Journal of Siberian Federal University. Mathematics & Physics 2010, 3(2), 205–215

УДК 517.518.87

Алгоритм построения минимальных кубатурных формул, обладающих d-свойством Хаара в двумерном случае

Кирилл А. Кириллов*
Институт космических и информационных технологий,
Сибирский федеральный университет,
Киренского 26, Красноярск, 660074,
Россия

Получена 18.01.2010, окончательный вариант 25.03.2010, принята к печати 10.04.2010

В двумерном случае рассматриваются кубатурные формулы, обладающие d-свойством Хаара, т. е. формулы, точно интегрирующие полиномы Хаара двух переменных, степени которых не превосходят заданного числа d. Получен алгоритм, позволяющий для любого целого $d > 7$ строить минимальные кубатурные формулы (формулы с наименьшим возможным числом узлов), обладающие d-свойством Хаара.

Ключевые слова: минимальные кубатурные формулы, функции Хаара, d–свойство Хаара, полиномы Хаара.

Введение

Значительный интерес в теории приближенного интегрирования вызывает проблема построения минимальных кубатурных (квадратурных) формул, точных для некоторого заданного набора функций, т. е. таких формул, которые точно интегрируют указанные функции, используя наименьшее возможное число узлов. Многие работы известных авторов посвящены проблеме построения минимальных формул приближенного вычисления интегралов, точных для алгебраических и тригонометрических многочленов. Квадратурные и кубатурные формулы, точные на алгебраических полиномах, восходят к Гауссу. Минимальные формулы приближенного вычисления интегралов, точные на тригонометрических многочленах, рассматривались в работах И.И.Кеда, М.В.Носкова, И.П.Мысовских и других авторов. Квадратурные и кубатурные формулы, точные для системы функций Хаара, можно найти в монографии И.М.Соболя [1] и статьях К.Энтахера [2,3], однако вопрос минимизации числа узлов в этих работах не рассматривался.

Минимальные квадратурные формулы с произвольной суммируемой функцией, точные для функций Хаара, были описаны в [4]. В двумерном случае вопрос построения минимальных кубатурных формул, точных для полиномов Хаара степени d — специальных линейных комбинаций произведений функций Хаара, — исследовался в [5, 6]. В этих работах рассмотрено свойство кубатурных формул быть точными на константах и полиномах Хаара первых d степеней (так называемое d–свойство Хаара), приведены примеры минимальных формул для $d = 1, 2, 3, 5, 6, 7$, доказана теорема, позволяющая из кубатурной формулы, обладающей

*KKirillov@rambler.ru
© Siberian Federal University. All rights reserved

d–свойством для $d = 6$, поэтапно получить минимальные кубатурные формулы, обладающие d–свойством для $d = 8, 10, 12, \ldots$, а из формулы, обладающей d–свойством для $d = 7$, — минимальные формулы для $d = 9, 11, 13, \ldots$.

В настоящей работе рассмотрен алгоритм, позволяющий для любого целого $d \geqslant 8$ построить минимальные кубатурные формулы, обладающие d–свойством, без поэтапного построения $(d - d_0 - 2)/2$ кубатурных формул, обладающих $(d_0 + 2), (d_0 + 4), \ldots, (d - 2)$–свойством, где $d_0 = 6$ при четном d и $d_0 = 7$ при нечетном d.

1. Основные определения

В работе используется оригинальное определение функций $\chi_{m,j}(x)$, введенное А. Хааром [7], отличное от определения этих функций из [1].

Двоичными промежутками $l_{m,j}$ назовем промежутки с концами в точках $(j-1)/2^{m-1}$, $j/2^{m-1}$, $\quad m = 1, 2, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$. Если левый конец двоичного промежутка совпадает с 0, то будем считать этот промежуток замкнутым слева, если правый конец совпадает с 1 — замкнутым справа. Остальные двоичные промежутки считаются открытыми. Левую и правую половины $l_{m,j}$ (без середины этого двоичного промежутка) будем обозначать $l^-_{m,j}$ и $l^+_{m,j}$ соответственно.

Систему функций Хаара удобно строить группами: группа номер m содержит 2^{m-1} функций $\chi_{m,j}(x)$, где $m = 1, 2, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$. Функции Хаара $\chi_{m,j}(x)$ определяются следующим образом:

$$\chi_{m,j}(x) = \begin{cases} 2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } x \in l^-_{m,j}, \\ -2^{\frac{m-1}{2}} & \text{при } x \in l^+_{m,j}, \\ 0 & \text{при } x \in [0,1] \setminus \overline{l_{m,j}}, \\ \dfrac{1}{2}[\chi_{m,j}(x-0) + \chi_{m,j}(x+0)], & \text{если } x \text{ — внутренняя} \\ & \text{точка разрыва,} \end{cases}$$

$\overline{l_{m,j}} = [\dfrac{j-1}{2^{m-1}}, \dfrac{j}{2^{m-1}}],\ m = 1, 2, \ldots,\ j = 1, 2, \ldots, 2^{m-1}$. Система функций Хаара дополняется функцией $\chi_1(x) \equiv 1$, которая остается вне групп.

В двумерном случае полиномами Хаара степени d будем называть линейные комбинации функций $\chi_1,\ \chi_{p,i}(x),\ \chi_{q,j}(y),\ \chi_{m,k}(x)\chi_{n,l}(y)$ с действительными коэффициентами, где $p, q = 1, \ldots, d,\ m + n = 2, \ldots, d,\ i = 1, \ldots, 2^{p-1},\ j = 1, \ldots, 2^{q-1},\ k = 1, \ldots, 2^{m-1}$, $l = 1, \ldots, 2^{n-1}$ и хотя бы один из коэффициентов при $\chi_{d,i}(x),\ \chi_{d,j}(y),\ \chi_{m,k}(x)\chi_{n,l}(y)$ $(m + n = d)$ отличен от нуля.

Множество $l_{m,j} \times l_{n,i}$ назовем двоичным прямоугольником, а $\overline{l_{m,j}} \times \overline{l_{n,i}}$ — замкнутым двоичным прямоугольником, $m, n = 1, 2, \ldots,\ j = 1, \ldots, 2^{m-1},\ i = 1, \ldots, 2^{n-1}$. Отметим, что площадь каждого из этих прямоугольников равна 2^{m+n-2}.

Будем рассматривать кубатурные формулы

$$I[f] = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y)\, dx\, dy \approx \sum_{i=1}^{N} C^{(i)} f(x^{(i)}, y^{(i)}) = Q[f], \tag{1}$$

где $(x^{(i)}, y^{(i)}) \in [0, 1]^2$ — узлы формулы, $C^{(i)} \in \mathbb{R}$ — ее коэффициенты, $i = 1, 2, \ldots, N,\ \ f(x, y)$ — функция, определенная и суммируемая на $[0, 1]^2$.

Будем говорить, что формула (1) обладает d-свойством Хаара или просто d-свойством, если она точна для любого полинома Хаара $P_n(x, y)$ степени n, не превосходящей d, т. е.

$$Q[P_n] = I[P_n] \text{ для всех } n \leqslant d. \tag{2}$$

Минимальной кубатурной формулой, обладающей d-свойством, назовем формулу с наименьшим возможным числом узлов, удовлетворяющую условию (2).

2. Примеры и свойства минимальных кубатурных формул, точных для полиномов Хаара

В настоящем разделе изложены свойства минимальных кубатурных формул, точных для полиномов Хаара, которые были доказаны в [6], а также приведены примеры этих формул. Указанные свойства и примеры понадобятся нам в разделе 3 для вывода алгоритма построения минимальных формул.

Лемма 1 [6]. *Пусть кубатурная формула* (1) *удовлетворяет следующим условиям:*

(а) число узлов $N(d) = 2^d - \lambda(d)$,

$$\lambda(d) = \begin{cases} 2^{\frac{d}{2}+1} - 2 & \text{при } d = 2k, \\ 3 \times 2^{\frac{d-1}{2}} - 2 & \text{при } d = 2k+1, \end{cases} \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{3}$$

(б) каждый замкнутый двоичный прямоугольник $\overline{l_{m+1,j}} \times \overline{l_{n+1,i}}$ *площади* 2^{-d} $(m+n = d$, $j = 1, \ldots, 2^m$, $i = 1, \ldots, 2^n)$ *содержит ровно один узел формулы, причем этот узел отличен от вершин прямоугольника — точек* $(\frac{j-1}{2^m}, \frac{i-1}{2^n})$, $(\frac{j}{2^m}, \frac{i-1}{2^n})$, $(\frac{j-1}{2^m}, \frac{i}{2^n})$, $(\frac{j}{2^m}, \frac{i}{2^n})$,

(в) обе координаты $\lambda(d)$ *узлов кратны* 2^{-d} *и отличны от 0 и 1, коэффициенты формулы при этих узлах равны* 2^{-d+1}, *а обе координаты каждого из остальных* $N(d) - \lambda(d)$ *узлов кратны* 2^{-d-1}, *но не кратны* 2^{-d}, *и коэффициенты при них равны* 2^{-d},

(г) существует узел, абсцисса которого равна $1 - 2^{-d-1}$, *и узел, ордината которого равна* $1 - 2^{-d-1}$, *причем эти узлы различны.*
Тогда формула (1) *является минимальной кубатурной формулой, обладающей* d*–свойством.*

Рассмотрим некоторые из примеров кубатурных формул, приведенных в [6]. Эти формулы удовлетворяют условиям (а) — (г) для $d = 6$, $d = 7$ и, следовательно, являются минимальными формулами, обладающими d–свойством для соответствующих значений d. Узлы каждой из этих формул удобно представить в виде $(x^{(i)}, y^{(i)}) = (2^{-d-1}a^{(i)}, 2^{-d-1}b^{(i)})$.

Ниже приведены значения коэффициентов при узлах и таблицы значений параметров $a^{(i)}, b^{(i)}$ для указанных кубатурных формул.

Пример 1. $d = 6:\ C^{(1)} = C^{(2)} = \ldots = C^{(14)} = 2^{-5},\ C^{(15)} = C^{(16)} = \ldots = C^{(50)} = 2^{-6}.$

i	$\mathbf{a^{(i)}}$	$\mathbf{b^{(i)}}$	**i**	$\mathbf{a^{(i)}}$	$\mathbf{b^{(i)}}$	**i**	$\mathbf{a^{(i)}}$	$\mathbf{b^{(i)}}$	**i**	$\mathbf{a^{(i)}}$	$\mathbf{b^{(i)}}$	**i**	$\mathbf{a^{(i)}}$	$\mathbf{b^{(i)}}$
1	6	64	**2**	12	32	**3**	16	88	**4**	32	116	**5**	40	16
6	48	56	**7**	56	80	**8**	64	6	**9**	72	48	**10**	80	72
11	88	112	**12**	96	12	**13**	112	40	**14**	116	96	**15**	9	109
16	19	9	**17**	21	43	**18**	23	99	**19**	25	51	**20**	27	75
21	29	23	**22**	35	37	**23**	37	93	**24**	43	107	**25**	45	69
26	51	103	**27**	53	27	**28**	59	45	**29**	61	123	**30**	67	121
31	69	83	**32**	75	101	**33**	77	25	**34**	83	59	**35**	85	21
36	91	35	**37**	93	91	**38**	99	105	**39**	101	53	**40**	103	77
41	105	29	**42**	107	85	**43**	109	119	**44**	119	19	**45**	121	61
46	123	67	**47**	1	3	**48**	125	1	**49**	3	127	**50**	127	125

Пример 2. $d = 7:\ C^{(1)} = C^{(2)} = \ldots = C^{(22)} = 2^{-6},\ C^{(23)} = C^{(24)} = \ldots = C^{(106)} = 2^{-7}.$

i	$\mathbf{a^{(i)}}$	$\mathbf{b^{(i)}}$	**i**	$\mathbf{a^{(i)}}$	$\mathbf{b^{(i)}}$	**i**	$\mathbf{a^{(i)}}$	$\mathbf{b^{(i)}}$	**i**	$\mathbf{a^{(i)}}$	$\mathbf{b^{(i)}}$
1	4	64	**2**	10	128	**3**	16	16	**4**	32	88
5	40	32	**6**	48	112	**7**	64	4	**8**	80	80
9	96	24	**10**	104	96	**11**	112	48	**12**	128	10
13	144	208	**14**	152	160	**15**	160	232	**16**	176	176
17	192	252	**18**	208	144	**19**	216	224	**20**	224	168
21	240	240	**22**	252	192	**23**	7	195	**24**	13	237
25	19	243	**26**	21	153	**27**	23	103	**28**	25	213
29	27	43	**30**	29	165	**31**	35	171	**32**	37	221
33	43	227	**34**	45	141	**35**	51	147	**36**	53	201
37	55	55	**38**	57	181	**39**	59	75	**40**	61	249
41	69	149	**42**	71	107	**43**	73	107	**44**	75	59
45	77	173	**46**	83	179	**47**	85	217	**48**	87	39
49	89	133	**50**	91	123	**51**	93	229	**52**	99	235
53	101	157	**54**	107	163	**55**	109	205	**56**	115	211
57	117	185	**58**	119	71	**59**	121	137	**60**	123	119
61	125	245	**62**	131	247	**63**	133	117	**64**	135	139
65	137	69	**66**	139	187	**67**	141	45	**68**	147	51
69	149	93	**70**	155	99	**71**	157	21	**72**	163	27
73	165	121	**74**	167	135	**75**	169	37	**76**	171	219
77	173	77	**78**	179	83	**79**	181	57	**80**	183	199
81	185	105	**82**	187	151	**83**	195	7	**84**	197	73
85	199	183	**86**	201	53	**87**	203	203	**88**	205	109
89	211	115	**90**	213	29	**91**	219	35	**92**	221	85
93	227	91	**94**	229	41	**95**	231	215	**96**	233	101
97	235	155	**98**	237	13	**99**	243	19	**100**	245	125
101	247	131	**102**	249	61	**103**	1	189	**104**	189	1
105	67	255	**106**	255	67						

Теорема 1 [6]. *Пусть кубатурная формула* (1) *с узлами* $(x^{(i)}, y^{(i)})$ *удовлетворяет условиям (а) — (г),* $i = 1, 2, \ldots, N(d)$, *причем кратными* 2^{-d} *и отличными от 0 и 1 являются координаты узлов со значениями индексов* $i = 1, \ldots, \lambda(d)$, *значению* $1 - 2^{-d-1}$ *равны* $x^{(N(d))}$ *и* $y^{(N(d)-1)}$.

Тогда кубатурная формула

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy \approx \sum_{i=1}^{2^d-\lambda(d)} \big(C_1^{(i)} f(x_1^{(i)}, y_1^{(i)}) + C_3^{(i)} f(x_3^{(i)}, y_3^{(i)})\big) + \sum_{i=1}^{\lambda(d)} \big(C_{-2}^{(i)} f(x_{-2}^{(i)}, y_{-2}^{(i)}) +$$
$$+ C_{-4}^{(i)} f(x_{-4}^{(i)}, y_{-4}^{(i)})\big) + \sum_{i=1}^{2^d-\lambda(d)-2} \big(C_2^{(i)} f(x_2^{(i)}, y_2^{(i)}) + C_4^{(i)} f(x_4^{(i)}, y_4^{(i)})\big) + C_2^{(2^d-\lambda(d)-1)} \times \tag{4}$$
$$\times f(x_2^{(2^d-\lambda(d)-1)}, y_2^{(2^d-\lambda(d)-1)}) + C_4^{(2^d-\lambda(d))} f(x_4^{(2^d-\lambda(d))}, y_4^{(2^d-\lambda(d))})$$

с узлами, имеющими координаты

$$x_k^{(i)} = \delta_{2,k} + \delta_{3,k} + \big(\delta_{1,k} + \delta_{4,k} - \frac{1}{2}\big) x^{(i)} + \frac{(-1)^{k+1}}{2^{d+3}}, \tag{5}$$
$$y_k^{(i)} = \delta_{3,k} + \delta_{4,k} + \big(\delta_{1,k} + \delta_{2,k} - \frac{1}{2}\big) y^{(i)} + \frac{(-1)^{k+1}}{2^{d+3}}, \tag{6}$$
$$i = \lambda(d)+1, \lambda(d)+2, \ldots, N(d)-2 \ \text{ при } \ k = 1,$$
$$i = \lambda(d)+1, \lambda(d)+2, \ldots, N(d)-1 \ \text{ при } \ k = 2,$$
$$i = \lambda(d)+1, \lambda(d)+2, \ldots, N(d) \ \text{ при } \ k = 3,$$
$$i = \lambda(d)+1, \lambda(d)+2, \ldots, N(d)-2, \ i = N(d) \ \text{ при } \ k = 4,$$
$$x_1^{(2^d-\lambda(d)-1)} = \frac{1}{2} x^{(2^d-\lambda(d)-1)}, \quad y_1^{(2^d-\lambda(d)-1)} = \frac{1}{2}, \tag{7}$$
$$x_1^{(2^d-\lambda(d))} = \frac{1}{2}, \quad y_1^{(2^d-\lambda(d))} = \frac{1}{2} y^{(2^d-\lambda(d))}, \tag{8}$$
$$x_k^{(i)} = \delta_{3,k} + \big(\delta_{1,k} - \frac{1}{2}\big) x^{(i)}, \quad y_k^{(i)} = \delta_{3,k} + \big(\delta_{1,k} - \frac{1}{2}\big) y^{(i)}, \tag{9}$$
$$i = 1, 2, \ldots, \lambda(d), \ k = 1, 3,$$
$$x_k^{(i)} = \delta_{-2,k} + \delta_{2,k} + \big(\delta_{-4,k} + \delta_{4,k} - \frac{1}{2}\big) x^{(i)} + \frac{3}{2^{d+3}} \operatorname{sgn} k, \tag{10}$$
$$y_k^{(i)} = \delta_{-4,k} + \delta_{4,k} + \big(\delta_{-2,k} + \delta_{2,k} - \frac{1}{2}\big) y^{(i)} + \frac{3}{2^{d+3}} \operatorname{sgn} k, \tag{11}$$
$$i = 1, 2, \ldots, \lambda(d), \ k = \pm 2, \pm 4,$$

и коэффициентами при узлах

$$C_1^{(2^d-\lambda(d)-1)} = C_1^{(N(d))} = C_1^{(i)} = C_3^{(i)} = 2^{-d-1}, \ i = 1, 2, \ldots, \lambda(d),$$
$$C_1^{(i)} = 2^{-d-2}, \ i = \lambda(d)+1, \lambda(d)+2, \ldots, N(d)-2,$$
$$C_{-2}^{(i)} = C_{-4}^{(i)} = 2^{-d-2}, \ i = 1, 2, \ldots, \lambda(d),$$
$$C_2^{(i)} = 2^{-d-2}, \ i = 1, 2, \ldots, N(d)-1, \quad C_3^{(i)} = 2^{-d-2}, \ i = \lambda(d)+1, \lambda(d)+2, \ldots, N(d),$$
$$C_4^{(i)} = 2^{-d-2}, \ i = 1, 2, \ldots, N(d)-2, \ i = N(d),$$

является минимальной формулой, обладающей $(d+2)$*–свойством.*

Здесь $\delta_{l,k}$ — символ Кронекера.

Замечание 1. *В ходе доказательства теоремы 1 было установлено, что кубатурная формула* (4) *удовлетворяет условиям, отличающимся от условий (а) — (г) лишь тем, что вместо* d *в них фигурирует значение параметра, равное* $d+2$*:*

– число узлов формулы $N(d+2) = 2^{d+2} - \lambda(d+2)$*, где* λ *определяется равенством* (3)*,*

– каждый замкнутый двоичный прямоугольник $\overline{l_{m+1,j}} \times \overline{l_{n+1,i}}$ *площади* 2^{-d-2} $(m+n = d+2,\ j = 1,\dots,2^m,\ i = 1,\dots,2^n)$ *содержит ровно один узел формулы, причем этот узел отличен от вершин прямоугольника — точек* $(\frac{j-1}{2^m}, \frac{i-1}{2^n})$, $(\frac{j}{2^m}, \frac{i-1}{2^n})$, $(\frac{j-1}{2^m}, \frac{i}{2^n})$, $(\frac{j}{2^m}, \frac{i}{2^n})$,

– обе координаты $\lambda(d+2)$ *узлов формулы кратны* 2^{-d-2} *и отличны от 0 и 1, коэффициенты формулы при этих узлах равны* 2^{-d-1}*, а обе координаты каждого из остальных* $N(d+2) - \lambda(d+2)$ *узлов кратны* 2^{-d-3}*, но не кратны* 2^{-d-2}*, и коэффициенты при них равны* 2^{-d-2}*,*

– существует узел формулы, абсцисса которого равна $1 - 2^{-d-3}$*, и узел, ордината которого равна* $1 - 2^{-d-3}$*, причем эти узлы различны.*

Минимальность кубатурной формулы (4) *следует из этого факта на основании леммы 1.*

3. Вывод алгоритма построения минимальных кубатурных формул, обладающих d-свойством

Пусть $n \geqslant 8$ — фиксированное целое число. Представим n в виде

$$n = d_0 + 2m, \quad m \in \mathbb{N}, \quad d_0 = \begin{cases} 6 & \text{при четном } d, \\ 7 & \text{при нечетном } d, \end{cases}$$

где $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел.

В настоящем разделе рассмотрим вывод алгоритма построения минимальных кубатурных формул, обладающих d–свойством при $d = n$.

Для кубатурных формул, обладающих d–свойством при $d \geqslant d_0$, будем рассматривать следующее условие:

(д) существует узел, абсцисса которого равна 2^{-d-1}*, и узел, ордината которого равна* 2^{-d-1}*, причем эти узлы различны.*

Для определенности будем считать, что в случае кубатурной формулы (1) $x^{(N(d)-3)} = 2^{-d-1}$, $y^{(N(d)-2)} = 2^{-d-1}$.

Замечание 2. *Пусть кубатурная формула* (1) *кроме условий (а) — (г) удовлетворяет также условию (д) (таковыми являются формулы, приведенные в примерах 1, 2). Тогда существует узел формулы* (4) *с абсциссой, равной* 2^{-d-3}*, и узел с ординатой, равной* 2^{-d-3}*. Легко видеть, что это узлы* $(x_4^{(N(d)-3)}, y_4^{(N(d)-3)})$ *и* $(x_2^{(N(d)-2)}, y_2^{(N(d)-2)})$ *соответственно.*

Кубатурную формулу (1), удовлетворяющую условиям (а) — (д) при $d = d_0$, запишем в следующем виде:

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\,dx\,dy \approx \sum_{i=1}^{N(d_0)} C_0^{(i)} f(x_0^{(i)}, y_0^{(i)}). \tag{12}$$

Согласно лемме 1 эта кубатурная формула является минимальной формулой, обладающей d_0–свойством.

Замечание 3. *В силу замечаний 1, 2 теорема 1 позволяет из кубатурной формулы (12) поэтапно получить минимальные кубатурные формулы, обладающие d–свойством при $d = d_0+2, d_0+4, \ldots, n$, причем все полученные формулы будут удовлетворять условиям (а) — (д) (со своими значениями d).*

Следовательно, если комбинировать формулы (5)–(11) в определенном порядке, начиная с формул, в которых $x^{(i)}$, $y^{(i)}$ положить равными $x_0^{(i)}$ и $y_0^{(i)}$ соответственно, можно вывести соотношения для вычисления координат узлов минимальной кубатурной формулы, обладающей d–свойством при $d = n$. Указанную кубатурную формулу удобно записать в следующем виде:

$$\int_0^1\int_0^1 f(x,y)dx\,dy \approx \sum_{i=1}^{N(d_0)} \sum_{k_1,k_2,\ldots,k_m} C^{(i)}_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m} f(x^{(i)}_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m}, y^{(i)}_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m}), \qquad (13)$$

где $(x^{(i)}_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m}, y^{(i)}_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m}) \in [0,1]^2$ — узлы кубатурной формулы, $C^{(i)}_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m} \in \mathbb{R}$ — коэффициенты формулы при соответствующих узлах, $f(x,y)$ — функция, определенная и суммируемая на $[0,1]^2$. В силу замечания 3 кубатурная формула (13), в частности, удовлетворяет условию (а) (при $d = n$), следовательно, число узлов этой формулы $N(n) = 2^n - \lambda(n)$, где λ определяется равенством (3).

В дальнейшем будем придерживаться следующих обозначений для узлов кубатурных формул (12) и (13): $P_0^{(i)} = (x_0^{(i)}, y_0^{(i)})$, $P^{(i)}_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m} = (x^{(i)}_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m}, y^{(i)}_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m})$, $i = 1,2,\ldots,N(d_0)$.

В используемой записи координат узлов кубатурной формулы (13) заложен метод их нахождения, основанный на поэтапном построении $(n-d_0)/2$ кубатурных формул, обладающих $(d_0+2),(d_0+4),\ldots,n$–свойством (замечание 3). В соответствии с этим методом вычисление координат узла $P^{(i)}_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m}$ осуществляется по формулам (5)–(11) за m шагов, на шаге номер p вычисляются координаты узла $P^{(i)}_{0,k_1,k_2,\ldots,k_p}$, при этом в указанных формулах $x^{(i)}$, $y^{(i)}$ полагаются равными $x^{(i)}_{0,k_1,k_2,\ldots,k_{p-1}}$ и $y^{(i)}_{0,k_1,k_2,\ldots,k_{p-1}}$ соответственно, а значение $k = k_p$, $p = 1,2,\ldots,m$. При $p = 1$ считается, что в формулах (5) — (11) $x^{(i)} = x_0^{(i)}$, $y^{(i)} = y_0^{(i)}$, $i = 1,\ldots,N(d_0)$.

Попытаемся получить такой алгоритм построения кубатурных формул (13), который значительно сокращал бы число промежуточных этапов в процессе нахождения координат узлов $P^{(i)}_{0,k_1,k_2,\ldots,k_m}$ по сравнению с изложенным методом. С этой целью введем следующие определения.

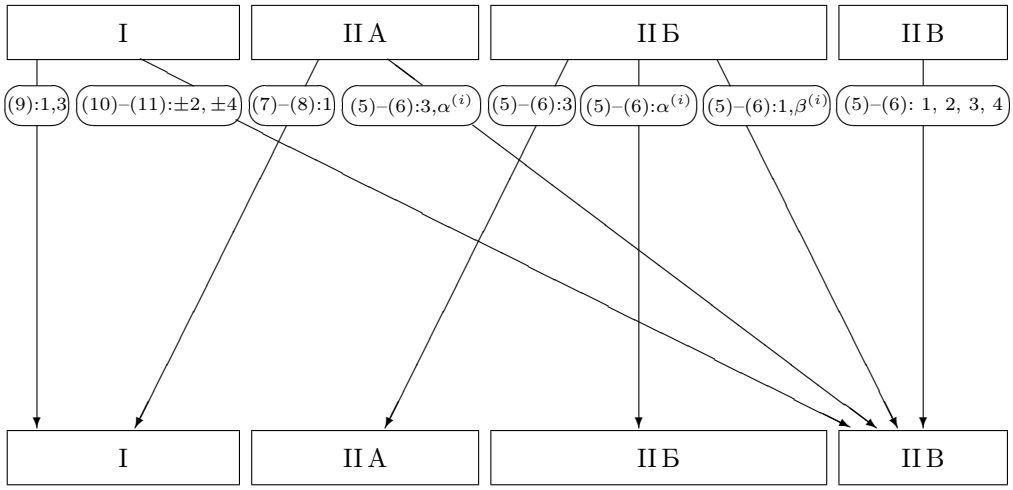
Разобьем множество узлов каждой минимальной кубатурной формулы, обладающей d–свойством ($d \geqslant d_0$) и удовлетворяющей условиям (а) — (д), на две категории: к категории I причислим узлы, обе координаты которых кратны 2^{-d}, а к категории II — узлы, обе координаты которых кратны 2^{-d-1}, но не кратны 2^{-d}. Согласно условию (в), узлы категорий I, II рассматриваемых кубатурных формул существуют, а узлов, не относящихся ни к одной из этих категорий, не существует; коэффициенты формулы при узлах категории I равны 2^{-d+1}, а при узлах категории II — 2^{-d}. Узлы категории II разобьем, в свою очередь, на три подмножества: категории II А, II Б, II В. К категории II А причислим два узла — узел с абсциссой, равной $1-2^{-d-1}$, и узел с ординатой, равной $1-2^{-d-1}$; к категории II Б также отнесем два узла — узел с абсциссой, равной 2^{-d-1}, и узел с ординатой, равной 2^{-d-1}; к категории II В причислим все остальные узлы категории II. Существование узлов категории II А обеспечивает условие (г), а существование узлов категории II Б — условие (д). Так, для кубатурных формул (12) к категории I относятся узлы $P_0^{(1)},\ldots,P_0^{(\lambda(d_0))}$, к категории II В —

узлы $P_0^{(\lambda(d_0)+1)}, \ldots, P_0^{(N(d_0)-4)}$, к категории II Б — узлы $P_0^{(N(d_0)-3)}$, $P_0^{(N(d_0)-2)}$ и к категории II A — узлы $P_0^{(N(d_0)-1)}$, $P_0^{(N(d_0))}$.

Замечание 4. *Несложно показать, что для кубатурной формулы* (13) *категорию II Б составляют узлы* $P_{0,4,\ldots,4}^{(N(d_0)-3)}$, $P_{0,2,\ldots,2}^{(N(d_0)-2)}$, *а категорию II A — узлы* $P_{0,4,\ldots,4,3}^{(N(d_0)-3)}$, $P_{0,2,\ldots,2,3}^{(N(d_0)-2)}$.

Будем говорить, что узел $P_{0,k_1,\ldots,k_{r-1}}^{(i)}$ порождает узел $P_{0,k_1,\ldots,k_r}^{(i)}$ в результате преобразования с номером k_r. Корректность данной терминологии обусловлена тем, что для каждой категории узлов этот номер однозначно определяет преобразование координат узла $P_{0,k_1,\ldots,k_{r-1}}^{(i)}$ в соответствующие координаты узла $P_{0,k_1,\ldots,k_r}^{(i)}$, осуществляемое по одной из формул (5) — (11) (в этой формуле значение параметра k полагается равным k_r). Ниже изображена схема 1, которая иллюстрирует принцип порождения узлов каждой из категорий, непосредственно вытекающий из утверждения теоремы 1 и замечаний 3, 4. На этой схеме стрелка, направленная от одного прямоугольника к другому, означает, что узлы $P_{0,k_1,\ldots,k_{r-1}}^{(i)}$ категории, указанной в первом прямоугольнике, порождают узлы $P_{0,k_1,\ldots,k_r}^{(i)}$ категории, указанной во втором прямоугольнике; в овале, пересекаемом этой стрелкой, указан номер формулы (в скобках) и номера преобразований k_r, осуществляемых по данной формуле, в результате которых узлы $P_{0,k_1,\ldots,k_r}^{(i)}$ порождаются узлами $P_{0,k_1,\ldots,k_{r-1}}^{(i)}$. Для схемы 1 введем величину $\alpha^{(i)}$, определенную при $i = N(d_0)-3, N(d_0)-2, N(d_0)-1, N(d_0)$, и $\beta^{(i)}$, определенную при $i = N(d_0)-3, N(d_0)-2$: $\alpha^{(N(d_0)-3)} = \alpha^{(N(d_0))} = \beta^{(N(d_0)-2)} = 4$, $\alpha^{(N(d_0)-2)} = \alpha^{(N(d_0)-1)} = \beta^{(N(d_0)-3)} = 2$.

СХЕМА 1



Ниже записаны соотношения, которые понадобятся для создания алгоритма построения кубатурных формул (13). В соотношениях (14)–(16) мы не стали указывать множество допустимых значений верхних индексов и множество допустимых комбинаций нижних индексов, так как эти множества находятся в достаточно сложной зависимости друг от друга (указанная зависимость отражена на схеме 2, приведенной в конце настоящей статьи).

$$x_{0,k_1,\ldots,k_r}^{(i)} = \sum_{l=1}^{r-s-1} \Big[\delta_{3,k_{r-l}} \prod_{j=r+1-l}^{r} (\delta_{1,k_j} - \frac{1}{2})\Big] + x_{0,k_1,\ldots,k_s}^{(i)} \prod_{l=s+1}^{r} (\delta_{1,k_l} - \frac{1}{2}) + \delta_{3,k_r},$$

$$y^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_r} = \sum_{l=1}^{r-s-1} \big[\delta_{3,k_{r-l}} \prod_{j=r+1-l}^{r} (\delta_{1,k_j} - \frac{1}{2})\big] + y^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_s} \prod_{l=s+1}^{r} (\delta_{1,k_l} - \frac{1}{2}) + \delta_{3,k_r}, \tag{14}$$

$s < r$, $k_{s+1}, \dots, k_r \in \{1, 3\}$, $P^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_s}$, $P^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_r}$ — узлы категории I.

$$\begin{aligned} x^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_r} &= \delta_{-2,k_r} + \delta_{2,k_r} + (\delta_{-4,k_r} + \delta_{4,k_r} - \frac{1}{2}) x^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_{r-1}} + \frac{3}{2^{d_0+2r+1}} \operatorname{sgn} k_r, \\ y^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_r} &= \delta_{-4,k_r} + \delta_{4,k_r} + (\delta_{-2,k_r} + \delta_{2,k_r} - \frac{1}{2}) y^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_{r-1}} + \frac{3}{2^{d_0+2r+1}} \operatorname{sgn} k_r, \end{aligned} \tag{15}$$

$k_r = \pm 2, \pm 4$, $P^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_{r-1}}$ — узлы категории I, $P^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_{r-1},k_r}$ — узлы категории II B.

$$\begin{aligned} x^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_r} &= \delta_{2,k_r} + \delta_{3,k_r} + \frac{(-1)^{k_r+1}}{2^{d_0+2r+1}} + x^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_s} \prod_{l=s+1}^{r} (\delta_{1,k_l} + \delta_{4,k_l} - \frac{1}{2}) + \\ &+ \sum_{l=1}^{r-s-1} \big[(\delta_{2,k_{r-l}} + \delta_{3,k_{r-l}} + \frac{(-1)^{k_{r-l}+1}}{2^{d_0+2(r-l)+1}}) \prod_{j=r+1-l}^{r} (\delta_{1,k_j} + \delta_{4,k_j} - \frac{1}{2})\big], \\ y^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_r} &= \delta_{3,k_r} + \delta_{4,k_r} + \frac{(-1)^{k_r+1}}{2^{d_0+2r+1}} + y^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_s} \prod_{l=s+1}^{r} (\delta_{1,k_l} + \delta_{2,k_l} - \frac{1}{2}) + \\ &+ \sum_{l=1}^{r-s-1} \big[(\delta_{3,k_{r-l}} + \delta_{4,k_{r-l}} + \frac{(-1)^{k_{r-l}+1}}{2^{d_0+2(r-l)+1}}) \prod_{j=r+1-l}^{r} (\delta_{1,k_j} + \delta_{2,k_j} - \frac{1}{2})\big], \end{aligned} \tag{16}$$

$s < r$, $k_{s+1}, \dots, k_r \in \{1, 2, 3, 4\}$, $k_s = \pm 2, \pm 4$, $P^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_s}$, $P^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_r}$ — узлы категории II B.

$$\begin{aligned} x^{(N(d_0)-3)}_{0,3,1} &= \frac{1}{2},\ y^{(N(d_0)-3)}_{0,3,1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} y^{(N(d_0)-3)}_0 + \frac{1}{2^{d_0+4}}, \\ x^{(N(d_0)-2)}_{0,3,1} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{4} x^{(N(d_0)-2)}_0 + \frac{1}{2^{d_0+4}},\ y^{(N(d_0)-2)}_{0,3,1} = \frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{17}$$

$P^{(N(d_0)-2)}_0$, $P^{(N(d_0)-3)}_0$ — узлы категории II Б, $P^{(N(d_0)-3)}_{0,3,1}$, $P^{(N(d_0)-2)}_{0,3,1}$ — узлы категории I.

$$\begin{aligned} x^{(N(d_0)-3)}_{0,4,\dots,4,3,1} &= \frac{1}{2},\ y^{(N(d_0)-3)}_{0,4,\dots,4,3,1} = \frac{2^{d_0+2r} + (-1)^r 2^{r-1}(2^{d_0+2} - 1) + 5}{3 \cdot 2^{d_0+2r}} + \frac{(-1)^{r+1} y^{(N(d_0)-3)}_0}{2^r}, \\ x^{(N(d_0)-2)}_{0,2,\dots,2,3,1} &= \frac{2^{d_0+2r} + (-1)^r 2^{r-1}(2^{d_0+2} - 1) + 5}{3 \cdot 2^{d_0+2r}} + \frac{(-1)^{r+1} x^{(N(d_0)-2)}_0}{2^r},\ y^{(N(d_0)-2)}_{0,2,\dots,2,3,1} = \frac{1}{2}, \end{aligned} \tag{18}$$

$r+1$ — число нижних индексов (вместе с $k_0 = 0$), $P^{(N(d_0)-3)}_{0,4,\dots,4,3,1}$, $P^{(N(d_0)-2)}_{0,2,\dots,2,3,1}$ — узлы категории I.

$$x^{(N(d_0)-1)}_{0,1} = \frac{1}{2} x^{(N(d_0)-1)}_0,\ y^{(N(d_0)-1)}_{0,1} = \frac{1}{2}, \quad x^{(N(d_0))}_{0,1} = \frac{1}{2},\ y^{(N(d_0))}_{0,1} = \frac{1}{2} y^{(N(d_0))}_0, \tag{19}$$

$P^{(N(d_0)-1)}_0$, $P^{(N(d_0))}_0$ — узлы категории II A, $P^{(N(d_0)-1)}_{0,1}$, $P^{(N(d_0))}_{0,1}$ — узлы категории I.

Чтобы получить соотношения (14) (соотношения (16)), достаточно скомбинировать $r - s$ формул (9) (формул (5)–(6)), начиная с формул, в которых $(x^{(i)}, y^{(i)}) = P^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_s}$. Для вывода соотношений (18) требуется скомбинировать формулы (5)–(8) в такой последовательности: $r - 2$ формул (5)–(6) при $k = \alpha^{(i)}$, начиная с формул, в которых $(x^{(i)}, y^{(i)}) = P^{(i)}_0$, формулы (5)–(6) при $k = 3$ с $(x^{(i)}, y^{(i)}) = P^{(i)}_{0,\alpha^{(i)},\dots,\alpha^{(i)}}$ и формулы (7)–(8) с $(x^{(i)}, y^{(i)}) = P^{(i)}_{0,\alpha^{(i)},\dots,\alpha^{(i)},3}$; для вывода соотношений (17) — формулы (5) – (6) при $k = 3$,

в которых $(x^{(i)}, y^{(i)}) = P_0^{(i)}$, и формулы (7)–(8) с $(x^{(i)}, y^{(i)}) = P_{0,3}^{(i)}$, $i = N(d_0-3), N(d_0-2)$. Соотношения (15) представляют собой формулы (10)– 11) с $(x^{(i)}, y^{(i)}) = P_{0,k_1,\ldots,k_{r-1}}^{(i)}$. Соотношения (19) есть формулы (7)–(8) с $(x^{(i)}, y^{(i)}) = P_0^{(i)}$.

Алгоритм построения кубатурных формул (13) вытекает из соотношений (14)–(19), а также из принципа порождения узлов каждой из категорий, отраженного на схеме 1. Приведенная ниже схема 2 иллюстрирует этот алгоритм. Кроме того, схема 2 для каждого значения верхнего индекса i координат узлов содержит все допустимые комбинации нижних индексов (индекс k_0 везде считается равным 0). На этой схеме стрелка с номером соотношений (14)–(19), направленная от комбинации $(0, k_1, \ldots, k_s)$ к комбинации $(0, k_1, \ldots, k_s, k_{s+1}, \ldots, k_r)$, означает, что узел $P_{0,k_1,\ldots,k_s,k_{s+1},\ldots,k_r}^{(i)}$ находится с помощью соотношений с указанным номером, при этом координаты, фигурирующие в правой части каждого из данных соотношений, полагаются равными соответствующим координатам узла $P_{0,k_1,\ldots,k_s}^{(i)}$. После каждой комбинации в квадратных скобках указана категория, к которой относится узел с данной комбинацией нижних индексов.

СХЕМА 2

1) $i = 1, \ldots, \lambda(d_0)$

1.1) $k_1, \ldots, k_{q-1} \in \{1,\ 3\},\ k_q = \pm 2, \pm 4,\ k_{q+1}, \ldots, k_t \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$:

(0) [I], $\xrightarrow{(14)}$ $(0, k_1, \ldots, k_{q-1})$ [I], $\xrightarrow{(15)}$ $(0, k_1, \ldots, k_{q-1}, k_q)$ [II B], $\xrightarrow{(16)}$

$\xrightarrow{(16)}$ $(0, k_1, \ldots, k_{q-1}, k_q, k_{q+1}, \ldots, k_t)$ [II B];

1.2) $k_1 = \pm 2, \pm 4,\ k_2, \ldots, k_t \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$:

(0) [I], $\xrightarrow{(15)}$ $(0, k_1)$ [II B], $\xrightarrow{(16)}$ $(0, k_1, k_2, \ldots, k_t)$ [II B];

2) $i = \lambda(d_0) + 1, \ldots, N(d_0) - 4$

$k_1, \ldots, k_t \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$:

(0) [II B], $\xrightarrow{(16)}$ $(0, k_1, \ldots, k_t)$ [II B];

3) $i = N(d_0) - 3, N(d_0) - 2$

3.1) $k_1 = 3,\ k_2 = 1,\ k_3, \ldots, k_{q-1} \in \{1,\ 3\},\ k_q = \pm 2, \pm 4,\ k_{q+1}, \ldots, k_t \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$:

(0) [II Б], $\xrightarrow{(17)}$ $(0, 3, 1)$ [I], $\xrightarrow{(14)}$ $(0, 3, 1, k_3, \ldots, k_{q-1})$ [I], $\xrightarrow{(15)}$

$\xrightarrow{(15)}$ $(0, 3, 1, k_3, \ldots, k_{q-1}, k_q)$ [II B], $\xrightarrow{(16)}$ $(0, 3, 1, k_3, \ldots, k_{q-1}, k_q, k_{q+1}, \ldots, k_t)$ [II B];

3.2) $k_1 = 3,\ k_2 = 1,\ k_3 = \pm 2, \pm 4,\ k_4, \ldots, k_t \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$:

(0) [II Б], $\xrightarrow{(17)}$ $(0, 3, 1)$ [I], $\xrightarrow{(15)}$ $(0, 3, 1, k_3)$ [II B], $\xrightarrow{(16)}$ $(0, 3, 1, k_3, k_4, \ldots, k_t)$ [II B];

3.3) $k_1 = \ldots, k_{p-2} = \alpha^{(i)},\ k_{p-1} = 3,\ k_p = 1,\ k_{p+1}, \ldots, k_{q-1} \in \{1,\ 3\},\ k_q = \pm 2, \pm 4,$
$k_{q+1}, \ldots, k_t \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$:

(0) [II Б], $\xrightarrow{(18)}$ $(0, \alpha^{(i)}, \ldots, \alpha^{(i)}, 3, 1)$ [I], $\xrightarrow{(14)}$ $(0, \alpha^{(i)}, \ldots, \alpha^{(i)}, 3, 1, k_{p+1}, \ldots, k_{q-1})$ [I], $\xrightarrow{(15)}$

$\xrightarrow{(15)}$ $(0, \alpha^{(i)}, \ldots, \alpha^{(i)}, 3, 1, k_{p+1}, \ldots, k_{q-1}, k_q)$ [II B], $\xrightarrow{(16)}$

$\xrightarrow{(16)}$ $(0, \alpha^{(i)}, \ldots, \alpha^{(i)}, 3, 1, k_{p+1}, \ldots, k_{q-1}, k_q, k_{q+1}, \ldots, k_t)$ [II B];

3.4) $k_1, \ldots, k_{p-2} = \alpha^{(i)},\ k_{p-1} = 3,\ k_p = 1,\ k_{p+1} = \pm 2, \pm 4,\ k_{p+2}, \ldots, k_t \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$:

(0) [II Б], $\xrightarrow{(18)}$ $(0, \alpha^{(i)}, \ldots, \alpha^{(i)}, 3, 1)$ [I], $\xrightarrow{(15)}$ $(0, \alpha^{(i)}, \ldots, \alpha^{(i)}, 3, 1, k_{p+1})$ [II B], $\xrightarrow{(16)}$

$\xrightarrow{(16)}$ $(0, \alpha^{(i)}, \ldots, \alpha^{(i)}, 3, 1, k_{p+1}, k_{p+2}, \ldots, k_t)$ [II B];

3.5) $k_1, \ldots, k_t \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, в начале последовательности индексов $0, k_1, \ldots, k_t$ нет комбинаций $(0, 3, 1)$, $(0, \alpha^{(i)}, \ldots, \alpha^{(i)}, 3, 1)$, $(0, 3, \beta^{(i)})$, $(0, \alpha^{(i)}, \ldots, \alpha^{(i)}, 3, \beta^{(i)})$:

(0) [II Б], $\xrightarrow{(16)}$ $(0, k_1, \ldots, k_t)$ [II A, II Б, II B (замечание 4)];

4) $i = N(d_0) - 1, N(d_0)$

4.1) $k_1 = 1,\ k_2, \dots, k_{q-1} \in \{1,\ 3\},\ k_q = \pm 2, \pm 4,\ k_{q+1}, \dots, k_t \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$:

(0) [II A], $\xrightarrow{(19)}$ $(0,1)$ [I], $\xrightarrow{(14)}$ $(0,1,k_2,\dots,k_{q-1})$ [I], $\xrightarrow{(15)}$ $(0,1,k_2,\dots,k_{q-1},k_q)$ [II B], $\xrightarrow{(16)}$ $\xrightarrow{(16)}$ $(0,1,k_2,\dots,k_{q-1},k_q,k_{q+1},\dots,k_t)$ [II B];

4.2) $k_1 = 1,\ k_2 = \pm 2, \pm 4,\ k_3, \dots, k_t \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$:

(0) [II A], $\xrightarrow{(19)}$ $(0,1)$ [I], $\xrightarrow{(15)}$ $(0,1,k_2)$ [II B], $\xrightarrow{(16)}$ $(0,1,k_2,k_3,\dots,k_t)$ [II B];

4.3) $k_1 = 3, \alpha^{(i)},\quad k_2, \dots, k_t \in \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$:

(0) [II A], $\xrightarrow{(16)}$ $(0,k_1)$ [II B], $\xrightarrow{(16)}$ $(0,k_1,k_2,\dots,k_t)$ [II B].

Если узел $P^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_m}$ кубатурной формулы (13) относится к категории I, то коэффициент при этом узле определяется равенством $C^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_m} = 2^{-d_0-2m+1}$, а если этот узел относится к категории II, то $C^{(i)}_{0,k_1,\dots,k_m} = 2^{-d_0-2m}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 07-01-00326).

Список литературы

[1] И.М. Соболь, Многомерные квадратурные формулы и функции Хаара, М., Наука, 1969.

[2] K. Entacher, Quasi-Monte-Carlo methods for numerical integration of multivariate Haar series, *BIT (Dan)*, **37**(1997), № 4, 846–861.

[3] K. Entacher, Quasi-Monte-Carlo methods for numerical integration of multivariate Haar series II, *BIT (Dan)*, **38**(1998), № 2, 283–292.

[4] К.А. Кириллов, М.В. Носков, Минимальные квадратурные формулы, точные для полиномов Хаара, *Журнал вычислительной математики и математической физики*, **42** (2002), № 6, 791–799.

[5] К.А. Кириллов, Минимальные кубатурные формулы, точные для полиномов Хаара в $\mathbb{R}^2$, *Вопросы математического анализа*, Красноярск, Красноярский гос. технич. университет, **6**(2002), 108–117.

[6] К.А. Кириллов, Построение минимальных кубатурных формул, точных для полиномов Хаара высших степеней в двумерном случае, *Вычислительные технологии*, **10**(2005), Спец. выпуск, 29–47.

[7] A.Haar, Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, *Math. Ann.*, **69**(1910), 331–371.

The Algorithm of Construction of Minimal Cubature Formulas with Haar d-property in the Two-dimensional Case

Kirill A. Kirillov

In a two-dimensional case the minimal cubature formulas with the Haar d-property are considered. The algorithm of construction of minimal cubature formulas with the Haar d-property is obtained.

Keywords: cubature formulas, Haar functions, Haar polynomials, Haar d–property.