Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2012, 5(3), 363–369

УДК 519.1+519.6

Интегральное представление и вычисление многомерной суммы в теории кубатурных формул

Георгий П. Егорычев*
Институт фундаментальной подготовки,
Сибирский федеральный университет,
Свободный, 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 29.01.2012, окончательный вариант 16.03.2012, принята к печати 10.04.2012

В работе с помощью метода коэффициентов найдено новое простое доказательство трудного тождества из теории кубатурных формул.

Ключевые слова: комбинаторные суммы, интегральное представление, кубатурные формулы.

Введение

Пусть вектор $\gamma = (\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_d) \in E^{d+1}$, а $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_d)$, $\beta = (\beta_0, \beta_1, ..., \beta_d)$ — векторы из E^{d+1} с целыми неотрицательными координатами, где на координаты вектора α наложено следующее ограничение: $|\alpha| := \alpha_0 + \alpha_1 + ... + \alpha_d = 2s+1$. Обозначим через $\alpha! := \alpha_0!\alpha_1!...\alpha_d!$, $\binom{\alpha}{\beta} := \binom{\alpha_0}{\beta_0}...\binom{\alpha_d}{d}$, где $\binom{a}{b} := \dfrac{\Gamma(a+1)}{\Gamma(b+1)\Gamma(a-b+1)}$, и $\binom{a}{b} := 0$, если $b \geqslant a+1$. Более того, мы пишем $\alpha - 1/2 := (\alpha_0 - 1/2, \alpha_1 - 1/2, ..., \alpha_d - 1/2)$.

Heo S. и Xu Y. [1, с. 631–635] с помощью аппарата производящих функций, а также разностных и дифференциальных операторов различного типа, найдено непростое доказательство следующего кратного комбинаторного тождества [1, тождество (2.9)]:

$$c\binom{\alpha+\gamma}{\alpha} = \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{d + \sum\limits_{i=0}^{d}(\alpha_i+\gamma_i)}{j} \sum_{\beta_0+\beta_1+...+\beta_d=s-j} \prod_{i=0}^{d} \binom{\beta_i+\gamma_i}{\beta_i} (2\beta_i+\gamma_i+1)^{\alpha_i}, \quad (1)$$

где $c = \alpha! 2^{2s}$.

В конце 1970-х гг. Г.П. Егорычев развил метод коэффициентов, который нашел успешные приложения при работе с комбинаторными суммами [2–5]. Целью данной статьи является нахождение нового простого доказательства тождества (1) с помощью метода коэффициентов [2] и кратного применения известной теоремы о полной сумме вычетов.

1. Доказательство тождества (1)

Тождество (1) можно переписать в виде

$$\sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{d + \sum_{i=0}^{d}(\alpha_i+\gamma_i)}{j} \sum_{\beta_0+\beta_1+...+\beta_d=s-j} \prod_{i=0}^{d} \binom{\beta_i+\gamma_i}{\beta_i} \frac{(2\beta_i+\gamma_i+1)^{\alpha_i}}{(\alpha_i)!} =$$

*anott@scn.ru
© Siberian Federal University. All rights reserved

$$= 2^{2s} \prod_{i=0}^{d} \binom{\alpha_i+\gamma_i}{\alpha_i}. \tag{2}$$

Введем следующие обозначения для правой части тождества (2):

$$T(s;\alpha,\beta) := \sum_{j=0}^{s} (-1)^j \binom{\sum\limits_{i=0}^{d}(\alpha_i+\gamma_i)+d}{j} \times S_j, \tag{3}$$

где

$$S_j := \sum_{\beta_0+\beta_1+\ldots+\beta_d=s-j} \prod_{i=0}^{d} \binom{\beta_i+\mu_i}{\beta_i} \frac{(2\beta_i+\mu_i+1)^{\alpha_i}}{(\alpha_i)!}. \tag{4}$$

Тогда с помощью метода коэффициентов мы получаем

$$S_j = \sum_{|\beta|=s-j} \left(\prod_{i=0}^{d} \binom{\beta_i+\gamma_i}{\beta_i} \frac{(2\beta_i+\gamma_i+1)^{\alpha_i}}{(\alpha_i)!} \right) =$$
$$= \sum_{\beta_0=0}^{\infty} \ldots \sum_{\beta_d=0}^{\infty} \mathbf{res}_{z_0,\ldots,z_d,t} \left(t^{-s+j-1} \prod_{i=0}^{d} (1-tz_i)^{-\gamma_i-1} z_i^{-\beta_i-1} \right) \times$$
$$\times \mathbf{res}_{w_0,\ldots,w_d} \left(\prod_{i=0}^{d} w_i^{-\alpha_i-1} \exp\left(w_i\left(2\beta_i+\gamma_i+1\right)\right) \right) =$$
$$= \mathbf{res}_{w_0,\ldots,w_d,t} \left\{ t^{-s+j-1} \prod_{i=0}^{d} w_i^{-\alpha_i-1} \exp(w_i\left(\gamma_i+1\right)) \times \right.$$
$$\left. \times \prod_{i=0}^{d} \left(\sum_{\beta_i=0}^{\infty} \left(\exp(\beta_i\left(2w_i\right)\right) \mathbf{res}_{z_i} \left((1-tz_i)^{-\gamma_i-1} z_i^{-\beta_i-1} \right) \right) \right\} =$$

(суммирование по каждой β_i и $\mathbf{res}_{z_i}$, $i = 0,\ldots,d$: правило подстановки, замены $z_i = \exp(2w_i)$, $i = 0,\ldots,d$)

$$= \mathbf{res}_{w_0,\ldots,w_d,t} \left\{ t^{-s+j-1} \left(\prod_{i=0}^{d} w_i^{-\alpha_i-1} \exp(w_i\left(\gamma_i+1\right)) \times \prod_{i=0}^{d} \left(1-t\exp(2w_i)\right)^{-\gamma_i-1} \right) \right\} =$$
$$= \mathbf{res}_{w_0,\ldots,w_d,t} \left\{ t^{-s+j-1} \prod_{i=0}^{d} w_i^{-\alpha_i-1} \left(\exp(-w_i) - t\exp(w_i)\right)^{-\gamma_i-1} \right\},$$

то есть

$$S_j = \mathbf{res}_{w_0,\ldots,w_d,t} \left\{ t^{-s+j-1} \prod_{i=0}^{d} w_i^{-\alpha_i-1} \left(\exp(-w_i) - t\exp(w_i)\right)^{-\gamma_i-1} \right\}. \tag{5}$$

В соответствии с (3)–(5) мы получаем

$$T(s;\alpha,\beta) = \sum_{j=0}^{s} \mathbf{res}_{w_0,\ldots,w_d,t} \left\{ t^{-s+j-1} \prod_{i=0}^{d} w_i^{-\alpha_i-1} \left(\exp(-w_i) - t\exp(w_i)\right)^{-\gamma_i-1} \right\} \times$$
$$\times \mathbf{res}_x \left\{ x^{-j-1} \left(1-x\right)^{d+\sum\limits_{i=0}^{d}(\alpha_i+\gamma_i)} \right\} =$$

$$= \mathbf{res}_{w_0,\ldots,w_d,t}\left\{t^{-s-1}\prod_{i=0}^{d} w_i^{-\alpha_i-1}\left(\exp(-w_i)-t\exp(w_i)\right)^{-\gamma_i-1}\left(\sum_{j=0}^{\infty} t^j \mathbf{res}_x\{x^{-j-1}\times\right.\right.$$
$$\left.\left.\times(1-x)^{d+\sum\limits_{i=0}^{d}(\alpha_i+\gamma_i)}\right)\right\}=$$

(суммирование по j, и $\mathbf{res}_x$: правило подстановки, замена $x=t$)

$$= \mathbf{res}_{w_0,\ldots,w_d,t}\left\{t^{-s-1}\prod_{i=0}^{d} w_i^{-\alpha_i-1}\left(\exp(-w_i)-t\exp(w_i)\right)^{-\gamma_i-1}(1-t)^{d+\sum\limits_{i=0}^{d}(\alpha_i+\gamma_i)}\right\}.$$

Таким образом, мы получили

Лемма 1. *Пусть параметры $s,\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_d,\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_d$ являются целыми неотрицательными числами, для которых $\alpha_0+\ldots+\alpha_d=2s+1$, и вектор $(\mu_0,\mu_1,\ldots,\mu_d)\in\mathbb{R}^{d+1}$. Тогда следующая интегральная формула справедлива:*

$$\sum_{j=0}^{s}(-1)^j\binom{d+\sum_{i=0}^{d}(\alpha_i+\gamma_i)}{j}\sum_{\beta_0+\beta_1\ldots+\beta_d=s-j}\prod_{i=0}^{d}\binom{\beta_i+\gamma_i}{\beta_i}\frac{(2\beta_i+\gamma_i+1)^{\alpha_i}}{(\alpha_i)!}=$$
$$=\mathbf{res}_{w_0,\ldots,w_d,t}\left\{t^{-s-1}\prod_{i=0}^{d} w_i^{-\alpha_i-1}\left(\exp(-w_i)-t\exp(w_i)\right)^{-\gamma_i-1}(1-t)^{d+\sum\limits_{i=0}^{d}(\alpha_i+\gamma_i)}\right\}. \tag{6}$$

Замечание. *Нетрудно видеть, что вычисление кратного интеграла в правой части (6) последовательно по переменным t, $w_0,\ldots,w_d$ дает кратную сумму в левой части (6). Новое доказательство тождества (2) мы проведем аналогично путем вычисления кратного вычета в нулевой точке в правой части формулы (6) последовательно по каждой переменной $w_0,\ldots,w_d$ и t (см. леммы 1–3 и теорема 5).*

Введем необходимые обозначения, полагая

$$f=f(w,t):=e^{-w}-te^{w},\ g=g(w,t):=e^{-w}+te^{w}, \tag{7}$$

где α есть фиксированное целое и $\gamma\in\mathbb{R}$. Очевидно

$$f':=\frac{df}{dw}=-g,\ g':=\frac{dg}{dw}=-f,\ g^2-f^2=4t,\ (f^{-\gamma})'=\gamma f^{-\gamma-1},\ g^{\alpha}=-\alpha g^{\alpha-1}f, \tag{8}$$

$$f(0)=1-t,\ g(0)=1+t. \tag{9}$$

Лемма 2. *Если s — целое неотрицательное число и $\gamma\in\mathbb{R}$, то в обозначениях (7) и (8) справедливо следующее разложение производной:*

$$(f^{-\gamma-1})_w^{(s)}=(\gamma+1)\times\ldots\times(\gamma+s)\,f^{-\gamma-s-1}g^s+\sum_{k=1}^{[s/2]}c_k(\gamma)\,f^{-\gamma+2k-s-1}g^{s-2k} \tag{10}$$

с целыми коэффициентами $c_1,c_2,\ldots,c_{[s/2]}$. В соответствии с (9) формула (10) порождает следующую формулу:

$$\mathbf{res}_{w_i}w_i^{-s-1}\left(\exp(-w_i)-t\exp(w_i)\right)^{-\gamma-1}:=\left[\left(\exp(-w_i)-t\exp(w_i)\right)^{-\gamma-1}\right]_{w=0}^{(s)}/s!=$$
$$=\binom{s+\gamma}{s}(1-t)^{-\gamma-s-1}(1+t)^s\left(1+\sum_{k=1}^{[s/2]}h_k(s,\gamma)(1-t)^{2k}(1+t)^{-2k}\right), \tag{11}$$

где рациональные коэффициенты $h_k(s,\gamma) := c_k(\gamma)/s!$, $k = 1,\ldots,[s/2]$.

Доказательство. Формулу (10) проще всего провести индукцией по параметру s. Действительно, с помощью (8) мы имеем для начальных значений $s = 1,2,3$:

$$(f^{-\gamma-1})' = -(\gamma+1)f^{-\gamma-2}f' = (\gamma+1)f^{-\gamma-2}g.$$

$$(f^{-\gamma-1})'' = ((f^{-\gamma-1})')' = ((\gamma+1)f^{-\gamma-2}g)' = (\gamma+1)\left(f^{-\gamma-2}\right)'g + (\gamma+1)f^{-\gamma-2}f =$$
$$= (\gamma+1)(\gamma+2)f^{-\gamma-3}g^2 - (\gamma+1)f^{-\gamma-1}.$$

$$(f^{-\gamma-1})''' = ((f^{-\gamma-1})'')' = ((\gamma+1)(\gamma+2)f^{-\gamma-3}g^2 - (\gamma+1)f^{-\gamma-1})' =$$
$$= (\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)f^{-\gamma-4}g^3 + (\gamma+1)(\gamma+2)f^{-\gamma-3}2gf - (\gamma+1)^2 f^{-\gamma-2}g =$$
$$= (\gamma+1)(\gamma+2)(\gamma+3)f^{-\gamma-4}g^3 - (\gamma+1)(3\gamma+2)f^{-\gamma-2}g.$$

Далее по индукции, если формула (9) справедлива для текущего значения s, то с помощью (8) мы имеем

$$(f^{-\gamma-1})^{(s+1)} = ((f^{-\gamma-1})^{(s)})' = ((\gamma+1)\times\ldots\times(\gamma+s)f^{-\gamma-s-1}g^s + \sum_{k=1}^{[s/2]} c_k(\gamma)f^{-\gamma+2k-s-1}g^{s-2k})' =$$

$$= (\gamma+1)\times\ldots\times(\gamma+s+1)f^{-\gamma-s-2}g^{s+1} - (\gamma+1)\times\ldots\times(\gamma+s)f^{-\gamma-s}sg^{s-1} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{[s/2]} c_k(\gamma)(\gamma-2k+s+1)f^{-\gamma+2k-s-2}g^{s-2k+1} - \sum_{k=1}^{[s/2]} c_k(\gamma)f^{-\gamma+2k-s}(s-2k)g^{s-2k-1} =$$

(замена в первой сумме индекса $k-1$ на k)

$$= (\gamma+1)\ldots(\gamma+s+1)f^{-\gamma-s-2}g^{s+1} + (c_1(\gamma)(\gamma+s-1) - s(\gamma+1)\ldots(\gamma+s))f^{-\gamma-s+1}g^{s-1} +$$
$$+ \sum_{k=0}^{[s/2]-1} c_{k+1}(\gamma)(\gamma-2k+s-1)f^{-\gamma+2k-s}g^{s-2k-1} - \sum_{k=1}^{[s/2]} c_k(\gamma)f^{-\gamma+2k-s}(s-2k)g^{s-2k-1} =$$
$$= (\gamma+1)\ldots(\gamma+s+1)f^{-\gamma-s-2}g^{s+1} + (c_1(\gamma)(\gamma+s-1) - c_{[s/2]}(\gamma)f^{-\gamma+2[s/2]-s}\times$$
$$\times(s-2[s/2])g^{s-2[s/2]-1} + \sum_{k=1}^{[s/2]-1}(c_{k+1}(\gamma)(\gamma-2k+s-1) - (s-2k)c_k(\gamma))f^{-\gamma+2k-s}g^{s-2k-1},$$

что и требовалось доказать. □

Лемма 3. *Если s — целое неотрицательное число, то следующая формула справедлива:*

$$J = \mathbf{res}_t(1-t)^{-1}(1+t)^{2s+1}t^{-s-1} = 2^{2s}, \tag{12}$$

$$J_k = \mathbf{res}_t(1-t)^{k-1}(1+t)^{2s-k+1}t^{-s-1} = 0,\ \forall k = 1,\ldots,2s. \tag{13}$$

Доказательство. Заметим, что если формальный степенной ряд $C(w)$, содержащий конечное число членов с отрицательными степенями, сходится в выколотой окрестности нуля, то определение оператора $\mathbf{res}_w C(w)$ совпадает с обычным определением вычета $\mathbf{res}_{w=0}C(w)$

в нулевой точке, используемым в теории аналитических функций. С учетом этого факта мы имеем

$$J = \mathbf{res}_t\,(1-t)^{-1}\,(1+t)^{2s+1}\,t^{-s-1} := \mathbf{res}_{t=0}\,(1-t)^{-1}\,(1+t)^{2s+1}\,t^{-s-1} =$$

(теорема о полной сумме вычетов)

$$= -\mathbf{res}_{t=1}\,(1-t)^{-1}\,(1+t)^{2s+1}\,t^{-s-1} - \mathbf{res}_{t=\infty}\,(1-t)^{-1}\,(1+t)^{2s+1}\,t^{-s-1} =$$

(непосредственно по определению вычета в соответствующей точке)

$$= [(1+t)^{2s+1}\,t^{-s-1}]_{t=1} - res_{t=0}\,(1-1/t)^{-1}\,(1+1/t)^{2s+1}\,(1/t)^{-s}\,(-1/t)^2 =$$

$$= 2^{2s+1} - \mathbf{res}_{t=0}\,(1-t)^{-1}\,(1+t)^{2s+1}\,t^{-s} = 2^{2s+1} - J \Leftrightarrow J = 2^{2s+1} - J \Rightarrow J = 2^{2s}.$$

Пусть k — произвольное фиксированное число из множества $\{1,\ldots,2s\}$. Поступая точно так же, как в предыдущем случае, мы имеем

$$J_k = \mathbf{res}_t\,(1-t)^{k-1}\,(1+t)^{2s-k+1}\,t^{-s-1} := \mathbf{res}_{t=0}\,(1-t)^{k-1}\,(1+t)^{2s-k+1}\,t^{-s-1} -$$

$$-\mathbf{res}_{t=\infty}\,(1-t)^{k-1}\,(1+t)^{2s+1}\,t^{-s-1} =$$

(поскольку степени биномов $(1-t)^{k-1}$ and $(1+t)^{2s-k+1}\,t^{-s-1}$ неотрицательны при любом k из множества $\{1,\ldots,2s\}$)

$$= 0 - \mathbf{res}_{t=0}\,(1-1/t)^{k-1}\,(1+1/t)^5\,(1/t)^{-3}\,(-1/t)^2 =$$

$$= -\mathbf{res}_{t=0}\,(1-t)^{-s-1}\,(1+t)^{2s-k+1}\,t^{-s-1} = -J_k \Longleftrightarrow J_k = -J_k \Longleftrightarrow J_k = 0.$$

□

Теорема 1. *Тождество* (2) *справедливо.*

Доказательство. В силу (6) мы имеем следующее интегральное представление для суммы $T\,(s;\alpha,\,\beta)$ в левой части тождества (2):

$$T\,(s;\alpha,\beta) = \mathbf{res}_{w_0,\ldots,w_d,t}\{t^{-s-1}\,(1-t)^{d+\sum\limits_{i=0}^{d}(\alpha_i+\gamma_i)}\prod_{i=0}^{d} w_i^{-\alpha_i-1}\,(\exp(-w_i) - t\exp(w_i))^{-\mu_i-1}\} =$$

$$= \mathbf{res}_t\{t^{-s-1}\,(1-t)^{d+\sum\limits_{i=0}^{d}(\alpha_i+\gamma_i)}\,(\prod_{i=0}^{d}\mathbf{res}_{w_i} w_i^{-\alpha_i-1}\,(\exp(-w_i) - t\exp(w_i))^{-\mu_i-1})\}$$

Вычисляя в последнем выражении каждый из вычетов по переменным $w_0,\ldots,w_d$ по формуле (11), мы имеем

$$T\,(s;\alpha,\beta) = \mathbf{res}_t\{t^{-s-1}\,(1-t)^{d+\sum\limits_{i=0}^{d}(\alpha_i+\gamma_i)}\times$$

$$\times(\prod_{i=0}^{d}\binom{\alpha_i+\gamma_i}{\alpha_i}\,(1-t)^{-\gamma_i-\alpha_i-1}\,(1+t)^{\alpha_i}\,(\sum_{k=1}^{[\alpha_i/2]} h_k\,(\alpha_i,\gamma_i)\,(1-t)^{2k}\,(1+t)^{-2k}))\} =$$

(тривиальные сокращения под знаком произведения $\prod\limits_{i=0}^{d}\ldots$ с учетом предположения $\sum\limits_{i=0}^{d}\alpha_i = 2s+1$)

$$= \binom{\alpha+\gamma}{\alpha}\mathbf{res}_t\{t^{-s-1}\,(1-t)^{-1}\,(1+t)^{2s+1}\prod_{i=0}^{d}(1+\sum_{k=1}^{[\alpha_i/2]} h_k\,(\alpha_i,\gamma_i)\,(1-t)^{2k}\,(1+t)^{-2k})\}. \quad (14)$$

Поскольку $[\alpha_0/2]+[\alpha_1/2]+\ldots+[\alpha_d/2]\left[\sum\limits_{i=0}^{d}\alpha_i/2\right]=s$, то ясно, что после раскрытия скобок и приведения подобных членов произведение

$$\prod_{i=0}^{d}(1+\sum_{k=1}^{[\alpha_i/2]}h_k\left(\alpha_i,\gamma_i\right)\left(1-t\right)^{2k}\left(1+t\right)^{-2k})$$

под знаком res_t в (14) представимо в виде многочлена вида

$$1+\sum_{k=2}^{2s}\lambda_k\left(1-t\right)^k\left(1+t\right)^{-k},$$

где коэффициенты $\lambda_1,\ldots,\lambda_{2s-1}$ есть некоторые фиксированные рациональные числа. Таким образом,

$$T\left(s;\alpha,\beta\right)=\binom{\alpha+\gamma}{\alpha}\mathbf{res}_t\{t^{-s-1}\left(1-t\right)^{-1}\left(1+t\right)^{2s+1}(1+\sum_{k=1}^{2s}\lambda_k\left(1-t\right)^k\left(1+t\right)^{-k})\}=$$

$$=\binom{\alpha+\gamma}{\alpha}\{\mathbf{res}_t\left(1-t\right)^{-1}\left(1+t\right)^{2s+1}t^{-s-1}+\sum_{k=1}^{2s}\lambda_k\mathbf{res}_t\left(1-t\right)^{k-1}\left(1+t\right)^{2s-k+1}t^{-s-1}\}=$$

(вычисление вычетов в последнем выражении по формулам (12) and (13))

$$=\binom{\alpha+\gamma}{\alpha}\{2^{2s}+\sum_{k=1}^{2s}\lambda_k\times 0\}=\binom{\alpha+\gamma}{\alpha}2^{2s}.$$

□

Замечание. *Представляет некоторый самостоятельный интерес ответ на вопрос, какую дополнительную информацию (результаты) в теории кубатурных формул может принести знание интегрального представления*

$$J=\mathbf{res}_{w_0,\ldots,w_d,t}\{t^{-s-1}\prod_{i=0}^{d}w_i^{-\alpha_i-1}\left(\exp(-w_i)-t\exp(w_i)\right)^{-\mu_i-1}\left(1-t\right)^{d+\sum\limits_{i=0}^{d}(\alpha_i+\gamma_i)}\}/\alpha! \quad (15)$$

в левой части исходного тождества. Например, интеграл (15) может быть записан в следующем виде:

$$J=\mathbf{res}_t\{(t^{-s-1}\prod_{i=0}^{d}\mathbf{res}_{w_i}w_i^{-\alpha_i-1}\left(\exp(-\lambda_iw_i)-t\exp(\lambda_iw_i)\right)^{-\gamma_i-1}\}/\alpha!. \quad (16)$$

Вычисление интеграла (16) связано с изучением гиперболического t–синуса [6]

$$\sinh_t(x):=(\exp(-x)-t\exp(x))/2, \quad (17)$$

функции $\sinh_t^{-\gamma}(x)$, $\gamma\in\mathbb{N}$, *и интеграла*

$$\begin{aligned}J_{a,\gamma}\left(t\right):=\mathbf{res}_z(z^{-\alpha-1}\left(\exp(-z)-t\exp(z)\right)^{-\gamma-1})/\alpha!=\\=\mathbf{res}_z(z^{-\alpha-1}\left(\exp(-z)-t\exp(z)\right)^{-\gamma-1})/\alpha!.\end{aligned} \quad (18)$$

По моему мнению, представляет интерес изучение этих функций, включая их комбинаторную интерпретацию и нахождение различных соотношений для них.

Выражаю искреннюю признательность своим коллегам В.И. Половинкину и М.В. Носкову за полезные замечания при оформлении этой работы.

Список литературы

[1] S. Heo, Y. Xu, Invariant cubature formulae for spheres and balls by combinatorial methods, *SIAM J. Numer. Anal.*, **38**(2), (2000), 626–638.

[2] G.P. Egorychev, Integral Representation and the Computation of Combinatorial Sums, Nauka, Novosibirsk, 1977 (in Russian). English transl. Transl. Math. Monographs 59, Amer. Math. Soc., Providence. RI 1984; 2nd ed. in 1989.

[3] G.P. Egorychev, Method of coefficients: an algebraic characterization and recent applications. Labours Waterloo Workshop on Computer Algebra, Waterloo 5-7 May 2008, Springer Verlag (2009), 1–33.

[4] G.P. Egorychev, E.V. Zima, Integral representation and algorithms for closed form summation, *Handbook of Algebra,* **5** (ed. M. Hazewinkel), Elsevier, (2008), 459–529.

[5] В.К.Леонтьев, Избранные проблемы комбинаторного анализа, MSTU, Bauman, 2001.

[6] D. Foata, G.-N. Han, The q-tangent and q-secant numbers via basic eulerian polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **138**(2010), 385–393.

An Integral Representation and Computation of Multiple Sum in the Theory of Cubature Formulas

Georgy P. Egorychev

In this article is a finding new simple proof of hard identity from theory of cubature formulas by means of the method of coefficients.

Keywords: combinatorial sums, integral representation, cubature formulas.