УДК 517.9

О представлении решения одной обратной задачи для многомерного параболического уравнения с начальными данными в виде произведения

Игорь В. Фроленков*
Галина В. Романенко†
Институт математики,
Сибирский федеральный университет,
Свободный, 79, Красноярск, 660041,
Россия

Получена 21.07.2011, окончательный вариант 15.09.2011, принята к печати 15.10.2011

В работе исследована задача идентификации коэффициента, стоящего перед дифференциальным оператором второго порядка, в многомерном параболическом уравнении с данными Коши. В предположении специальных условий на входные данные обратная задача приведена к прямой. Доказаны теоремы существования и единственности решения прямой и обратной задач.

Ключевые слова: обратная задача, задача идентификации, коэффициентные обратные задачи, метод слабой аппроксимации, уравнения в частных производных.

Введение

В работе исследована коэффициентная обратная задача для многомерного параболического уравнения в случае данных Коши с неизвестным коэффициентом, стоящим перед дифференциальным оператором второго порядка. Постановка обратной задачи является частным случаем уравнения, рассмотренного в работе Ю.Е.Аниконова [1]. Ранее [2, 3, 4] после перехода от обратной задачи к прямой приходилось исследовать разрешимость нагруженного (содержащего следы неизвестной функции) уравнения. В данной работе доказано, что если начальные условия имеют специальный вид, то вопрос отыскания решения исходной обратной задачи сводится к исследованию двух прямых задач, одна из которых содержит выражение для неизвестного коэффициента. Данный результат, полученный Ю.Е. Аниконовым, позволил достаточно удобным образом привести изучаемую обратную задачу к неклассической прямой задаче для сильно нелинейного уравнения специального вида, а затем доказать существование и единственность решения задачи при помощи метода слабой аппроксимации [5, 6] в классах гладких ограниченных функций. В работе построены модельные примеры входных данных, удовлетворяющих условиям доказанных теорем, и найдены соответствующие им решения.

Метод слабой аппроксимации является методом расщепления на дифференциальном уровне, был впервые предложен в работах Н.Н.Яненко и А.А.Самарского и получил развитие в работах их учеников и последователей.

*kspk_job@mail.ru
†galina.romanencko@yandex.ru

1. Существование и единственность решения обратной задачи

Рассмотрим в области $G_{[0,T]} = \big\{(t,x,z) \mid x \in \mathbb{R}^n,\ z \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant t \leqslant T\big\}$ задачу Коши для параболического уравнения

$$u_t = a(t)u_{zz}(t,x,z) + b(t)\Delta_x u(t,x,z) + \lambda(t,z)B_z(u), \tag{1}$$

где $B_z(u) = c_1(t)u_{zz}(t,x,z) + c_2(t)u_z(t,x,z) + c_3(t)u(t,x,z)$, с начальным условием:

$$u(0,x,z) = u_0(x,z). \tag{2}$$

Функции $a(t), b(t), c_i(t)$ — непрерывные, ограниченные на $[0,T]$, причем $a(t) \geqslant a_0 > 0, b(t) \geqslant b_0 > 0,\ c_1(t) \geqslant c_0 > 0$. Функция $u_0(x,z)$ действительнозначная и задана в $\mathbb{R}^{n+1}$. Функция $\lambda(t,z)$ подлежит определению одновременно с решением $u(t,x,z)$ задачи (1), (2).

Пусть задано условие переопределения

$$u(t,0,z) = \psi(t,z) \tag{3}$$

и выполнено условие согласования $u_0(0,z) = \psi(0,z)$.

Предполагаем выполнение условия

$$|B_z(\psi)| = |c_1(t)\psi_{zz}(t,z) + c_2(t)\psi_z(t,z) + c_3(t)\psi(t,z)| \geqslant \mu > 0, \quad \mu \text{ — const.} \tag{4}$$

Частным случаем теоремы, доказанной Ю.Е.Аниконовым в работе [1], является следующая теорема.

Теорема 1. *Если существуют решения $\varphi(t,x)$ и $f(t,z)$ следующих задач Коши:*

$$\begin{gathered}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = b(t)\Delta_x\varphi,\\ \varphi(0,x) = w_0(x),\end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial f}{\partial t} = a(t)f_{zz} + B_z(f)\frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)},\\ f(0,z) = v_0(z),\end{gathered} \tag{6}$$

то функции $u(t,x,z)$ и $\lambda(t,z)$, определенные формулами

$$u(t,x,z) = \varphi(t,x)f(t,z),$$

$$\lambda(t,z) = \frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)},$$

являются решением обратной задачи (1)–(3) в предположении, что $u_0(x,z) = w_0(x)v_0(z)$.

Проверим справедливость теоремы непосредственной подстановкой в уравнения (1), (2) выражений для неизвестных функций.

Подставим $u(t,x,z) = \varphi(t,x)f(t,z)$ и $\lambda(t,z) = \dfrac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}$ в уравнение (1), получим

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}f + \frac{\partial f}{\partial t}\varphi = a(t)\varphi f_{zz} + b(t)f\Delta_x\varphi + \frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}B_z(f)\varphi.$$

Сгруппируем относительно f и φ, получим

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial t} - b(t)\Delta_x\varphi\right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial t} - a(t)f_{zz} - \frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} B_z(f)\right)\varphi.$$

Учитывая, что $\varphi(t,x)$ — решение задачи (5), а $f(t,z)$ — решение задачи (6), получаем тождество.

Очевидно, что функция $u(t,x,z) = \varphi(t,x)f(t,z)$ удовлетворяет начальному условию (2),

$$u(0,x,z) = \varphi(0,x)f(0,z) = w_0(x)v_0(z) = u_0(x,z).$$

Проверим выполнение условий переопределения $u(t,0,z) = \psi(t,z)$. Пусть $A(t,z) = u(t,0,z) - \psi(t,z)$. Покажем, что $A(t,z) = 0$. Рассмотрим уравнение (1) при $x = (0,0,\ldots,0)$, получим

$$u_t(t,0,z) = a(t)u_{zz}(t,0,z) + b(t)\Delta_x u(t,0,z) + \lambda(t,z)B_z(u) = a(t)u_{zz}(t,0,z) + b(t)\Delta_x u(t,0,z) + \\ + \frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} B_x(u(t,0,z) + \psi(t,z) - \psi(t,z)).$$

$$u_t(t,0,z) = a(t)u_{zz}(t,0,z) + b(t)\Delta_x u(t,0,z) + \lambda(t,z)B_z(u) = a(t)u_{zz}(t,0,z) + b(t)\Delta_x u(t,0,z) + \\ + \frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f(t,z)\Delta_x\varphi(t,0)b(t)}{B_z(\psi)} B_z(\psi(t,z)) + \lambda(t,z)B_z(A(t,z)).$$

$$u_t(t,0,z) = a(t)(u_{zz}(t,0,z) - \psi_{zz}(t,z)) + b(t)\Delta_x u(t,0,z) + \\ + \psi_t(t,z) - f(t,z)\Delta_x\varphi(t,0)b(t) + \lambda(t,z)B_z(A(t,z)).$$

Получили задачу Коши следующего вида:

$$A_t(t,z) = a(t)A_{zz}(t,z) + \lambda(t,z)B_z(A(t,z)); \quad A(0,z) = 0.$$

Если коэффициент $\lambda(t,x)$ непрерывен и ограничен, то единственным решением данной задачи является $A(t,z) = 0$ и, значит, $u(t,0,z) = \psi(t,z)$. Условие переопределения выполняется.

Для доказательства существования решения задачи (6) рассмотрим вспомогательную задачу в области $G_{[0,T]} = \big\{(t,z) \mid z \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant t \leqslant T\big\}$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = a(t)f_{zz} + B_z(f)S_\delta\left(\frac{\beta(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}\right), \quad f(0,z) = v_0(z), \tag{7}$$

здесь $\beta(t,z) = \psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z)$ — это известная функция, а $S_\delta(\vartheta)$ — функция срезки, определенная в $\mathbb{R}$, сколь угодно раз непрерывно дифференцируемая и обладающая следующими свойствами:$S_\delta(\vartheta) \geqslant \dfrac{\delta}{3} > 0, \quad \vartheta \in \mathbb{R}$ и $S_\delta(\vartheta) = \begin{cases} \vartheta, & \text{при } \vartheta \geqslant \frac{\delta}{2}, \\ \dfrac{\delta}{3}, & \text{при } \vartheta \leqslant \dfrac{\delta}{3}. \end{cases}$

Определению подлежит функция $f(t,z)$. Функция $v_0(z)$ действительнозначная и задана в $\mathbb{R}$. Функция $S_\delta^{(k)}(\vartheta) \leqslant 2, k = 1,\ldots,4$.

Для доказательства существования решения вспомогательной задачи используем метод слабой аппроксимации [5]. Фиксируем постоянную $\tau > 0$ такую, что $\tau J = T$. Разбиваем

задачу на три дробных шага и линеаризуем задачу сдвигом по переменной t на величину $\dfrac{\tau}{3}$.

$$f_t^\tau = 3\,a(t) f_{zz}^\tau(t,z), \quad j\tau < t \leqslant \Big(j+\frac{1}{3}\Big)\tau, \tag{8}$$

$$f_t^\tau = 3\,(c_1(t) f_{zz}^\tau(t,z) + c_2(t) f_z^\tau(t,z)) S_\delta(\lambda^\tau(t,z)), \quad \Big(j+\frac{1}{3}\Big)\tau < t \leqslant \Big(j+\frac{2}{3}\Big)\tau, \tag{9}$$

$$f_t^\tau = 3\,c_3(t) f^\tau(t,z) S_\delta(\lambda^\tau(t,z)), \quad \Big(j+\frac{2}{3}\Big)\tau < t \leqslant \Big(j+1\Big)\tau, \tag{10}$$

$$f^\tau(0,z) = v_0(z), \quad j = 0,1,2,\ldots,(J-1),\ J\tau = T, \tag{11}$$

где $\lambda^\tau(t,z) = \dfrac{\beta(t,z) - f^\tau(t-\frac{\tau}{3},z)\,\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}$.

Относительно функций $v_0(z), \psi(t,z)$ предположим, что они достаточно гладкие, имеют все непрерывные производные, входящие в следующее соотношение, и удовлетворяют ему:

$$\left|\frac{d^k}{dz^k} v_0(z)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\psi(t,z)\right| + \left|\frac{\partial^i}{\partial z^i}\psi(t,z)\right| \leqslant C, \quad k = 0,1,\ldots,4,\ i = 0,1,\ldots,6. \tag{12}$$

Для решения f^τ расщепленной задачи (8)—(11) доказаны равномерные по τ оценки в области $G_{[0,\widetilde{t}^*]}$, где $0 < \widetilde{t}^* \leqslant T$ – некоторая фиксированная константа, зависящая от констант, ограничивающих входные данные (12), констант a_0, b_0, c_0 и константы μ из (4).

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} f^\tau(t,z)\right| \leqslant C, \quad k = 0,1,\ldots,4. \tag{13}$$

В силу оценки (13) правые части уравнений (8)—(11) ограничены равномерно по τ на любом временном шаге, попадающем в отрезок $[0,\widetilde{t}^*]$, следовательно, справедлива равномерная по τ оценка

$$|f_t^\tau(t,z)| \leqslant C, \quad (t,z) \in G_{[0,\widetilde{t}^*]}. \tag{14}$$

Дифференцируя уравнения задачи (8)—(11) по переменной z один или два раза, получим равномерные по τ оценки

$$|f_{tz}^\tau(t,z)| + |f_{tzz}^\tau(t,z)| \leqslant C, \quad (t,z) \in G_{[0,\widetilde{t}^*]},$$

что вместе с оценками (14) и

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} f^\tau(t,z)\right| \leqslant C, \quad k = 1,..,4, \quad (t,z) \in G_{[0,\widetilde{t}^*]},$$

гарантирует выполнение условий теоремы Арцела о компактности.

В силу теоремы Арцела о компактности некоторая подпоследовательность $f^{\tau_k}(t,z)$ последовательности $f^\tau(t,z)$ решений задачи (8)—(11) сходится вместе с производными по z до второго порядка включительно к функции $f(t,z) \in C_{t,z}^{0,2}(G_{[0,\widetilde{t}^*]})$. На основании теоремы сходимости МСА, $f(t,z)$ — решение задачи (7), причем $f(t,z) \in C_{t,z}^{1,2}(G_{[0,\widetilde{t}^*]})$, где

$$C_{t,z}^{1,2}(G_{[0,\widetilde{t}^*]}) = \left\{ f(t,z) \middle| f_t(t,z), \frac{\partial^k}{\partial z^k} f(t,z) \in C(G_{[0,\widetilde{t}^*]}), k = 0,1,2 \right\},$$

при этом

$$\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} f(t,z)\right| \leqslant C, \quad k = 0,1,2. \tag{15}$$

Пусть выполняется следующее условие при $t \in [0, \widetilde{t}^*]$ (можно для простоты потребовать, чтобы данное условие выполнялось при $t \in [0, T]$, $z \in \mathbb{R}$):

$$\frac{\beta(t,z) - v_0(z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} \geqslant \delta. \tag{16}$$

Для того чтобы снять срезку в уравнении (7), докажем, что при $t \in [0, \widetilde{t}^*]$ выполняется

$$\frac{\beta(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} \geqslant \frac{\delta}{2}.$$

Проинтегрируем (7) по временной переменной в пределах от 0 до t:

$$f(t,z) = v_0(z) + \int\limits_0^t \Psi(\eta, z) d\eta,$$

где $\Psi(t,z) = a(t) f_{zz} + B_z(f) S_\delta \left(\dfrac{\beta(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} \right)$.

Так как выполняется условие (4), то справедливо равенство

$$\frac{\beta(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} = \frac{\beta(t,z) - v_0(z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} - \frac{\varphi_t(t,0) \int_0^t \Psi(\eta,z) d\eta}{B_z(\psi)}.$$

В силу выполнения условия (16), учитывая (12), (15), получим при $t \in \left[0, \frac{\delta}{2A(\delta)}\right]$

$$\frac{\beta(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} \geqslant \delta - A(\delta) t \geqslant \frac{\delta}{2}.$$

Здесь $A(\delta)$ — некоторая положительная константа, которая оценивает входные данные и зависит от δ, константы C из (12), а также константы, ограничивающей коэффициент $a(t)$.

В силу определения срезающей функции $S_\delta(\theta)$ имеем

$$S_\delta(\lambda(t,z)) = \lambda(t,z), \text{ при } t \in [0, t^*], \text{ где } t^* = \min\left(\widetilde{t}^*, \frac{\delta}{2A(\delta)}\right).$$

Таким образом, в уравнении (7) срезка снимается. Следовательно, доказано существование решения $f(t,z)$ задачи (6) в классе $C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]})$.

Единственность решения задачи получена путем доказательства тождественного равенства нулю разности двух предполагаемых решений. Доказательство в данной статье не приводится.

Справедлива

Теорема 2. *При выполнении условий* (4), (12), (16) *на входные данные существует* t^*, $0 < t^* \leqslant T$ *– некоторая положительная константа, зависящая от* μ *из* (4), δ *из* (16), *постоянных, ограничивающих функции* $a(t)$, $b(t), c_1(t)$, *и постоянных из* (12), *ограничивающих входные данные, такая, что решение* $f(t,z)$ *задачи* (6) *существует и единственно в классе*

$$C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]}) = \left\{ f(t,z) \middle| f_t(t,z), \frac{\partial^k}{\partial z^k} f(t,z) \in C(G_{[0,t^*]}), k = 0,1,2 \right\},$$

при этом удовлетворяет соотношению $\sum_{k=0}^{2} \left| \dfrac{\partial^k}{\partial z^k} f(t,z) \right| \leqslant C$.

Поскольку существование решения доказано в области $G_{[0,t^*]}$, то будем говорить, что задача (6) разрешима в малом временном интервале.

Задача (5) является классической задачей Коши для параболического уравнения. Сформулируем условия существования и единственности решения для данной задачи в виде теоремы.

Теорема 3. *Пусть $\omega_0 \in C(\mathbb{R}^n)$ ограничена, тогда решение $\varphi(t,x)$ задачи (5), принадлежащее классу $C^{1,2}_{t,x} = \{\varphi(t,x)|\varphi_t(t,x), D^\alpha_x\varphi(t,x) \in C(\Pi_{[0,T]}),\ |\alpha| \leqslant 2\}$, удовлетворяющее соотношению*

$$\sum_{|\alpha|\leqslant 2} |D^\alpha_x \varphi_t(t,x)| \leqslant C,$$

существует и единственно.

В силу того, что функции $u(t,x,z)$, $\lambda(t,z)$ выражаются через известные функции, а именно

$$u(t,x,z) = \varphi(t,x)f(t,z),$$

$$\lambda(t,z) = \frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)},$$

где $\varphi(t,x) \in C^{1,2}_{t,x}$, $f(t,z) \in C^{1,2}_{t,z}$ —решения задач (5) и (6), справедлива оценка

$$\sum_{k=0}^{2}\sum_{|\alpha|\leqslant 2}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k} D^\alpha_x u(t,x,z)\right| + \sum_{k=0}^{2}\left|\frac{\partial^k}{\partial z^k}\lambda(t,z)\right| \leqslant C. \tag{17}$$

В силу теорем 1–3 справедлива

Теорема 4. *Пусть выполняются условия (4), (12) на входные данные, условия **теоремы 3** и условие (16) на функцию φ, являющуюся решением задачи (5), тогда существует t^*, $0 < t^* \leqslant T$ — некоторая положительная константа, зависящая от μ из (4), δ из (16), постоянных, ограничивающих функции $a(t)$, $b(t), c_1(t)$, и постоянных из (12), ограничивающих входные данные, такая, что существует решение $u(t,x,z)$, $\lambda(t,z)$ обратной задачи (1) — (3) в классе*

$$Z(t^*) = \left\{u(t,x,z), \lambda(t,z) \mid u(t,x,z) \in C^{1,2,2}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}),\ \lambda(t,z) \in C^{1,2}_{t,z}(G_{[0,t^*]})\right\},$$

где

$$C^{1,2,2}_{t,x,z}(G_{[0,t^*]}) = \left\{u(t,x,z)\Big|D^\alpha_x u, \frac{\partial^k}{\partial z^k}u \in C(G_{[0,t^*]}), k = 0,1,2,\ |\alpha| \leqslant 2\right\},$$

удовлетворяющее соотношению (17).

Докажем единственность решения обратной задачи. Пусть выполняются условия (4), (12), (17). Доказательство единственности решения задачи (1)–(3) будем вести от противного. Пусть $u_1(t,x,z), \lambda_1(t,z)$ и $u_2(t,x,z), \lambda_2(t,z)$ — два классических решения задачи (1), (2). Причем пара функций $u_1(t,x,z)$, $\lambda_1(t,z)$ — решение, определяемое теоремой 1 и удовлетворяющее условию (3), а пара функций $u_2(t,x,z), \lambda_2(t,z)$ — некоторое другое решение задачи (1)–(3), удовлетворяющее условию (17). Тогда справедливы соотношения:

$$u_{1t} = a(t)u_{1zz}(t,x,z) + b(t)\Delta_x u_1(t,x,z) + \lambda_1(t,z)B_z(u_1),$$
$$u_{2t} = a(t)u_{2zz}(t,x,z) + b(t)\Delta_x u_2(t,x,z) + \lambda_2(t,z)B_z(u_2),$$

$$u_1(0,x,z) = u_0(x,z), \quad u_2(0,x,z) = u_0(x,z),$$

$$u_1(t,0,z) = \psi(t,z), \quad u_2(t,0,z) = \psi(t,z).$$

Разность $u_1(t,x,z) - u_2(t,x,z) = u(t,x,z)$, $\lambda_1(t,z) - \lambda_2(t,z) = \lambda(t,z)$ является решением задачи

$$u_t = a(t)u_{zz}(t,x,z) + b(t)\Delta_x u(t,x,z) + \lambda_1(t,z)B_z(u) + \lambda(t,z)B_z(u_2), \tag{18}$$

$$u(0,x,z) = 0, \quad u(t,0,z) = 0. \tag{19}$$

Полагаем в уравнении (18) $x = 0$. Используя (19), выражаем коэффициент при функции $\lambda(t,z)$. Подставляя его выражение в (19), получим

$$u_t = a(t)u_{zz}(t,x,z) + b(t)\Delta_x u(t,x,z) + \lambda_1(t,z)B_z(u) + \frac{b(t)\Delta_x u(t,0,z)}{B_z(\psi)}B_z(u_2), \tag{20}$$

$$u(0,x,z) = 0. \tag{21}$$

Рассмотрим неотрицательные, не убывающие на отрезке $[0,t^*]$ функции

$$g_k(t) = \sup_{G[0,t]} \left| \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} u(\xi,x,z) \right|, \quad k = 0,1,2.$$

В силу принципа максимума получим оценки на уравнение (20)

$$|u(\xi,x,z)| \leqslant Ce^{C\xi} g_2(t)\xi, \quad (\xi,x,z) \in G_{[0,t]}, \quad 0 \leqslant t \leqslant t^*,$$

откуда в силу неотрицательности $g_k(t)$ получим оценку

$$g_0(t) \leqslant Ctg_2(t) \leqslant C(g_2(t) + g_1(t) + g_0(t))t, \quad 0 \leqslant t \leqslant t^*.$$

Дифференцируя уравнения (20), (21) по x один или два раза, в силу принципа максимума для уравнения

$$(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} u)_t = a(t)(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} u)_{zz}(t,x,z) + b(t)(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} u)_{xx}(t,x,z) +$$
$$+ \lambda_1(t,z)\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} B_z(u)\right) + \frac{b(t)\Delta_x u(t,0,z)}{B_z(\psi)}\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} B_z(u_2)\right),$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^k}{\partial x_i^k} u\right)(0,x,z) = 0, \quad k = 1,2,$$

получаем аналогичные оценки

$$g_k(t) \leqslant Ctg_2(t) \leqslant C(g_2(t) + g_1(t) + g_0(t))t, \quad k = 1,2 \quad 0 \leqslant t \leqslant t^*.$$

Сложим все оценки, получим

$$g_0(t,z) + g_1(t,z) + g_2(t,z) \leqslant C(g_2(t,z) + g_1(t,z) + g_0(t,z))t, \quad 0 \leqslant t \leqslant t^*.$$

Отсюда получим, что выполняется равенство $g_0(t,z) + g_1(t,z) + g_2(t,z) = 0$ при $t \in [0,\zeta]$, где $\zeta < \dfrac{1}{C}$ и, следовательно,

$$u(t,x,z) = 0, \quad (t,x,z) \in G_{[0,\zeta]}.$$

Повторяя рассуждения для $t \in [0,2\zeta]$, получим, что

$$u(t,x,z) = 0, \quad (t,x,z) \in G_{[0,2\zeta]}.$$

Через конечное число шагов получим оценку

$$u(t,x,z) \equiv 0, \quad (t,x,z) \in G_{[0,t^*]}.$$

Учитывая, что $u_1(t,x,z) \equiv u_2(t,x,z), \quad (t,x,z) \in G_{[0,t^*]}$, из (18) получим, что для $\lambda(t,z) = \lambda_1(t,z) - \lambda_2(t,z)$ выполняется соотношение

$$\lambda(t,z)B_z(\psi) = 0,$$

откуда в силу (4) следует, что

$$\lambda(t,z) = \lambda_1(t,z) - \lambda_2(t,z) = 0, \quad t \in [0,t^*].$$

Справедлива

Теорема 5. *При выполнении условий* (4), (12) *на входные данные, условий* ***теоремы 3*** *и условия* (16) *на функцию* φ, *являющуюся решением задачи* (5), *решение* $u(t,x,z)$, $\lambda(t,z)$ *задачи* (1)–(3), *удовлетворяющее соотношению* (17), *единственно в классе* $Z(t^*)$.

2. Пример входных данных, удовлетворяющих условиям доказанных теорем

В качестве примера рассмотрим следующую задачу Коши для параболического уравнения.

В области $G_{[0,0.5]} = \big\{(t,x,z) \mid x \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R},\ 0 \leqslant t \leqslant 0.5\big\}$ рассмотрим уравнение

$$u_t = u_{zz}(t,x,z) + \Delta_x u(t,x,z) + \lambda(t,z)B_z(u), \tag{22}$$

где $B_z(u) = u_{zz}(t,x,z) + u_z(t,x,z) + 2u(t,x,z)$, с начальным условием:

$$u(0,x,z) = u_0(x,z) = (\sin(z)+3)(\sin(x)+1). \tag{23}$$

Функции $a(t) = 1$, $b(t) = 1$, $c_1(t) = c_2(t) = 1$, $c_3(t) = 2$ — непрерывные, ограниченные на $[0,0.5]$. Функция $u_0(x,z) = (\sin(z)+3)(\sin(x)+1)$ действительнозначная и задана в $\mathbb{R}^2$. Функция $\lambda(t,z)$ подлежит определению одновременно с решением $u(t,x,z)$ задачи (22), (23).

Пусть задано условие переопределения следующего вида:

$$u(t,0,z) = \psi(t,z) = (t+1)(\sin(z)+3),$$

и выполнено условие согласования

$$u_0(0,z) = \psi(0,z) = \sin(z)+3.$$

Необходимо выполнение следующего условия:

$$|B_z(\psi)| = |c_1(t)\psi_{zz}(t,z) + c_2(t)\psi_z(t,z) + c_3(t)\psi(t,z)| \geqslant \mu > 0, \quad \mu\text{— const}.$$

Нетрудно проверить, что данное условие выполняется

$$B_z(\psi) = (t+1)(-\sin(z)) + (t+1)\cos(z) + 2(t+1)(\sin(z)+3) = \\ = (t+1)(\sin(z)+\cos(z)+6) \geqslant \mu > 0,$$

достаточно взять $\mu = 0,5$.

Рассмотрим задачу Коши

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \Delta_x\varphi, \quad \varphi(0,x) = w_0(x) = \sin(x)+1.$$

Решением этой задачи является функция $\varphi(t,x) = e^{-t}\sin(x)+1$. В этом можно убедиться, подставив функцию $\varphi(t,x)$ в уравнение:

$$-e^{(-t)}\sin(x) = -e^{(-t)}\sin(x), \quad \varphi(0,x) = w_0(x) = \sin(x)+1.$$

Функция $w_0(x) = (\sin(x)+1) \in C(\mathbb{R})$ ограничена.

Для задачи

$$\frac{\partial f}{\partial t} = f_{zz} + B_z(f)\frac{\sin(z)(2+t)+3}{(t+1)(\sin(z)+\cos(z)+6)},$$
$$f(0,z) = v_0(z) = \sin(z)+3, \tag{24}$$

решением будет функция $f(t,z) = (t+1)(\sin(z)+3)$.

При этом

$$B_z(f) = (t+1)(-\sin(z)) + (t+1)\cos(z) + 2(t+1)(\sin(z)+3) = (t+1)(\sin(z)+\cos(z)+6),$$
$$\lambda(t,z) = \frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} = \frac{\sin(z)+3+\sin(z)(t+1)}{(t+1)(\sin(z)+\cos(z)+6)}.$$

Подставим решение в уравнение

$$\sin(z)+3 = -(t+1)\sin(z) + (t+1)(\sin(z)+\cos(z)+6)\frac{\sin(z)+3+\sin(z)(t+1)}{(t+1)(\sin(z)+\cos(z)+6)},$$

$$\sin(z)+3 = -(t+1)\sin(z) + \sin(z)+3+(t+1)\sin(z),$$

получаем верное тождество.

Для существования решения задачи (24) необходимо выполнение условия

$$\left|\frac{d^k}{dz^k}v_0(z)\right| + \left|\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial^k}{\partial z^k}\psi(t,z)\right| + \left|\frac{\partial^i}{\partial z^i}\psi(t,z)\right| \leqslant C, \quad k = 0,1,\ldots,4,\ i = 0,1,\ldots,6.$$

Данное условие выполняется в силу ограниченности всех производных от функций $v_0(z) = \sin(z)+3$ и $\psi(t,z) = (t+1)(\sin(z)+3)$.

По теореме 1 функция $u(t,x,z)$ представима в виде

$$u(t,x,z) = \varphi(t,x)f(t,z) = (t+1)(e^{-t}\sin(x)+1)(\sin(z)+3).$$

Проверим, удовлетворяет ли функция $u(t,x,z)$ уравнению. Для этого выпишем все функции, участвующие в уравнении:

$$u_t = (\sin(z)+3)\left(\sin(x)(e^{-t}-(t+1)e^{-t})+1\right) = (\sin(z)+3)\left(\sin(x)e^{-t}(-t)+1\right),$$
$$u_{xx} = -(\sin(z)+3)(t+1)\sin(x)e^{-t},$$
$$u_{zz} = -(\sin(x)e^{-t}+1)(t+1)\sin(z),$$
$$\lambda(t,z) = \frac{\psi_t(t,z) - a(t)\psi_{zz}(t,z) - f(t,z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)} = \frac{\sin(z)(t+2)+3}{(t+1)(\sin(z)+\cos(z)+6)},$$
$$B_z(u) = (t+1)(-\sin(z)) + (t+1)\cos(z) + 2(t+1)(\sin(z)+3) = (t+1)(\sin(z)+\cos(z)+6),$$

и подставим их в уравнение (22).

$$(\sin(z)+3)\left(\sin(x)e^{-t}(-t)+1\right) =$$
$$= -(\sin(x)e^{-t}+1)(t+1)\sin(z) - (\sin(z)+3)(t+1)\sin(x)e^{-t} +$$
$$+ (t+1)(\sin(z)+\cos(z)+6)\frac{\sin(z)(t+2)+3}{(t+1)(\sin(z)+\cos(z)+6)}.$$

После элементарных преобразований последнее уравнение примет вид

$$\begin{aligned}\sin(z)\sin(x)e^{-t}(-t)+\sin(z)+3\sin(x)e^{-t}(-t)+3 =\\ = -2te^{-t}\sin(z)\sin(x)-3te^{-t}\sin(x)-t\sin(z)-2e^{-t}\sin(z)\sin(x)-\\ -3e^{-t}\sin(x)-\sin(z)+te^{-t}\sin(z)\sin(x)+t\sin(z)+\\ +2e^{-t}\sin(z)\sin(x)+2\sin(z)+3te^{-t}\sin(x)+3.\end{aligned}$$

После сокращения получим верное тождество.

Функция $u_0(x,z)$ представима в виде

$$u_0(x,z)=w_0(x)v_0(z)=(\sin(z)+3)(\sin(x)+1).$$

Условие для существования решения задачи (24):

$$\frac{\beta(t,z)-v_0(z)\varphi_t(t,0)}{B_z(\psi)}=\frac{\sin(z)(t+2)+3}{(t+1)(\sin(z)+\cos(z)+6)}\delta,$$

выполняется при $\delta=0,01$ и $\forall\, t\in[0,0.5]$.

Данный пример показывает, что множество входных данных, удовлетворяющих полученным достаточным условиям разрешимости задачи (1) – (3), не пусто.

Список литературы

[1] Ю.Е.Аниконов, О методах исследования многомерных обратных задач для эволюционных уравнений, *Докл. РАН*, **331**(1993), №3, 409-410.

[2] О.А.Афиногенова, Ю.Я.Белов, И.В.Фроленков, О стабилизации решения задачи идентификации функции источника одномерного параболического уравнения, *Докл. РАН*, **424**(2009), №4, 439–441.

[3] Ю.Я.Белов, И.В.Фроленков, Некоторые задачи идентификации коэффициентов полулинейных параболических уравнений, *Докл. РАН*, **404**(2005) №5, 583–585.

[4] И.В.Фроленков, Е.Н.Кригер, О задаче идентификации функции источника специального вида в двумерном параболическом уравнении, *Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics*, **3**(2010), №4, 556–564.

[5] Ю.Я.Белов, С.А.Кантор, Метод слабой аппроксимации, Красноярск, КрасГУ, 1999.

[6] Н.Н.Яненко, Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики, Новосибирск, 1967.

An Representation of the Solution of the Inverse Problem for a Multidimensional Parabolic Equation with Initial Data in the Form of a Product

Igor V. Frolenkov
Galina V. Romanenko

An identification problem of the coefficient at differential operator of second order in multidimensional parabolic equation with Cauchy data was studied in this article. The theorems of existence and uniqueness of the solution for direct and inverse problems has been proved.

Keywords: inverse problem, identification problem, method of weak approximation, equations in partial derivatives, existence and uniqueness of the solution.