоянные жидкости и функции $\mu(T)$, $\sigma(T)$ соответствовали 25 % раствору этилового спирта в воде. Невозмущенная толщина пленки была равной 100 мкм. Расчеты проводились при наличии двух одинаковых нагревателей с рабочей поверхностью в форме прямоугольника 2×6 мм и с равномерно распределенной по рабочей поверхности нагревателя плотностью теплового потока $Q = 1,75$ вт·см$^{-2}$. Такие размеры и мощности нагревателей выбирались потому, что при таких данных развиваются выраженные термокапиллярные деформации межфазной границы в виде валиков, утончений и т.п., масштабы этих возмущений уже соизмеримы с толщиной плёнки, но разрывов пленки ещё не происходит. Кроме того, номинальная мощность нагревателей Q достигалась не сразу после их включения, а в течение времени $t_0 = 5$ сек с равномерным набором мощности, т.е. принималось, что $q_1(t) = tQ/t_0$ при $t \le t_0$ и $q_1(t) \equiv Q$ при $t > t_0$. Задержка с набором мощности нужна для исключения не имеющих физической природы добавочных возмущений, связанных с особенностями внезапного включения. Безразмерные постоянные принимают при этом значения $\mathbf{A} = 0$, $\mathbf{C} = 1,5$, $\mathbf{D} = 2,67$, $\mathbf{Ma} = 0,779$. Область расчета задавалась по координатам x, y прямоугольником 4,5 $\times$ 4 см. Число узлов расчета задавалось значениями $N = 500, M = 445, L = 20$. Такой выбор числа узлов обусловлен необходимостью, во-первых, иметь возможность сравнивать расчеты при различных шагах разбиения, а во-вторых, при этом должно быть достаточно много расчетных узлов не на единицу измерения, а именно на одну возникающую структуру (валик, струю, утончение и т.п.). Рассчитывались поля температуры, скоростей, положение свободной поверхности пленки. При этом величина расстояния между нагревателями варьировалась. На рис. 1 приведена картина развития термокапиллярных деформаций после включения нагрева в случае $d = 4$, где d равно отношению расстояния между нагревателями к ширине (по потоку) нагревателя. Можно заметить, что имеет место сложное взаимодействие возникающих поверхностных структур (валиков, стекающих струй, утончений пленки), их наложение друг

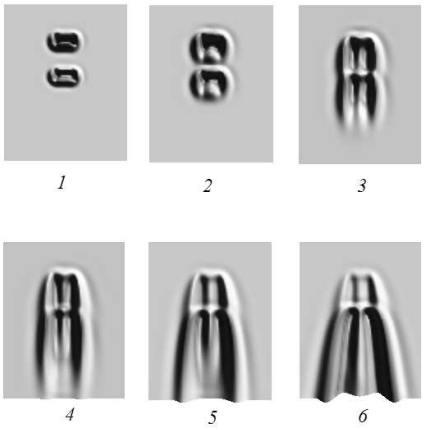

Рис. 1. Эволюция термокапиллярных деформаций после включения нагревателей при $d = 4$. Здесь 1 – $t = 0,25$ с, 2 – $t = 0,5$ с, 3 – $t = 1,25$ с, 4 – $t = 2,5$ с, 5 – $t = 5$ с, 6 – $t = 10$ с

на друга. Это взаимодействие приводит к усилению возмущений: два нагревателя вносят более сильные возмущения, чем один сдвоенный. Данное усиление возмущений довольно значительное и достигает 20 % общей интенсивности. Среди рассчитываемых данных наибольший интерес вызывают наименьшая толщина пленки и также наибольшая достигаемая температура на нагревателях и подложке. На рис. 2 и на рис. 3 представлены графики за-

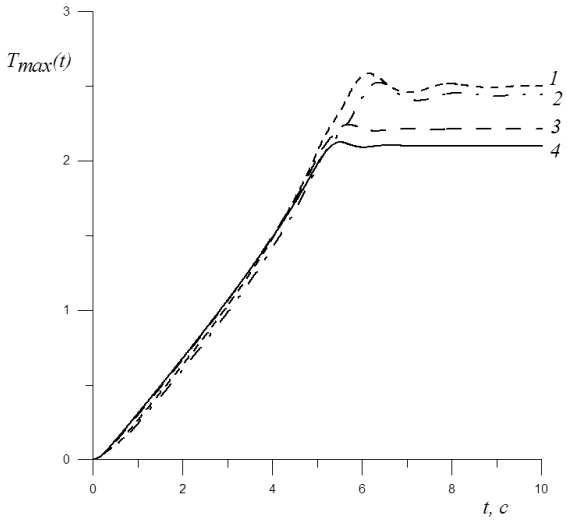

Рис. 2. График зависимости максимальной безразмерной температуры плёнки от времени. Линия 1 соответствует $d = 2$, 2 – $d = 3$, 3 – $d = 0,5$, 4 – $d = 0$

висимости этих характеристик от времени (в момент $t = 0$ включаются нагреватели) для двух расположенных один за другим нагревателей при различных значениях расстояния между ними. Можно заметить, что с ростом d достигаемые экстремальные температурные

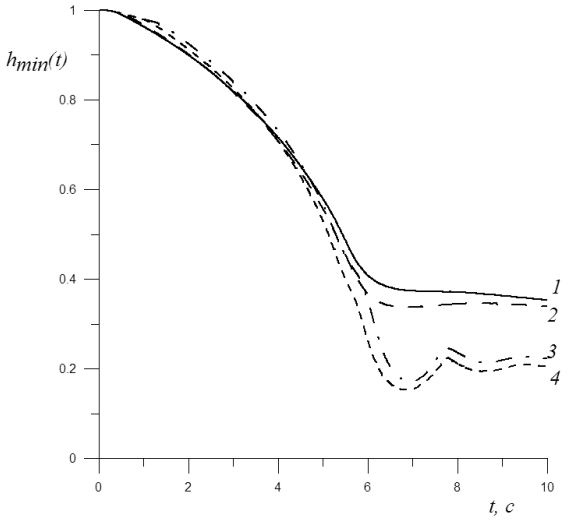

Рис. 3. Графики зависимости минимальной толщины плёнки от времени. Линия 1 соответствует $d = 0$, 2 — $d = 0,5$, 3 — $d = 3$, 4 — $d = 2$

и поверхностные возмущения сначала усиливаются, затем ослабевают. Поэтому существует некоторое критическое расстояние между нагревателями, при котором возмущения максимальны. На рис. 4 приведены рассчитанные установившиеся распределения по подложке безразмерной температуры θ для различных значений расстояния между нагревателями. Исходя из простых физических соображений можно было ожидать локализацию наиболь-

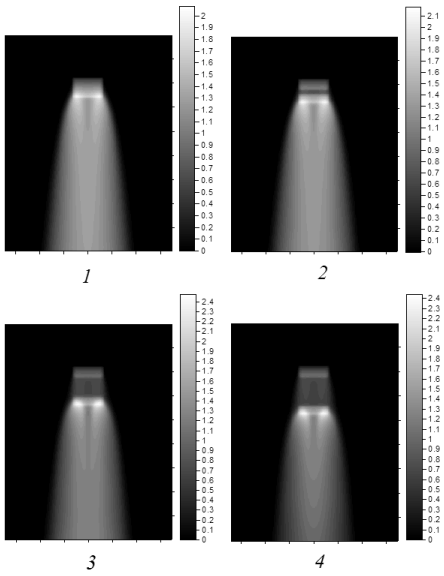

Рис. 4. Установившиеся распределения по подложке безразмерной температуры θ. Здесь 1 — $d = 0$, 2 — $d = 0,5$, 3 — $d = 2$, 4 — $d = 3$

шей достигаемой температуры на нижних частях нагревателя, вблизи его центральной оси. Однако наибольшие нагревы достигаются вблизи боковых сторон нагревателей. Это можно объяснить только влиянием искажения поверхности пленки термокапиллярными силами и возникновения характерных подковообразных структур, наблюдаемых в экспериментах [1, 2]. Пределы изменения температуры для каждого случая указаны на шкале.

При расположении нагревателей на одном уровне, один подле другого также имеет место некоторое усиление температурных и поверхностных возмущений. Но в этом случае наименьшая толщина пленки и наибольшая достигаемая температура мало зависят от d, зато имеет место значительный рост наибольшей толщины плёнки. Это достигается путём сложения боковых валиков от нагревателей. Картина такого сложения приведена на рис. 5. Этот параметр не влияет на возможность разрыва, поэтому он менее важен при планировании экспериментов и проектировании устройств. На рис. 6 приведены достигаемые наибольшие и наименьшие толщины при эволюции возмущений от двух нагревателей, расположенных на одном уровне по потоку для различных расстояний между ними.

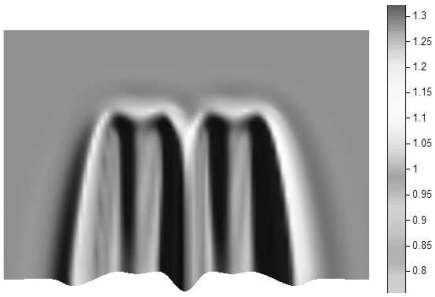

Рис. 5. Деформации поверхности плёнки для двух нагревателей на одном уровне по потоку с расстоянием между ними 4 мм

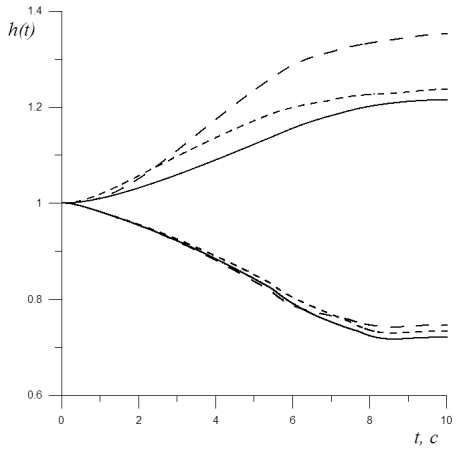

Рис. 6. Графики зависимости минимальной и максимальной толщин плёнки от времени для двух нагревателей на одном уровне по потоку. Здесь сплошные линии соответствуют сдвоенному нагревателю, линии с длинным пунктиром — расстоянию между нагревателями 2 мм, линии с коротким пунктиром — расстоянию между нагревателями 4 мм

3. Выводы

Проведенные расчеты показали возможность существенного усиления температурных и поверхностных возмущений, вносимых двумя нагревателями, за счёт взаимодействия и наложения этих возмущений. При этом два расположенных друг за другом по потоку нагревателя создают более значительные возмущения, чем один сдвоенный. Существует некоторое критическое расстояние между нагревателями, при котором эти возмущения максимальны.

Работа выполнена при финансовой поддержке Программы Президента РФ по поддержке ведущих научных школ (Грант № НШ-2260.2008.1).

Список литературы

[1] O.A.Kabov, Heat Transfer from a Heater with Small Linear Dimension to Free Falling Liquid Film, *Proc. of the First Russian National Conf. on Heat Transfer,* Moscow, Moscow Energ. Institute, **6**(1994), 90-95.

[2] O.A.Kabov, I.V.Marchuk, V.M.Chupin, Thermal Imaging Study of the Liquid Film Flowing on Vertical Surface with Local Heat Source, *Russian Journal of Engineering Thermophysics,* **6**(1996), №2, 104-138.

[3] I.V.Marchuk, O.A.Kabov, Numerical Modelling of Thermocapillary Reverse Flow in Thin Liquid Films under Local Heating, *Russian Journal Engineering Thermophysics,* **8**(1998), №1-4, 17-46.

[4] O.A.Kabov, I.V.Marchuk, A.V.Muzykantov, J.C.Legros, E.Istasse, J.L.Dewandel, Regular Structures in Locally Heated Falling Liquid Films, *Proc. 2nd Int. Symp. on Two-Phase Flow Modelling and Experimentation,* Pisa, **2**(1999), 1225-1233.

[5] V.V.Kuznetsov, Dynamics of locally heated liquid films, *Russ. J. Eng. Thermophys.,* **10**(2000), №2, 107-120.

[6] O.A.Kabov, V.V.Kuznetsov, B.Scheid, I.O.Kabova, J.C.Legros, Free surface deformation in a locally heated falling thin liquid film with the temperature dependent viscosity, *Proc. 12th Int. Heat Transfer Conference,* Ed. Jean Taine, Grenoble, France, August 18-23, **2**(2002), 675-680.

[7] A.M.Frank, 3D numerical simulation of regular structure formation in a locally heated falling film, *Europ. J. Mech., B/Fluids,* **22**(2003), 445-471.

[8] В.В.Кузнецов, О влиянии геометрической формы нагревателя на динамику стекающей жидкой пленки, *Сибирский журнал индустриальной математики*, **10**(2007), №3(31), 71-83.

[9] А.Миснар, Теплопроводность твердых тел, жидкостей, газов и их композиций, М., Мир, 1968.

[10] А.А.Самарский, Введение в теорию разностных схем, М., Наука, 1971.

Interaction of Falling Film Disturbances Caused by Several Local Heaters

Vladimir V.Kuznetsov

Liquid film flowing down an inclined substrate with heaters is considered. Numerical results are obtained for both velocity and temperature field's evolutions, and location of the liquid-gas interface. The computations were carried out for two of the heaters with rectangular working surface. Two cases were considered: (1) the heaters are located one by one downstream; (2) the heaters are located on a level with common downstream. It was shown that the interaction of surfaces and temperature disturbances caused by heaters, their superposition exert significant influence on basic process qualities such as the highest possible heating of substrate and the greatest thinning of liquid film. When the heaters are located one by one downstream, the existence of the critical gap size between the heaters in which disturbances are maximal is found.

Keywords: liquid film, liquid-gas interface, local heater.